

Spécial 2012

ŒILLETON ET NATURE DE LA TACHE DE LUMIÈRE PROJÉTÉE PAR LE SOLEIL

- **Théorie**

Ombre et pénombre,
Sténopés,
Ellipses et toroïdes.

- **Descriptions et formules**

Œilletons circulaire ou elliptiques.

- **Logiciels** (version numérique)

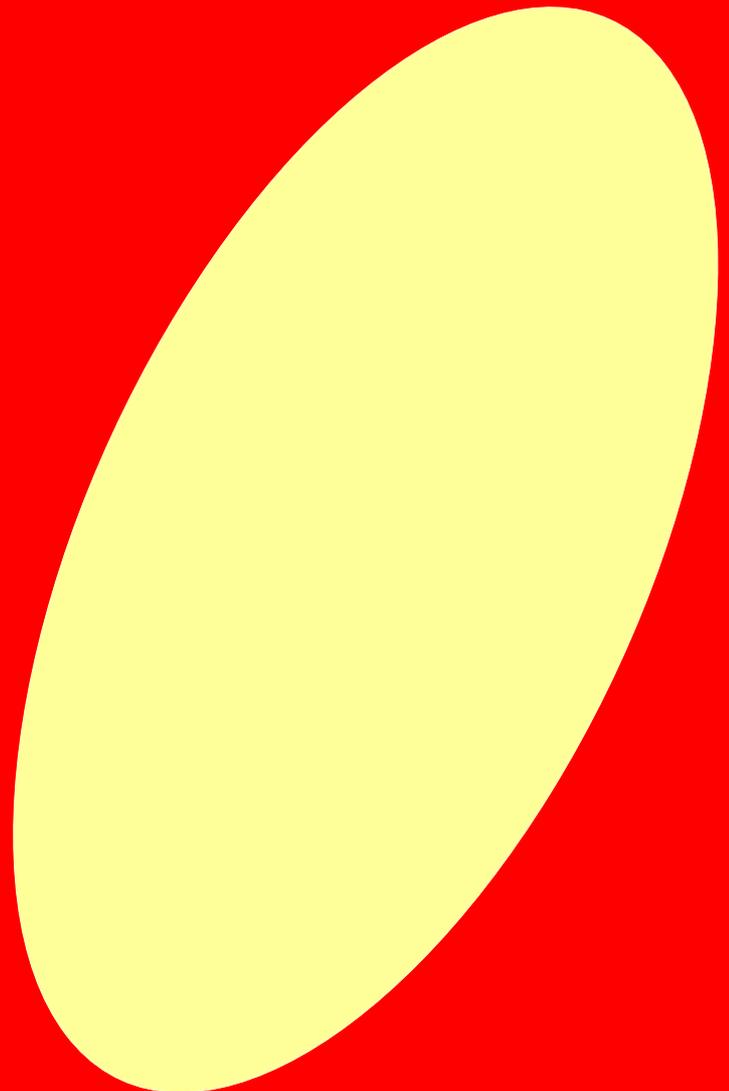
Calculs automatiques des taches projetées

- **Divers**

Héliochronomètres et œilletons,
Œilletons du monde,
L'œilleton de Nanjing,
Œilletons en série,
Œilleton ou objectif.

- **Expériences de cadraniers**

Méridienne de Villers-sur-Mer,
Cadrans à œilleton ou à croix,
Œilletons et trous gnomoniques.





CADRAN INFO

Spécial 2012

On ne trouve pas dans la littérature gnomonique d'études complètes traitant de "l'œilleton et de la nature de la tache de lumière projetée par le soleil".

Quelques articles ont été écrits autour de ce thème dans des bulletins de sociétés de cadrans solaires étrangères ou dans notre propre revue Cadran Info¹. Jamais ce sujet n'a fait véritablement l'objet d'une théorie générale et de son application concrète.

Lorsqu'à notre réunion d'octobre 2011, Gérard Baillet nous a présenté ses recherches sur ce sujet, il a été décidé immédiatement de lui consacrer un numéro spécial de Cadran-Info.

Ce numéro aborde donc différents domaines : les phénomènes d'ombre et de pénombre, une théorie sur la tache lumineuse projetée, formules de dimensionnement de la tache, expériences de réalisation, des descriptions d'œilletons actuels ou anciens...

Afin de réaliser un document le plus exhaustif possible, quelques articles ont été repris d'anciennes parutions². Dans ces cas, la référence est mentionnée dans le sommaire.

Ph. Sauvageot

Un remerciement particulier à Pierre Parbel pour son apport à la qualité de ce numéro

¹ Articles parus dans cadran-Info: Ombre et pénombre de D.Savoie dans CI 09 et dans CI 13, CI 16, CI 22 par G.Ferrari; Dimensions: CI 13 D.Savoie, article remplacé par la dernière version "Œilleton et tache de lumière" présenté dans CI 24; Œilleton et tache de lumière de M.Goutaudier, CI 24; Méridienne à œilleton elliptique de Loupian de D. Savoie CI 24; Œilleton-Ombre-Pénombre, Œilletons et courbes enveloppes, Œilletons et ellipses de Gérard Baillet dans CI 24.

² Tous les articles ont été vérifiés. La traduction des articles de G. Ferrari a été retravaillée.

Sommaire

1- Sommaire en allemand, anglais, espagnol et italien traduction de R. Kriegler ; M. Lambalieu ; D. Collin ; L. de Dinechin.	3
OMBRE & PENOMBRE	
2- Propriétés de l'ombre par Gianni Ferrari (CI 16) : Phénomène de formation de l'ombre et de la pénombre d'un objet. Incidence du profil et de la dimensions d'un "style" ou d'un "gnomon" sur la qualité de l'ombre qu'il projette.	14
3- Ombre et pénombre d'un élément rectiligne par Gianni Ferrari (CI 22) : Observations relatives à l'ombre et à la pénombre d'un élément rectiligne rapportées à la problématique d'un style de cadran solaire.	44
4- Cadran solaire à chambre obscure par Gianni Ferrari (CI 21) : Présentation et analyse des erreurs qui peuvent apparaître dans le cas d'un cadran solaire classique à chambre obscure. Relations mathématiques pour le calcul de quelques paramètres fondamentaux du cadran solaire.	52
5- Image du soleil par Gianni Ferrari (CI 21) : Considérations sur la dimension, le positionnement et la forme de l'œilleton des cadrans solaires à chambre obscure. Image du Soleil projeté . Calculs du diamètre de l'œilleton.	63
6- Ombre et pénombre par Denis Savoie (CI 9) : Erreurs induites par les phénomènes d'ombre et de pénombre d'un style rectiligne et comment peut-on y remédier.	81
7- Le shadow sharpener par Gianni Ferrari (CI 22) : Utilisation du "Shadow Sharpener" ou "intensificateur d'ombre" instrument qui permet de visualiser la ligne de séparation entre l'ombre et la pénombre produite par un objet lointain éclairé par le Soleil.	87
8- Utilisation du sténopé par Roland Trotignon : De l'utilisation du sténopé, instrument remarquable de la dynastie chinoise des Yuan (1271-1368), sur les gnomons de grande taille.	103
THÉORIE tache projetée	
9- Quel œilleton? par Gérard Baillet : Détermination du diamètre d'un œilleton en prenant en compte la dimension angulaire du soleil, la diffraction, la distance œilleton table du cadran. Tableaux applicatifs et rappels théoriques.	109
9bis- Rappel des recherches théoriques de l'auteur, parues dans cadran Info n° 24	128
10- Nouvelle note sur le Toroïde par Dominique Collin : Description des ocelles (ombre d'un disque parallèle au cadran horizontal) de M. Dallet qui sont des toroïdes dont est déterminé l'équation.	166
OEILLETONS et FORMULES	
11- Œilleton et tache de lumière par Marc Goutaudier (CI24) : Formules vectorielles de la forme et de la dimension de la tache de lumière issue d'un œilleton circulaire incliné déclinant portant ombre et pénombre sur un plan horizontal.	173
12- Œilleton et tache de lumière par Denis Savoie (CI24) ☒ : Formules trigonométriques de la forme et de la dimension de la tache de lumière issue d'un œilleton circulaire avec un Soleil de diamètre apparent.	183
13- Méridienne à œilleton elliptique de Loupian par Denis Savoie (CI 24 corrigé) ☒ : Formules trigonométriques de la forme et de la dimension d'un œilleton elliptique projetant une tache lumineuse circulaire aux équinoxes.	192
LOGICIEL et PROGRAMME	

14- Programme tache de lumière par Sébastien Berriot  : Logiciel sous Excel permettant le calcul automatique de la dimension des taches de lumière projetées (formules des articles 12 et 13 de D. Savoie.	196
15- Sommet de style droit par Pierre Joseph Dallet  : Etude de l'ombre projetée et de la pénombre du sommet d'un style droit. Version de son logiciel AlogoSola intégrant ces phénomènes.	199
DESCRIPTIONS D'ŒILLETONS	
16- Œillets du monde (référence au livre de Madame Andrée Gotteland « <i>Les méridiennes du monde et leur histoire</i> ») : Extraits non exhaustifs concernant les caractéristiques d'œillets associés aux méridiennes.	207
17- L'œilleton de Nanjing par Roland Trotignon : Description du gnomon présenté à l'Observatoire de Nanjing (Nankin), construit en 1446 et modifié en 1744.	219
18- Œillets en série par Maurice Kieffer : Caractéristiques des œillets des méridiennes industrielles du XIX siècle.	223
19- Héliochronomètres et œillets par Paul Gagnaire, Michel Brialix, Philippe Sauvageot : Exemples d'œillets associés aux héliochronomètres.	226
20 - La méridienne de Paris et ses œillets par Pascal Descamps & Samira Barouche : Description de la méridienne de l'observatoire de Paris, de ses œillets successifs, de la projection de la tache solaire.	231
21- Objectif : la fin des œillets par Michel Vercasson : Utilisation d'un objectif photographique en lieu et place d'un œilleton pour un héliochronomètre .	241
EXPERIENCES de CADRANIERS	
22- La méridienne de Villers-sur-Mer par Denis Savoie (L'Astronomie n° 47 de février 2012) : Réalisation d'une méridienne intérieure dont la ligne méridienne est bordée de chaque côté d'une courbe encadrant la tache lumineuse permettant une lecture plus précise.	245
23- Cadres solaires à œilleton et/ou à croix par Yves Opizzo : Présentation et retour d'expérience dans la réalisation de cadres solaires à œilleton et/ou à croix lumineuse	253
24- Œillets et trous gnomoniques par Jean-Michel Ansel : Recherche lexicale et approche sur le diamètre des œillets. Deux exemples de réalisation , une méridienne de plein air avec oculus triple et un Hélioscaphe à alidade.	286
Œillets et WEB	
25- Sites concernant les œillets , recherches de Philippe Sauvageot : Présentation et adresses de sites concernant l'ombre et la pénombre, les œillets, l'emploi du sténopé, etc.	295
PHOTOGRAPHIES	
26- Photos et œillets par Philippe Sauvageot et Serge Grégori pour la sélection des photos : Présentation de différents supports, disques et œillets, illustrations photographiques.	312 320

° Version CDrom (hors PdF) : Cliquer sur le titre de l'article pour ouvrir celui-ci (lien hypertexte)

 Indique que l'étude détaillée ou le logiciel est inclus dans le dossier "annexe"

° Les versions en PdF offrent un formatage correct (celui-ci n'est pas garanti en version .doc ou .odt)

Couverture : Conception Ph. Sauvageot et Alain Fortin



D Inhaltsverzeichnis Cadran Info Spécial 2012

Inhaltsverzeichnis in Deutsch, Englisch, Spanisch und Italienisch. Übersetzungen von R. Kriegler; M. Lambalieu D. Collin; L. de Dinechin.	3
Schatten und Halbschatten	
2- Die Eigenschaften des Schattens von Gianni Ferrari (CI 16): Wie der Schatten und der Halbschatten eines Gegenstandes entstehen. Die Wirkung des Profils und der Maße eines „Schattenstabs“ oder eines "Gnomon" auf die Qualität des Schattens, den sie werfen.	14
3- Schatten und Halbschatten eines geradlinigen Elements von Gianni Ferrari (CI 22): Beobachtungen des Schattens und Halbschattens in Beziehung auf das Design eines Sonnenuhr-Schattenstabs.	44
4- "Camera obscura" Sonnenuhr von Gianni Ferrari (CI 21): Beschreibung und Fehler-analyse, die im Fall einer klassischen Camera obscura- Sonnenuhr auftauchen können. Enthalten sind dabei die mathematischen Beziehungen für die Kalkulation einiger wesentlicher Parameter einer Sonnenuhr.	52
5- Bild der Sonne von Gianni Ferrari (CI 21) : Überlegungen über die Dimension, die Position und die Form des Okulars von Dunkelkammer- Sonnenuhren. Die Form der projizierten Sonne. Die Berechnung des Durchmessers des Okulars.	63
6- Schatten und Halbschatten von Dennis Savoie (CI 9) : Entstehende Fehler beim Schatten und Halbschatten eines geraden Schattenstabs und wie man sie vermeiden kann.	81
7- Der "shadow sharpener von Gianni Ferrari (CI 22): Die Verwendung des "shadow sharpener" oder "des Schattenverstärker"-Instrumentes, die erlaubt, die Trennlinie zwischen dem Schatten und dem Halbschatten darzustellen, die durch einen weit entfernten, von der Sonne erleuchteten Gegenstand erzeugt wird.	87
8- Die Verwendung der Lochkamera von Roland Trotignon : Von der Verwendung der Lochkamera, eines bemerkenswerten Instruments der chinesischen Yüan Dynastie, 1271 -1368, für einen Gnomon von großer Länge..	103
Die THEORIE über den projizierten Fleck	
9- Der projizierte leuchtende Fleck von Gérard Baillet : Die Bestimmung des Durchmessers von einem Okular, unter Berücksichtigung der scharfkantige Dimension der Sonne, sowie der Beugung, der Entfernung zwischen dem Okular und der Sonnenuhr-Fläche... Alles, was man über dieses Thema zu erfahren wünscht.	109
9 bis- Erinnerung an die theoretische Forschung	128
10- Neue Anmerkung über die Toroïde von Dominique Collin : Beschreibung von M. Dallets ocellés (Schatten, der von einer Scheibe, parallel zu einer waagerechten Sonnenuhr erzeugt wird), welche Toroïdes sind. Ihre Gleichungen werden gegeben.	166
OKULARE und FORMELN	
11- Okulare und der Lichtfleck von Marc Goutaudier (CI24) : Vektorielle Formeln der Form und der Dimension des leuchtenden Fleckes von einem kreisförmigen gekippten deklinierenden runden Okular, wie es einen Schatten und einen Halbschatten auf einer horizontalen Fläche erzeugt.	173
12- Okular und Lichtfleck von Dennis Savoie (CI24) : Trigonometrische Formeln der Form und der Dimension des Lichtflecks, der durch ein kreisförmiges Okular mit einem bestimmten Durchmesser erzeugt wird.	183

13- Meridian Sonnenuhr mit einem elliptischem Okular von Loupian von Dennis Savoie (CI 24 korrigierte Version) : Trigonometrische Formeln der Form und der Dimension eines elliptischen Okulars, das einen kreisförmigen Lichtfleck zur Tagundnachtgleichen projiziert.	192
SOFTWARE und PROGRAMME	
14- Programmieren des Lichtflecks von Sebastian Bérriot ☒ : Excel Programme erlauben die automatische Berechnung der Größe der projizierten Lichtflecke. Software Übersetzung von Denis Savoies Formeln).	196
15- Scharfe gerade Enden eines vertikalen Schattenstabs von Pierre Joseph Dallet ☒ : Untersuchung des Schattens und Halbschattens, erzeugt durch die Spitze eines vertikalen Schattenstabs. AlgoSola Software Version, die diese Phänomene mit einschließt.	199
BESCHREIBUNG einiger OKULARE	
16- Okulare der Welt (Hinweis auf das Buch von Frau Andrée Gotteland "Meridiane der Welt und ihre Geschichte") : Nicht-umfassende Zusammenfassung bezüglich der mit den Meridianen zusammenhängenden Okulare..	207
17- Das Okular von Nanjing von Roland Trotignon : Beschreibung des Okulars, das in der Sternwarte von Nanjing (Nankin) ausgestellt ist, 1446 konstruiert wurde und 1744 modifiziert wurde.	219
18- Standardisierte Okulare von Maurice Kieffer : Charakteristische Merkmale bei serienmäßig produzierten Meridianen des 19. Jahrhunderts.	223
19- Héliochronomètre und Okulare von MM Paul Gagnaire, Michel Brialex, Philippe Sauvageot : Beispiele von Okularen, die mit Héliochronomètern verbunden wurden.	226
20- Der Meridian von Paris und sein Okular von Pascal Deschamps und Samira Barouche : Beschreibung des Meridians der Sternwarte von Paris, von seinen aufeinanderfolgenden Okularen und von der Projektion des Sonnenflecks.	231
21- Wie die fotografische Linse zum Ende der Okulare führt, von Michel Vercasson : Die Verwendung einer photographischen Linse anstatt eines Okulars für ein Héliochronomètre.	241
ERFAHRUNGEN von SONNENUHRBAUERN	
22- Der Meridian von Villers sur Mer von Dennis Savoie (L'Astronomie Nr. 47 vom Februar 2012) : Realisierung eines inneren Meridians, dessen Mittagslinie auf jeder Seite von einer Kurve gesäumt wird, die den leuchtenden Fleck einrahmt, was eine präzisere Ablesung erlaubt.	245
23- Sonnenuhren mit Okularen und/ oder mit einem Kreuz von Yves Opizzo : Information und Erfahrungsbericht beim Planen von Sonnenuhren mit Okularen und/ oder mit einem leuchtenden Kreuz.	253
24- Okulare und gnomonische Löcher von Jean-Michel Ansel : Lexikalische Forschung und erste Überlegung über den Durchmesser vom Okularen. Zwei Beispiele einer Realisierung: Ein Meridian bei Tageslicht mit dreifachem Okular und eine Hélioscaphe mit einer Alidade.	286
OKULARE und WEB	
25- Webseiten über Okulare, untersucht von Philippe Sauvageot : Vorträge und Adressen von Webseiten über Schatten und Halbschatten, Okulare, dem Gebrauch von Stenopen, und so weiter.	295
PHOTOGRAPHIEN	
26- Fotos und Okulare von Philippe Sauvageot und Serge Grégori für die Auswahl der Bilder : Vorführung verschiedener Medien, Okulare und Disketten.	312 244



E Sumari Cadran Info Spécial 2012

1- Sommaire en allemand, anglais, espagnol et italien traducción de R. Kriegler ; M. Lambalieu D. Collin; L. de Dinechin.	3
SOMBRA y PENUMBRA	
2- Propiedad de la sombra por Gianni Ferrari (CI 16) : Fenómeno de formación de la sombra y la penumbra de un objeto. Incidencia del perfil y las dimensiones de un "estilo" o de un "gnomon" sobre la cualidad de sombra que proyecta.	14
3- Sombra y penumbra de un elemento rectilíneo por Gianni Ferrari (CI 22) : Observaciones relativas a la sombra y a la penumbra de un elemento rectilíneo informadas a la problemática de un estilo de reloj de sol.	44
4- Reloj de sol a cámara oscura por Gianni Ferrari (CI 21) : Presentación y análisis de los errores que pueden aparecer en el caso de un reloj de sol clásico a cámara oscura. También las relaciones matemáticas para el cálculo de algunos parámetros fundamentales del reloj de sol.	52
5- Imagen del sol por Gianni Ferrari (CI 21) : Consideraciones sobre la dimensión, la localización y la forma del ocular de los relojes de sol a cámara oscura. Imagen del Sol proyectado. Cálculos del diámetro del ocular.	63
6- Sombra y penumbra por Denis Savoie (CI 9) : Errores inducidos por los fenómenos de sombra y penumbra de un estilo rectilíneo y cómo se puede hay.	81
7- El Shadow Sharpener por Gianni Ferrari (CI 22) : Utilización del "Shadow Sharpener" o "reforzador de sombra" instrumento que permite imaginar la línea de separación entre la sombra y la penumbra producida por un objeto alejado iluminado por el Sol	87
8- Utilización del "sténopé" por Roland Trotignon : De la utilización del sténopé, instrumento notable de la dinastía china del Yuan (1271-1368), sobre los gnomons de gran tamaño.	103
TEORÍA tacha proyectada	
9- La tacha luminosa proyectada por Gérard Baillet  : Determinación del diámetro de un ocular teniendo en cuenta la dimensión angular del sol, la difracción, la distancia ocular tabla del cuadrante etc... Aprender todo lo que se desea sobre el tema.	109
9 bis- Recordatorio de la investigación teórica	128
10- Nueva nota sobre el Toroïd por Dominique Collin : Descripción de los "ocellés" (sombra de un disco paralelo al cuadrante horizontal) del Sr. Dallet que son toroïdes incluidos se determinan la ecuación.	166
OEILLETONS et FORMULES	
11- Ocular y tacha de luz por Marc Goutaudier (CI 24) : Fórmulas vectoriales de la forma y la dimensión de la tacha de luz resultante de un ocular circular inclinado que declina que lleva sombra y penumbra a nivel horizontal.	173
12- Ocular y tacha de luz por Denis Savoie (CI 24) : Fórmulas trigonométricas de la forma y la dimensión de la tacha de luz resultante de un ocular circular con un Sol de diámetro aparente.	183

13- Meridiana a ocular elíptica de Loupian por Denis Savoie (CI 24 corregido) : Fórmulas trigonométricas de la forma y la dimensión de un ocular elíptico que proyecta una tacha luminosa circular a los equinoccios.	192
PROGRAMA INFORMÁTICO y PROGRAMA	
14- Programa tacha con luz por Sébastien Bérriot ☒ : Programa informático con Excel que permite el cálculo automático de la dimensión de las tachas de luz proyectadas (fórmulas de los artículos 10 y 11 de Denis Savoie)	196
15- Cumbre de estilo recto por Pierre Joseph Dallet ☒ : Estudio de la sombra proyectada y la penumbra de la cumbre de un estilo recto. Versión de su programa informático AlogoSola que integra estos fenómenos.	199
DESCRIPCIONES DE OCULARES	
16- Oculares del mundo (referencia al libro de la Sra. Andrée Gotteland « <i>Les méridiennes du monde et leur histoire</i> ») : Extraídos no exhaustivos acerca de las características de oculares asociados a las meridianas.	207
17- El ocular de Nanjing por Roland Trotignon : Descripción del gnomon presentado al Observatorio de Nanjing (Nankin), construido en 1446, se modificó en 1744.	219
18- Oculares en serie por Maurice Kieffer : Características de los oculares de las meridianas industriales del Siglo XIX.	223
19- Heliochronómetros y oculares por MM Paul Gagnaire, Michel Brialix, Philippe Sauvageot : Ejemplos de oculares asociados a los <u>heliochronómetros</u> .	226
20 - La meridiana de París y sus oculares por Pascal Descamps & Samira Barouche : Descripción de la meridiana del observatorio de París, sus oculares sucesivos, la proyección de la tacha solar.	231
21- Objetivo, el final de los oculares por Michel Vercasson : Objetivo, utilización para un <u>heliochronómetro</u> , de un objetivo fotográfico en lugar de un ocular.	241
EXPERIENCIAS de FABRICANTES DE CUADRANTES	
22- La meridiana de Villers sur Mer por Denis Savoie (L'Astronomie n° 47 de febrero de 2012) : Realización de una meridiana interior cuya línea meridiana se confina de cada lado de una curva que encuadra la tacha luminosa que permite una lectura más precisa.	245
23- Relojes de sol a ocular y/o a cruz por Yves Opizzo : Presentación y vuelta de experiencia en la realización de relojes de sol a ocular y/o a cruz luminosa.	253
24- Oculares y agujeros gnomónicos por Jean-Michel Ansel : Investigación léxica y ensayo sobre el diámetro de los oculares. Dos ejemplos de realización, una meridiana de pleno aire con oculus triplica y un “ <u>Helioscaphe</u> ” a alidada.	286
OCULARES y WEB	
25- Lugares relativos a los oculares investigaciones de Philippe Sauvageot : Presentación y direcciones de sitios web relativa la sombra y penumbra, los oculares, el empleo del « <u>sténopé</u> », etc.	295
PHOTOGRAPHIES	
26- Fotografías y oculares por Philippe Sauvageot et Serge Grégori para la selección de las fotografías : Presentación distintos apoyos, discos y oculares, ilustraciones fotográficas.	312



GB Contents Cadran Info Spécial 2012

1- Sommaire en allemand, anglais, espagnol et italien traduction de R. Kriegler ; M. Lambalieu D. Collin; L. de Dinechin.	3
SHADOW and PENUMBRA	
2- Property of shadow by Gianni Ferrari (CI 16) : How shadow and penumbra of an object take form. Impact of the outline and size of a “ style” or a “ gnomon” on the quality of the induced projected umbra they create.	14
3- Shadow and penumbra of a rectilinear element by Gianni Ferrari (CI 22) : Comments concerning shadow and penumbra related to the design of a sundial style	44
4- “Camera obscura” sundial by Gianni Ferrari (CI 21) : Description and errors analysis which can appear regarding classical camera obscura sundial. Included are mathematical relations to calculate some fundamental parameters of the sundial.	52
5- Image of the sun by Gianni Ferrari (CI 21) : Remarks on the dimension , the position and the shape of the eyepiece of darkroom sundials. Image of the projected sun. Calculations of the diameter of the eyepiece .	63
6- Shadow and penumbra by Denis Savoie (CI 9) : Induced errors due to shadow and penumbra phenomena for a linear style and how to avoid them .	81
7- The “shadow sharpener” by Gianni Ferrari (CI 22) : Use of the “shadow sharpener” or “shadow intensifier” instrument in order to visualize the separation between shadow and penumbra created by a distant object illuminated by the sun.	87
8- Use of the stenope by Roland Trotignon : About the use of a stenope , peculiar instrument used during the Yuan Chinese dynasty (1271-1368) on the gnomon of large dimension.	103
THEORY about the projected spot	
9- The projected luminous spot by Gérard Baillet ☐ : Determination of the diameter of an eyepiece taking into account the angular dimension of the sun, the diffraction, the distance between the eyepiece and the sundial table...everything that one’s want to know about this subject.	109
9 bis- Reminder of theoretical research	128
10- New note concerning the Toroïde by Dominique Collin : Description of M. Dallet “ocellés”(shadow created by a disk parallel to the horizontal sundial) which are toroïdes . Their equations are given.	166
EYEPIECES and FORMULAS	
11- Eyepieces and luminous spot by Marc Goutaudier (CI24) : Vectorial formulas of the shape and the dimensions of a luminous spot coming from a tilted declining circular eyepiece creating shadow and penumbra on an horizontal plane	173
12- Eyepiece and luminous spot by Denis Savoie (CI24) : Trigonometrical formulas of the shape and the dimension of a luminous spot created by a circular eyepiece with a sun of apparent diameter .	183
13- Meridian sundial with Loupian’s elliptical eyepiece by Denis Savoie 5corrected (CI 24 corrected) : Trigonometrical formulae of the shape and the dimension of an elliptical eyepiece projecting a circular luminous spot during equinoxial days.	192

SOFTWARE and PROGRAMS	
14- Luminous spot programming by Sébastien Bérriot ☐ : Excel program allowing to automatically calculate the dimensions of projected spots (software translation of Denis Savoie's formulae.	196
15- Sharp strait edge of a vertical style by Pierre Joseph Dallet ☐ : Study of the shadow and penumbra created by the apex of a vertical style. AlgoSola software version including these phenomena.	199
DESCRIPTIONS of some EYEPIECES	
16- Eyepieces of the world (referring to Madame Andrée Gotteland's book "meridians of the world and their history) : Non –comprehensive abstracts regarding eyepieces associated to meridians	207
17- The eyepiece of Nanjin by Roland Trotignon : Description of the eyepiece exhibited at Nanjing(Nankin) Observatory built in 1446 and modified in 1744.	219
18- Standard eyepieces by Maurice Kieffer : Characteristics of industrial meridians of the XIX th .	223
19- Heliochronometer and eyepieces by MM Paul Gagnaire, Michel Brialix, Philippe Sauvageot : Examples of eyepieces associated to heliochronometers.	226
20 - The meridian of Paris and its eyepieces by Pascal Deschamps and Samira Barouche : Description of the meridian at Paris Observatory , its successive eyepieces, of the projection of the spot of the sun.	231
21- photographic lens induces the end of eyepieces by Michel Vercasson : Use of a photographic lens instead of an eyepiece for an heliochronometer.	241
SUNDIAL MAKERS feedback experiences	
22- The meridian of Villers sur Mer by Denis Savoie : (L'Astronomie n° 47 février 2012) : Making of an internal meridian with a border-line curve which flanks the luminous spot situated at each side of the meridian to allow a more precise reading.	245
23- Sundial with eyepieces and/or with a cross by Yves Opizzo : Information and experience feed-back when designing sundials with eyepiece and/or with a luminous cross.	253
24- Eyepieces and gnomonic holes by Jean-michel Ansel : Lexical search and first consideration on the diameter of eyepieces . Two samples of design : a meridian in open air with triple oculi and an helioscaphe with alidade.	286
EYEPIECES and WEB	
25- WEB-sites about eyepieces, searched by Philippe Sauvageot : Presentation and WEB addresses of sites about shadow and penumbra, eyepieces, stenope use, and so on	295
PHOTOGRAPHIES	
26- Pictures and eyepieces by Philippe Sauvageot and Serge Gregori for pictures selection : display of several media , eyepieces and discs.	312



I Sommario Cadran Info Spécial 2012

1- Indice in tedesco, inglese, spagnolo e italiano traduzione di R. Kriegler ; M. Lambalieu ; D. Collin ; L. de Dinechin.	3
OMBRA & PENOMBRA	
2- Proprietá dell'ombra da Gianni Ferrari (CI 16) : Fenomeno di formazione dell'ombra e della penombra di un oggetto. Influenza della forma e delle dimensioni di uno stilo o gnomone sulla qualità del ombra che forma.	14
3- Ombra e penombra di un elemento rettilineo da Gianni Ferrari (CI 22) : Osservazioni relativi all'ombra e alla penombra di un elemento rettilineo riportato alla problematica di uno stilo di meridiane.	44
4- Meridiana a camera oscura da Gianni Ferrari (CI 21) : Presentazione e analisi delle errori che si possono scoprire nel caso di una meridiana classica a camera oscura. Rilazioni matematiche per il calcolo di alcuni parametri fondamentali delle meridiane.	52
5- Imagine del sole da Gianni Ferrari (CI 21) : Considerazioni sulla dimensione, la posizione e la forma del foro delle meridiane a camera oscura. Imagine proiettata dal sole. Calcoli del diametro del foro gnomonico.	63
6- Ombra e penombra da Denis Savoie (CI 9) : Errori provocate dai fenomeni di ombra e di penombra di uno stilo rettilineo, e come si puo correggere.	81
7- Il shadow sharpener da Gianni Ferrari (CI 22) : Utilizzazione del "Shadow Sharpener" o « amplificatore di ombra », strumento che permette di visualizzare la linea di separazione tra l'ombra e la penombra prodotta da un oggetto lontano illuminato dal sole.	87
8- Utilizzazione del "sténopé" da Roland Trotignon : Utilizzazione del "sténopé", strumento eccezionale della dinastia cinese Yuan (1271 – 1368), sui gnomoni di grande dimensioni.	103
TEORIA macchia luminosa proiettata	
9- La macchia luminosa proiettata da Gérard Baillet : Determinazione del diametro di uno schermo forato, prendendo conto della dimensione angolare del sole, la diffrazione, la distanza tra lo schermo e il quadrante, ecc... Tutto quello che si vorrebbe sapere.	109
9 bis- Promemoria di ricerca teorica	128
10- Nuove note sulla toroida da Dominique Collin : Descrizione dei "ocellés" (ombra di un disco parallelo ad un piano orizzontale) del Sig. Dallet che sono toroidi, la quale equazione viene determinata.	166
GNOMONI FOTOSCIATERICI e FORMULE	
11- Fori gnomonici e macchie luminose da Marc Goutaudier (CI24) : Formule vettoriele della forma e della dimensione della macchia luminosa formata dal foro eliotropico inclinato declinato, formando ombra e penombra su di un piano orizzontale.	173
12- Foro gnomonico e macchia luminosa da Denis Savoie (CI24) : Formule trigonometriche della forma e della dimensione del'ellisse luminosa formata dal foro gnomonico con sole di diametro apparente.	183

13- Meridiane a foro gnomonico ellittico di Loupian da Denis Savoie (CI 24 corretto) : Formule trigonometriche della forma e della dimensione di un foro gnomonico ellittico provocando macchia luminosa circolare all'equinozio.	192
SOFTWARE e PROGRAMMI	
14- Programma macchia luminosa da Sébastien Bérriot ☒ : Software sotto Excel per il calcolo automatico della dimensioni delle macchie luminose proiettate (formule degli articoli 10 et 11 da D. Savoie).	196
15- Punta di ortostilo da Pierre Joseph Dallet ☒ : Studio dell'ombra proiettata e della penombra della punta di un ortostilo. Versione del suo software AlgoSola integrando questi fenomeni.	199
DESCRIZIONI di GNOMONI FOTOSCIATERICI	
16- Gnomoni fotosciaterici del mondo (riferimento al libro della Signora Andrée Gotteland « <i>Les méridiennes du monde et leur histoire</i> ») : Estratti non esaurienti a proposito delle caratteristiche di schermi forati associati a delle meridienne.	207
17- Lo schermo forato di Nanjing da Roland Trotignon : Descrizione del gnomone presentato a l'Osservatorio di Nanjing (Nankin), costruito nel 1446, poi modificato nel 1744.	219
18- Schermi foratidi seria da Maurice Kieffer : Caratteristiche dei fori gnomonici delle meridiane industriale del XIX	223
19- Cronometri solari e fori gnomonici dai Sig. Paul Gagnaire, Michel Brialix, Philippe Sauvageot : Esempi di fori gnomonici associati ai cronometri solari.	226
20 - La meridiana di Parigi e i suoi schermi forati da Pascal Deschamps & Samira Barouche : Descrizione della meridiana dell'osservatorio di Parigi, dei suoi fori eliotropici successivi, della proiezione della macchia luminosa.	231
21- Obiettivi, la fine dei fori eliotropici da Michel Vercasson : Utilizzazione di un obiettivo fotografico per un cronometro solare, invece di un foro gnomonico	241
ESPERIMENTI di GNOMONISTI	
22- La meridiana di Villers sur Mer da Denis Savoie (L'Astronomie n° 47 di febbraio 2012) : Realizzazione di una meridiana interiore la quale linea meridiane viene accompagnata su ogni lato di una curva limitando la macchia luminosa, permettando una lettura più precisa.	245
23- Meridiane a foro eliotropico e/o a croce da Yves Opizzo : Presentazione e feedback nella fabbricazione di quadranti solari a foro eliotropico e/o a croce luminosa.	253
24- Schermi forati e fori gnomonici da Jean-Michel Ansel : Ricerca lessicale approccio sul diametro dei fori gnomonici. Due esempi di realizzazioni : una meridiana all'esterno a oculo triplo, ed un scafo solare ad alidada.	286
Fori gnomonici e WEB	
25- Siti sui fori gnomonici ricerche da Philippe Sauvageot : Presentazioni e indirizzi di siti sul tema dell'ombra e la penombra, i gnomoni fotosciaterici, l'uso del "sténopé", etc...	295
FOTOGRAFIE	
26- Foto e fori eliotropici da Philippe Sauvageot e Serge Grégori per la selezione delle foto : Presentazione di diversi modelli, dischi e schermi forati, illustrazioni fotografici.	312

CADRAN INFO

est un moyen de diffusion d'articles gnomoniques, rédigés principalement par les membres de la "commission des cadrans solaires" de la SAF.

Il vient en complément des publications de la **Société Astronomique de France** : "L'Astronomie" avec son article mensuel concernant les cadrans solaires et "Observations & travaux" qui présente épisodiquement des sujets concernant la gnomonique.

CADRAN INFO regroupe la majorité des présentations faites lors de nos deux réunions annuelles ainsi que des articles reçus en cours d'année.

CADRAN INFO est devenu au cours des années UNE référence d'études, de techniques, de méthodes, pour certaines totalement inédites.

CADRAN INFO paraît en mai et en octobre sous forme: papier (N&B ou en couleurs) et CD (les N° 1 à 5 sont des fac-similés numérisés des tirages papier).

A partir du N°11, la version CD comprend des annexes (logiciels, documents...)

La liste des articles parus depuis le premier numéro est disponible sur demande.

Dans un souci d'échanges de connaissances et d'informations, **CADRAN INFO** est offert aux autres associations gnomoniques (Allemagne, Angleterre, Autriche, Belgique, Canada, Espagne, Hollande, Italie, Japon, USA, Suisse).

Ph. Sauvageot

Président de la Commission des cadrans Solaires

- ◆ Les articles sont présentés par ordre alphabétique des auteurs (ou en fonction de la composition du bulletin). Le contenu est sous la responsabilité de l'auteur.
- ◆ Les articles³ sont à envoyer à Ph. Sauvageot par mail ou sur CDrom/DVD PC (Word, Excel, **PAS DE PDF**), éventuellement sur papier. Certains sujets pourront être repris dans "L'Astronomie" ou "Observations & Travaux".
- ◆ Les auteurs doivent obligatoirement indiquer leurs sources et/ou références si le sujet a déjà fait l'objet d'articles ou de communications récents.
- ◆ Toute reproduction totale ou partielle des présents articles ne peut se faire qu'avec l'accord des auteurs.
- ◆ Les articles, documents, photos... ne sont pas retournés aux auteurs après publication.
- ◆ Pour tout renseignement:

Ph. SAUVAGEOT, 7, rue de Gloriette, 91640 Vaugrigneuse sauvageotph@wanadoo.fr
ou au secrétariat de la SAF, 3 rue Beethoven 75016 PARIS

Nos articles ou informations ne présentent aucun caractère publicitaire.

³ Police: Times New Roman, taille : 12, marges : 2,5



Propriétés de l'ombre

Gianni Ferrari, traduction G. Ferrari et A. Gotteland

Est présenté ici le processus de formation de l'ombre et de la pénombre d'un objet, sa luminosité, les conditions nécessaires pour obtenir une ombre parfaitement nette et celles pour obtenir cet effet. Puis, sont examinés différents profils et dimensions de "style" ou de "gnomon" et leur incidence sur la qualité de l'ombre qu'ils projettent.

Cette étude a été présentée lors du XIV^e Séminaire National de Gnomonique de Chianciano (SI) des 6,7,8 octobre 2006

Introduction

Si par une journée ensoleillée nous regardons le sol sous un groupe d'arbres couverts de feuilles, nous pouvons voir des taches de lumière plus ou moins brillantes, plus ou moins grandes qui interrompent l'obscurité de la zone ombragée. Si nous observons plus attentivement ces taches nous pourrions voir que certaines d'entre elles ont une forme presque elliptique, que les plus lumineuses ont le bord plus net et les moins lumineuses un bord plus dégradé, moins défini.

Les taches de lumière sont produites par les rayons du Soleil qui traversent les petits trous du feuillage et que nous pouvons voir clairement comme des points brillants entre les feuilles en levant les yeux¹.

La cause de ce phénomène, connue de tous les gnomonistes, est que le disque du Soleil présente un certain diamètre et que notre astre ne peut donc être assimilé à une source ponctuelle de lumière.

En raison de ce diamètre "fini" du disque solaire, l'ombre de tout objet est entourée par une bande de pénombre, plus ou moins accentuée et à cause de cela le contour d'une ombre produite par le Soleil n'est jamais net mais voilé, vague, de limite incertaine.

Un autre exemple qui nous montre l'effet de la dimension finie du disque solaire est l'ombre d'un bâton vertical qui se présente très obscure et bien définie près de son pied et devient, en s'éloignant de lui, moins lumineuse avec des contours nébuleux. Si nous regardons notre ombre, en particulier quand le Soleil est bas, nous verrons que nos chevilles sont bien dessinées, tandis que notre tête devient plus petite mais aussi moins sombre.

Ombre et pénombre²

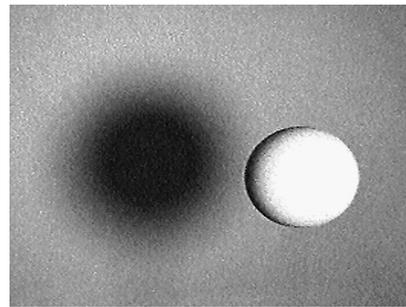
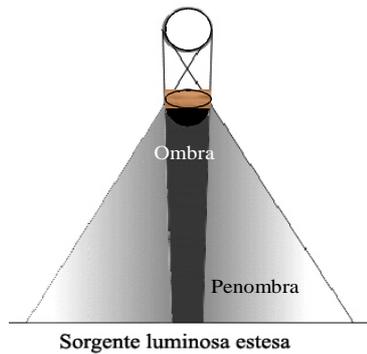
L'ombre d'un objet est le volume compris entre l'objet éclairé et une surface (écran) dans lequel il n'est pas possible de voir le Soleil. L'intersection de ce "volume d'ombre" avec une surface (écran) forme une tache bidimensionnelle communément appelée "ombre". Elle est formée par l'ensemble des points qui ne reçoivent pas les rayons du Soleil, c'est-à-dire des points à partir desquels nous ne pouvons pas voir le soleil si nous regardons vers lui.

Au contraire, la pénombre est la zone qui ne reçoit que partiellement les rayons du Soleil. Elle est formée par l'ensemble des points à partir desquels il est possible de voir seulement une portion du disque du Soleil.

Quand nous nous éloignons du point central de l'ombre, nous observons une partie toujours plus grande du soleil, "l'obscurité" de la pénombre diminue en conséquence.

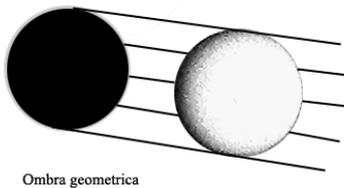
¹ Si nous mesurons les axes (a, b) d'une tache lumineuse quasi elliptique que nous voyons sur le terrain et si nous prenons Φr comme diamètre (en radian) du Soleil: (1/107.5) et h sa hauteur par rapport à l'horizon, nous aurons alors $a = \Phi r * L$ et $b = a / \sin(h) = a * L / H$ à partir desquels on peut facilement calculer la distance L du centre de la tache lumineuse au trou dans la ramure des arbres qui la produit et la hauteur H de ce trou. Cet exemple est repris dans [1] de la bibliographie.

² Dans le texte, je me réfère toujours à l'ombre produite par le Soleil, même si elle n'est pas spécifiquement indiquée.



Ombre géométrique

Dans certains cas, il est plus facile de considérer "l'ombre géométrique" définie comme l'ombre qui serait produite par un Soleil ponctuel, c'est-à-dire si son disque, sans diminuer en luminosité, se réduisait à son centre.



Ombre géométrique

L'ombre géométrique d'un objet a exactement la même forme que l'objet lui-même s'il est regardé depuis la source lumineuse, (depuis le soleil)l. L'ombre dans ce cas a un contour net, privé de pénombre.

Par exemple, on peut considérer comme source presque ponctuelle un petit miroir qui reflète les rayons solaires et a un diamètre d'une centaine de fois moindre que sa distance à l'objet illuminé. D'autres exemples de source ponctuelle sont les rayons réfléchis parfois par une fenêtre lointaine, ou par les parties chromées d'une voiture³.

Puisqu'il n'est pas possible de définir exactement où se termine l'ombre d'un objet simplement par une définition ou un calcul, on utilise l'ombre géométrique comme limite, même si, de cette façon, on "élargit" l'ombre vraie. Pour observer le "bord" de l'ombre géométrique, on peut utiliser un "videur d'ombre" ou "shadow sharpener"⁴.

Si le Soleil était une source ponctuelle, il n'y aurait jamais de pénombre et les choses seraient bien différentes. Par exemple, les taches lumineuses au sol, sous les arbres, seraient toutes de petites dimensions, elles auraient des formes toutes différentes et une grande luminosité. L'ombre d'un poteau aurait une largeur exactement égale au diamètre de celui-ci avec des bords nets et parallèles entre eux. Chaque objet, même petit, comme une mouche, une bande de moucherons ou un oiseau dans le ciel, donnerait sur le terrain une ombre nette et bien visible. Enfin une personne illuminée par le Soleil, sur laquelle les ombres du nez et des sourcils sont adoucies par la pénombre, aurait un aspect très "dur" avec des parties claires et de parties obscures, sans aucune perte d'intensité de lumière entre elles.

Comment se forme une ombre ?

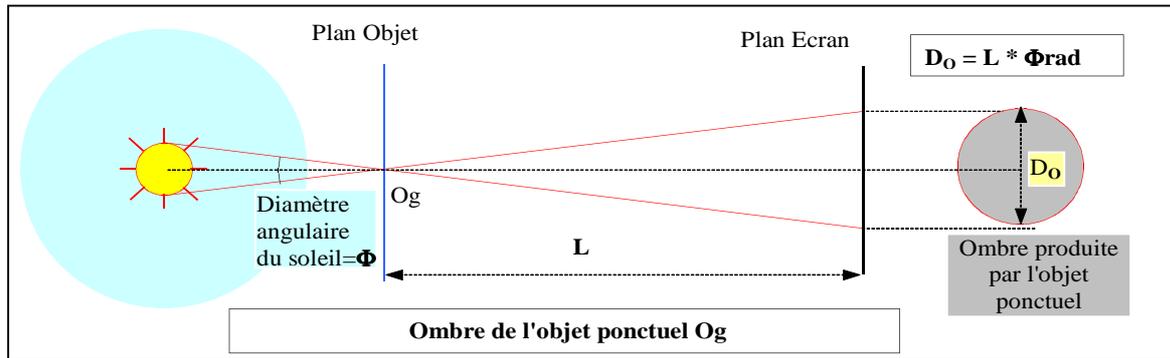
L'étude de l'ombre d'un objet sur un mur, produite par le Soleil, est identique à l'étude de l'image produite par un trou illuminé par le Soleil. L'unique différence vient du fait que, dans le cas de l'ombre, on a une absence au lieu d'une présence de lumière.

³ Peut être considéré comme source ponctuelle un miroir éloigné de l'objet illuminé d'environ 1070 fois son diamètre et qui montre un diamètre apparent (vu de l'objet) d'environ 1/10 de celui du Soleil. Exemple: un miroir de 3 cm de diamètre, placée à 32 mètres de distance.

⁴ Un Shadow Sharpener est un dispositif qui permet de visualiser l'ombre d'un objet lointain sans être perturbé par la pénombre. Le plus simple SS est constitué essentiellement d'un trou « stenopecico » qui projette l'image du Soleil et celle d'un objet placé entre le Soleil et l'observateur. [2]

Ombre d'un objet ponctuel

Considérons un objet de dimensions infinitésimales et pratiquement négligeables (un petit insecte par exemple) et un écran opaque situé à une distance L très grande et que par souci de simplicité nous supposons perpendiculaire aux rayons provenant du centre du Soleil.



Les lois de l'optique géométrique permettent de construire facilement l'aspect de l'ombre produite sur l'écran par l'objet quand il est éclairé par le Soleil.

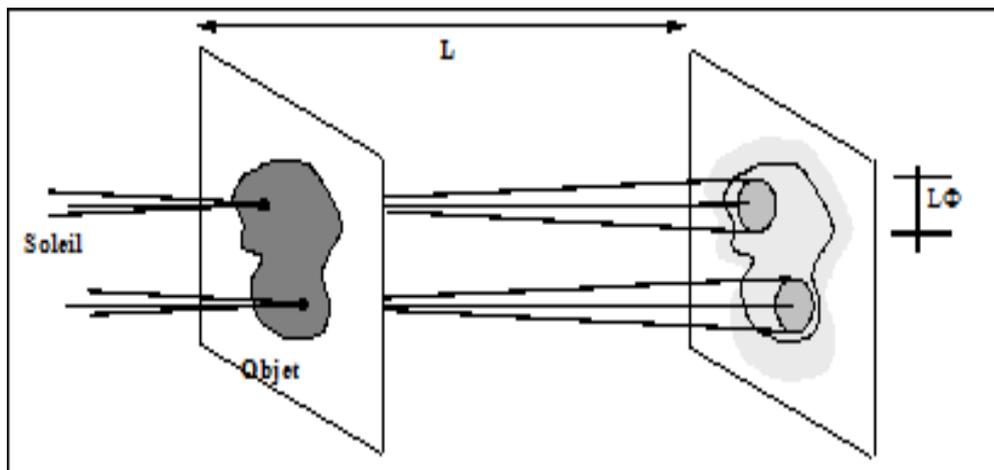
En théorie, l'ombre est en effet parfaitement circulaire et presque impossible à distinguer de la zone qui l'entoure et qui se trouve en plein Soleil. Cela est dû à la très petite quantité de lumière qui est "bloquée" par l'objet (nous pourrions dire, en utilisant une expression facilement compréhensible, que l'ombre aura une très petite "obscurité")⁵.

Le diamètre moyen du Soleil étant d'environ $32'$, c'est-à-dire : $\Phi = 1/107,5$ radians⁶, le diamètre de l'ombre circulaire sera $D_o = \Phi * L = L/107,5$ (1)

Ombre d'un objet de dimensions finies

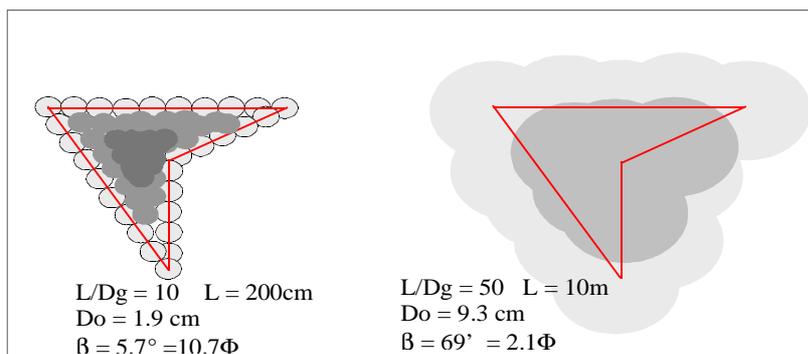
Nous cherchons maintenant à déterminer l'aspect de l'ombre d'un objet de dimensions finies et de forme quelconque, en imaginant de le diviser en de nombreuses parties de très petites dimensions ("points") et en trouvant l'ombre élémentaire produite par chacune d'elles.

De la superposition de cette infinité d' "ombres élémentaires", on obtient à la fin la forme et les caractéristiques de l'ombre de l'objet fini.



⁵ En réalité celle que nous avons appelée "ombre" est un disque complètement dans la "pénombre" puisqu'il n'existe aucun point chez elle depuis lequel on peut observer le disque du Soleil complètement obscurci.

⁶ La valeur 107,5, utilisée ici et dans beaucoup d'autres formules ou d'exemples, est l'inverse du diamètre moyen du Soleil, exprimé en radians et correspond à $32'$. C'est la valeur moyenne du diamètre du soleil durant l'année. Dans certains textes, pour des résultats purement indicatifs, cette constante fondamentale est donnée par la valeur : 100 ($34.4'$), commode pour la simplicité des calculs : 107 ($32.1'$), 108 ($31.8'$), 114-115 (environ $30'$). Cette simplification ne conduit pas à des erreurs importantes.



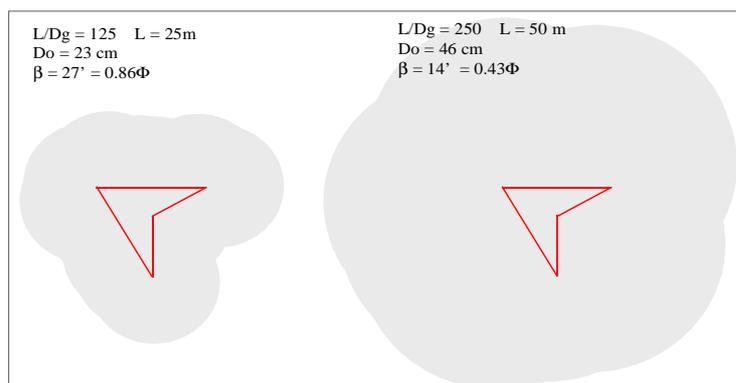
L'ombre d'un "point" quelconque de l'objet aura une forme parfaitement circulaire, nette et précise, mais d'une "obscurité" infinitésimale. Son centre se trouve dans le point dans lequel le rayon lumineux passant par lui

et le centre du soleil, rencontre l'écran.

Une seconde petite parcelle, ayant une position différente de la précédente, produira une nouvelle ombre, nette elle aussi, dont le "point" sera légèrement déplacé par rapport au premier; ainsi de suite.

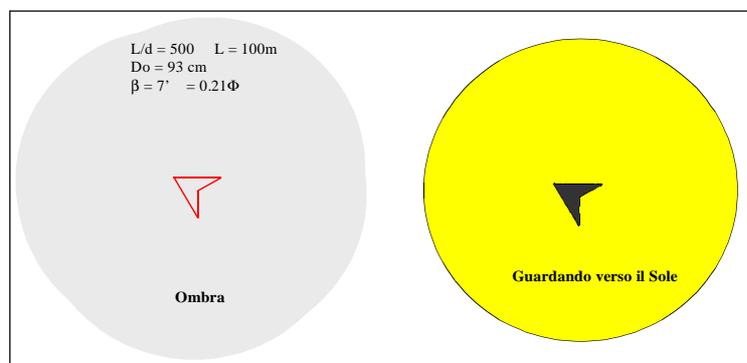
Si nous examinons seulement les petites zones qui se trouvent sur la périphérie de l'objet, on peut obtenir une approximation simplifiée et de bonne qualité de l'ombre donnant la forme d'ensemble de l'objet, même si nous n'avons pas d'information sur "l'obscurité" des différentes parties.

Dans les figures représentées, les ombres sont produites par un objet irrégulier en forme d'un oiseau stylisé, sur la base du rapport entre la distance "L" (entre l'objet et le mur), de la dimension principale "Dg" de l'objet même ou, ce qui est la même chose, à la croissance du diamètre "Do" de l'ombre d'un "point" par rapport aux dimensions de l'objet.



Les valeurs numériques dans les figures se réfèrent à une dimension principale de l'objet "Dg" d'environ 20 cm (la largeur de cette feuille ou de celle d'une colombe en vol). L'angle "beta" est l'angle sous lequel l'objet est vu en regardant du centre de l'ombre. Quand cet angle devient inférieur au diamètre apparent du Soleil, cela signifie que l'objet ne

"couvre" pas entièrement le disque solaire et donc que la zone au centre de la tache (l'ombre) et en fait dans la pénombre car en partie illuminée directement par le soleil.



Dans les figures, les cercles élémentaires qui composent l'image représentent l'ombre d'un "point" de l'objet.

Un observateur mettant l'œil sur l'écran verrait le disque du Soleil avec les dimensions d'un de ces cercles et l'objet avec les dimensions de la figure stylisée. L'angle $\beta = d/L$ est

l'angle d'où se voit le côté de la figure. Nous pouvons donc affirmer comme conclusion au niveau qualitatif, que:

- si la distance écran-objet est petite, l'ombre est bien définie et elle a la forme de l'objet.

- si cette distance augmente (tout en restant inférieure à environ 100 fois la dimension de l'objet), l'ombre a une forme qui rappelle encore celle de l'objet, mais commence à être peu définie.

- quand enfin la distance écran-objet dépasse d'environ 200 ou 300 fois la dimension de l'objet, la tache d'ombre prend une forme qui s'approche toujours plus d'un cercle. Elle devient plus claire et en s'éloignant encore, elle n'est pratiquement plus visible puis disparaît complètement.

Dimensions et illuminations de l'ombre-pénombre

Pour étudier quantitativement les caractéristiques de la tache obscure projetée sur un écran par un objet frappé par les rayons solaires et pour voir comment varient les dimensions de l'ombre et de la pénombre ainsi que le niveau "d'obscurité", il faut prendre en considération la luminosité de l'écran dans plusieurs parties de cette zone et dans la zone en plein Soleil.

Considérons seulement deux objets élémentaires mais importants en gnomonique: une sphère ou un disque circulaire normal aux rayons du soleil et une pointe cylindrique très allongée⁷. Prenons :

- **L** : la distance entre l'objet et l'écran

- **Do** : le diamètre de l'ombre théorique produite par un point. La formule (1), nous donne :

$$Do = \Phi * L = L / 107,5$$

- **Dg** : le diamètre de l'objet (diamètre de la sphère du disque ou du cylindre allongé). Ce diamètre, vu d'un point de l'ombre, a la valeur $Dg' = 3437,7 * (Dg / L)$ en minutes.

- **Jo** : la valeur de l'illumination due au Soleil sur un écran perpendiculaire aux rayons solaires. Cette grandeur varie beaucoup en fonction des saisons, de l'heure et de la latitude. Dans les calculs, on utilise la valeur de 100 000 lux (lumen/mq) valable en été, à nos latitudes avec un ciel dégagé et le Soleil à une hauteur d'environ 60-70°. Pour un Soleil plus bas ou légèrement voilé on peut prendre la valeur: $J0 = 60\ 000$ lux.

- **Jd** : l'illumination indirecte qui coïncide avec l'illumination des zones dans l'ombre (vraie). Jd provient principalement de la lumière diffusée par la partie libre du ciel, visible de la zone considérée de l'écran, par la lumière réfléchie, par les nuages et par les parois d'éventuels édifices aux alentours, etc. Sa valeur peut varier. Tout dépend de la limpidité du ciel, de la situation atmosphérique du moment (nuages), de la présence de végétation qui empêche une vision directe d'une partie de la voûte céleste, ou enfin de la situation urbaine locale (parois des édifices environnants, caractéristiques de réflexion et couleurs des surfaces, etc.).

Les valeurs typiques sont: 15 000-20 000 lux environ⁸. A l'intérieur d'églises, les valeurs de Jd varient en général de 1/10 à 1/100 des valeurs de $J0$. Dans un local complètement obscur, on a évidemment $Jd = 0$.

Dans les exemples, on utilise toujours la valeur de 20 000 lux.

- **B** : angle entre la perpendiculaire à l'écran et les rayons du Soleil

- **f** : fraction du disque solaire qui apparaît obscurcie par l'objet en regardant vers le soleil à partir d'un point de la zone dans l'ombre/pénombre. Par définition, pour les zones en pleine ombre, on a $f = 1$, tandis que pour les zones en plein Soleil, c'est évidemment $f = 0$.

- **Jom** : illumination des points dans la zone dans l'ombre, d'où on ne voit aucune partie du disque solaire. On a : $Jom = Jd$.

- **Jpem** : illumination des points de la zone en pénombre, d'où l'on voit la fraction "f" du disque solaire. On a:

si la superficie de l'écran est perpendiculaire aux rayons du Soleil :

$$Jpem = Jo * (1 - f) + Jd \quad (2).$$

Dans le cas où les rayons sont inclinés par rapport au mur :

⁷ Comme expliqué à la fin de cette note, je suppose toujours que la superficie de l'écran a des caractéristiques de réflexivité isotrope.

⁸ En annexe-A, sont donnés des indications et des graphiques concernant les valeurs de : $J0$ et de : Jd .

$$J_{pen} = J_o * (1 - f) * \cos(\beta) + J_d \quad (3)$$

- J_s : Illumination des points qui sont en plein Soleil : $J_s = J_o * \cos(\beta) + J_d$ (3b)

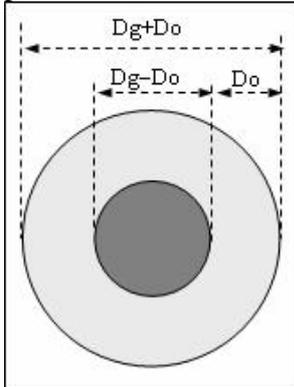
On peut distinguer quatre cas :

- a) La distance L est : $D_o < D_g$, c'est-à-dire : $L < 107.5 * D_g$
- b) La distance L : $D_o = D_g$, c'est-à-dire : $L = 107.5 * D_g$
- c) La distance L : $D_o > D_g$, c'est-à-dire : $L > 107.5 * D_g$
- d) L est très grande

Dans les trois premiers cas, la zone obscure a une forme circulaire (cas de la sphère) ou allongée avec un diamètre/largeur total égale à $(D_g + D_o)$.

Dans le premier cas (a), on a depuis les points dont on voit l'objet, une zone centrale d'ombre crue, qui recouvre entièrement le disque du Soleil et qui a un diamètre de $D_g - D_o$.

Cette ombre est entourée par une bande de pénombre de largeur D_o , dans laquelle la luminosité varie de J_d (zone dans l'ombre) à J_s (plein Soleil). Dans chaque point de la pénombre, la valeur de l'illumination peut être calculée avec la formule (3).

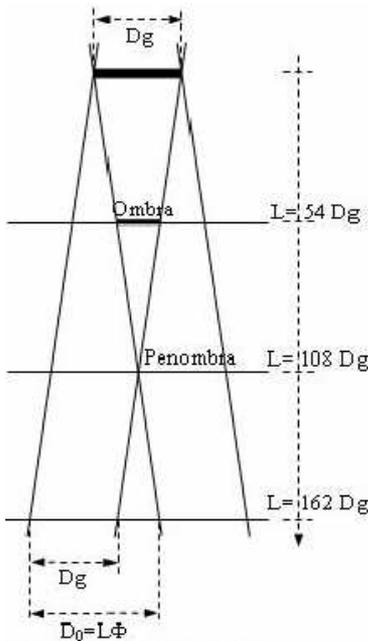


En éloignant l'écran, la zone dans l'ombre diminue, jusqu'à disparaître quand le diamètre apparent de l'objet devient égal à celui du Soleil ($L = 107,5 D_g$) (cas b).

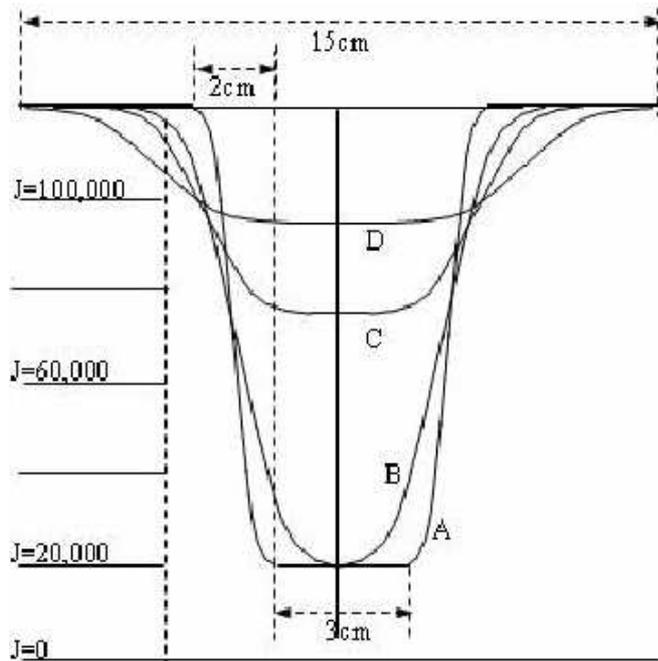
En éloignant encore l'écran de l'objet la "tache" obscure produite n'est plus constituée que de pénombre. (cas c). La zone partiellement obscure augmente et présente une zone centrale de plus grande "obscurité", de diamètre $(D_o - D_g)$, entourée par une bande de largeur D_g dont la luminosité augmente jusqu'à celle de la zone externe en plein Soleil.

Si enfin la distance augmente en dehors des valeurs précédentes (cas d), la luminosité de la zone ombragée devient comparable à celles des zones en plein Soleil qui l'entourent, avec la conséquence de ne plus être visibles.

L'illustration qui suit, représente schématiquement la section des rayons solaires et les zones d'ombre et de pénombre. Pour clarifier le dessin, on a grandement exagéré l'angle Φ :



Largeur des zones d'ombre et pénombre en fonction de la distance



Largeur et luminosité de l'ombre et de la pénombre

Dans l'illustration ci-dessus à droite, les courbes d'illumination sont représentées avec un disque de diamètre $D_g = 5\text{cm}$. Les valeurs relatives aux différents cas sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Cas	L - cm	L=kD k	$D_0=L\cdot\Phi$	Diam. de l'ombre	Largeur bande pénom.	Zone centrale pénom.	Bande extérieure pénom.	Diam. total tache	f % couverte	Illumin. zone centrale	Contrast
A	215	43	2.0	3	2	-	2	7.0	100	20000	0.83
B	540	108	5.0	0	5	-	5	10.0	100	20000	0.83
C	810	162	7.5	-	-	2.5	5	12.5	44.0	76000	0.37
D	1080	216	10.0	-	-	5	5	15.0	24.7	95000	0.21
E	2000	400	18.6	-	-	13.6	5	23.6	7.2	112800	0.06
F	3000	600	27.9	-	-	22.9	5	32.9	3.2	116800	0.27
G	3500	700	32.6	-	-	non visible	non visible	non visible	2.3	117600	0.02

Dans ce tableau on peut voir que, lorsque l'ombre vraie disparaît (cas B et suivants), le contraste entre la zone centrale de la tache et la zone éclairée par le Soleil diminue radicalement. Pour une valeur de contraste de l'ordre de 0,02 la tache d'ombre-pénombre n'est plus distinguable, comme nous le verrons par la suite.

Les deux cas extrêmes.

En se limitant aux deux cas extrêmes (A et G de la table), nous cherchons quelles sont les conditions pour avoir soit une ombre vraie, c'est-à-dire une tache centrale la plus obscure possible, soit la totale visibilité du phénomène, c'est-à-dire la complète "disparition" de la tache entière.

Ces deux cas extrêmes se présentent aussi en gnomonique où il est fondamental que l'ombre du style ou du gnomon qui indique l'heure sur le cadran solaire soit bien visible par rapport à la zone qui l'entoure et où, dans certains cas, il faut connaître les limites de visibilité de l'ombre même, spécialement pour bien déterminer les dimensions des constituants du cadran. J'examinerai d'abord ce cas limite.

La fraction du disque solaire obscurcie "f".

Dans le cas d'objets de forme non allongée, on indique "Deq", ou simplement "Dg", le diamètre du cercle ayant la même superficie "Ag" de l'objet (diamètre équivalent). Nous avons tout de suite les relations : $A_g = \Pi/4 \cdot D_{eq}^2$,

$$f = \left(\frac{D_g}{D_0}\right)^2 = \left(\frac{D_g}{\Phi \cdot L}\right)^2 = \left(\frac{D_g/L}{\Phi}\right)^2 = 11556 \cdot \left(\frac{D_g}{L}\right)^2 \quad (4)$$

Si nous connaissons le diamètre de l'objet en minutes d'arc, on a :

$$D_g' = 3437.75 \cdot \frac{D_g}{L} \text{ et donc } f = \left(\frac{D_g'}{32}\right)^2 \quad (5)$$

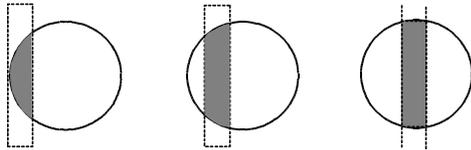
(32' étant le diamètre moyen du disque solaire).

Evidemment on a $f = 1$ quand le diamètre apparent de l'objet est égal à cette valeur ou, ce qui revient au même, quand $L=107,5$ fois D_g .

Par exemple, un disque de 2 cm de diamètre, vu de 5 mètres, couvre 18.5% de la superficie du Soleil et donc $f = 0,185$.

Si l'objet est un élément cylindrique avec une longueur beaucoup plus grande, la fraction "f" du disque du Soleil qui devient obscure varie suivant la position de l'objet devant lui.

On peut le voir simplement ci-après :



Du point central de l'ombre⁹, on a, si $Dg/L \ll \Phi$ c'est-à-dire si $\Phi < D_0$:

$$f = \frac{\Phi \cdot D_g / L}{\pi \cdot \Phi^2 / 4} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{D_g}{D_0} = 136.9 \cdot \frac{D_g}{L} \quad (6)$$

Cette relation pourrait avoir la valeur : $f = 1$ si $Dg/L = 0,79 \Phi$, tandis que la valeur correcte est $Dg/L = \Phi$ ¹⁰. Par exemple la figure en forme d'oiseau schématisé du début de l'article est dans une aire de $0.2886 \cdot a^2$, a étant le côté de l'aire en question. Dans ce cas $f = 7800 \cdot \left(\frac{a}{L}\right)^2$. Pour avoir : $f = 1$, il faut que : $a < L/88$

Le seuil de visibilité – Le contraste

L'impression subjective que nous donne un objet qui présente quelques zones d'intensités lumineuses différentes est fonction du flux d'énergie qui provient de ces zones et des propriétés physiologiques de notre système oeil-cerveau. En d'autres termes, la "sensation" que nous éprouvons en regardant un objet est fonction de la "stimulation", entendue comme "grandeur physique" mesurable qui agit sur nous, et de notre mode de fonctionnement physiologique.

Les études quantitatives du comportement de nos sens, par Weber et Fechner¹¹ vers 1860, montrent que la plus petite variation de l'intensité d'une sensation est provoquée par un changement de stimulation proportionnel à la stimulation même. Pour simplifier, on peut écrire : $\Delta Se = \frac{\Delta St}{St}$ (7)

Si dans la formule (7), on remplace les différences finies par des valeurs infinitésimales, on a : $d(Se) = \frac{d(St)}{St}$ lequel, par intégration, devient $Se = C \cdot \log(St)$ (8) qui est appelée "Loi de Weber-Fechner"¹². La formule (7) perd sa validité pour des valeurs très basses ou très hautes d'illumination.

En ce qui concerne les ombres, la formule (7) montre que, pour percevoir la variation de luminosité entre deux zones, le rapport entre cette différence et la luminosité maximum, c'est-à-dire $\Delta J/J$, doit être supérieur à une certaine valeur "de seuil".

Les théories de la vision et de nombreuses expériences donnent comme valeur "de seuil" chez l'individu moyen: $0.016 = 1.6\% = 1/60$ ¹³. A mon avis, en ce qui concerne les ombres pour les cadrans solaires, cette valeur est très optimiste et doit être augmentée du double. Dans les exemples, je prendrai toujours la valeur : $2.5\% = 1/40$.

Par exemple, si avec une luminosité de 100 000 lux (en plein Soleil) un individu perçoit un changement appréciable quand il y a une variation de $2.5\% = 2\,500$ lux, le même individu réussira à voir une variation de seulement 25 lux si l'illumination maximum est de seulement 1 000 lux (comme dans un bureau).

Nous avons alors pour le contraste: $Contrasto = V = \frac{J_{MAX} - J_{MIN}}{J_{MAX}}$ (9)

⁹ Si le rapport : L/Dg est assez grand, la propriété vaut aussi si l'élément cylindrique n'est pas perpendiculaire aux rayons du Soleil.

¹⁰ La formule exacte, quand l'ombre est centrale, est la suivante :

$f = \frac{2}{\pi} \cdot (\alpha_{rad} + k \cdot \sqrt{1-k^2})$ con $\sin(\alpha_{rad}) = k$ e $k = D_g / D_0$. Par exemple $L=300$ cm et $Dg=1$ cm, on a : $D_0=2.791$, $k=0.3583$, $\alpha_{rad}=0.3665$ $f=0.446$. La formule approximative (6) donnerait : $f=0.456$.

¹¹ Ernst Heinrich Weber (1795-1878) et Gustav Theodor Fechner (1801-1887), tous les deux Allemands, furent des pionniers de la psychologie expérimentale dont les travaux ont inspiré plusieurs scientifiques du XX^e siècle.

¹² Le degré de réponse d'un organe des sens, c'est-à-dire la sensation produite, est proportionnel au logarithme de l'intensité de la stimulation qui a agi sur l'organe.

¹³ Pour les autres sens, ont été trouvées expérimentalement les valeurs minimales suivantes : douleur (chaleur sur la peau) : 1/30, ouïe : 1/10 ; toucher (pression sur un point de la peau) : 1/7; odeur : 1/4; goût (salé) : 1/3.

Pour mesurer la différence de luminosité, c'est-à-dire l'accroissement de la lumière réfléchiée par deux superficies adjacentes, on utilise la notion de "contraste", définie par Weber comme le rapport entre la différence des deux luminosités et la luminosité maximum. Dans le cas des zones dans l'ombre et la pénombre, en supposant que la réflexion de la superficie isotrope est constante dans les deux zones¹⁴, on peut remplacer l'illumination par la luminosité.

Quand on lit un journal (ou cette page), le contraste est de l'ordre de 50-70%. Lire une impression grise sur du papier blanc ou une impression noire sur un papier gris est plus difficile parce que le contraste est moindre. Quand la zone plus obscure est complètement noire, la valeur du contraste est maximum et tend vers 100%, valeur que cherchent à obtenir les oculistes dans les tableaux utilisés pour la mesure de la vue.

La visibilité d'une ombre

Etant donnée l'ombre d'un objet, considérons un point qui lui est externe avec une luminosité J_{max} et un point central d'une luminosité J_{min} . Pour que l'ombre-pénombre soit visible, il faut qu'elle réponde à la formule (9):

$$V = \frac{J_{MAX} - J_{MIN}}{J_{MAX}} > 0.02 = \text{soglia minima (}= \text{limite minimum)}.$$

En se rappelant les précédentes relations (3) et (3b), nous avons:

$$J_{MAX} = J_S = J_0 \cdot \cos(\beta) + J_d$$

$J_{MIN} = J_{Pen} = J_0 \cdot (1-f) \cdot \cos(\beta) + J_d$ dans laquelle f est la fraction du disque solaire "obscurcie" par l'objet et β l'angle entre la normale à l'écran et les rayons du Soleil. Donc, enfin :

$$V_S = \frac{J_{MAX} - J_{MIN}}{J_{MAX}} = \frac{J_S - J_{Pen}}{J_S} = \frac{J_0 \cdot f \cdot \cos(\beta)}{J_0 \cdot \cos(\beta) + J_d} = \frac{f}{1 + \frac{J_d}{J_0 \cdot \cos(\beta)}} > 0.025 \quad (10)$$

qui représente la condition pour que l'ombre d'un objet soit visible¹⁵.

Il faut se rappeler que, lorsque ces conditions extrêmes se rejoignent, la dimension de la zone de pénombre est de beaucoup supérieure à celle de l'objet et sa luminosité de très peu inférieure aux zones illuminées directement par le Soleil.

En particulier, en prenant $J_0=100000$, $J_d = 20000$ et la hauteur du Soleil de 60° .

- Plan normal aux rayons solaires avec $\beta = 0^\circ$: $V_S = \frac{f}{1.2} > 0.025$ da cui $f \gg 1/33$

- Plan vertical tourné vers le Soleil avec $\beta = 60^\circ$: $V_S = \frac{f}{1.4} > 0.025$ da cui $f \gg 1/28$

- Plan horizontal avec $\beta = 30^\circ$: $V_S = \frac{f}{1.23} > 0.025$ da cui $f \gg 1/32$

Objets ayant un aspect circulaire ou carré, avec un diamètre D_g .

Avec la formule (4) $f = 11556 \cdot \left(\frac{D_g}{L}\right)^2$ on calcule immédiatement que la tache d'ombre-

pénombre devient à peine visible quand $D_g > \frac{L}{570} \div \frac{L}{620}$ circa (environ). Dans ces conditions, la zone de pénombre est pratiquement circulaire et possède un diamètre de $L/107.5$, 5 à 6 fois celui de l'objet.

¹⁴ La réflexion de la superficie ne change pas la valeur du contraste entre deux zones puisqu'il modifie, dans la même proportion, la quantité de lumière venant d'elles. Seulement, dans le cas d'une superficie avec très peu de réflexion (noir de fumée, velours noir), les flux lumineux sortis, même s'ils sont encore proportionnels aux illuminations, deviennent très petits et tombent dans le domaine où la loi de W-F n'est plus valide. Dans ces cas, les valeurs sont supérieures aux valeurs reportées dans le texte.

¹⁵ Je rappelle, comme je l'ai déjà écrit, que toutes les valeurs numériques sont approximatives et donc indicatives.

Par exemple, l'ombre d'une mouche, avec une superficie d'environ 15mm² et un diamètre équivalent à 4,3mm, est à peine visible, comme une faible tache obscure d'environ 23 mm de diamètre, si elle est projetée sur un mur placé à plus de 2,5 m. Son mouvement rapide, qui empêche de concentrer notre attention sur la très faible tache produite, fait que cette distance est en réalité, encore très inférieure.

C'est pour ce motif que l'ombre des petits insectes comme un moustique ou un moucheron n'est presque jamais visible sur le terrain, comme celle des oiseaux qui volent très haut. Par exemple encore, l'ombre d'un oiseau aux dimensions d'un pigeon (comme celui schématisé dans les premières figures) n'est plus visible si son altitude est supérieure à environ 100 m (l'ombre-pénombre est un cercle de diamètre d'environ 90 cm) et l'oiseau semble égal à environ 1/40 du diamètre du Soleil.

Objets longs en forme de cylindre ou de hampe.

En rappelant la formule (6): $f = 136.9 \cdot \frac{D_g}{L}$ on sait tout de suite que l'ombre-pénombre d'une hampe devient à peine visible quand $D_g > \frac{L}{4000}$ circa (environ) d'où l'on voit que les ombres de hampes et de fils disparaissent à une distance très supérieure par rapport à ce qui advient avec des disques ou des sphères.

L'ombre d'un fil d'1 mm de diamètre est encore perceptible à la distance de 4m. Dans ce cas, la tache de pénombre rejoint la largeur d'environ 4 cm, c'est-à-dire 40 fois la dimension du fil.

Si nous exposons à la lumière du Soleil une épingle ayant une tête sphérique de 2,9 mm et une tige de 0,6 mm de diamètre et les éloignons du mur où se projettent les ombres, nous constaterons que l'ombre de la tête d'épingle disparaîtra avant celle de la tige, aux distances respectives de 1,8m et 2.4 m environ.

Conditions pour avoir une ombre vraie et "propre"

Puisque $D_0 = \Phi \cdot L = \frac{L}{107.5}$ est non seulement le diamètre de l'ombre produite par un point matériel, mais aussi le diamètre du disque qui, placé à la distance L obscurcit complètement le Soleil, il est nécessaire pour obtenir qu'un objet produise une ombre vraie que L soit inférieure à 107.5 fois sa dimension transversale.

On a alors, comme nous l'avons déjà montré précédemment, la condition pour qu'un objet produise une ombre vraie et "propre" (donc assez obscure et bien visible), c'est-à-dire qu'il doit être placé à une distance de l'écran inférieure à 107,5 fois sa dimension transversale; soit $D_0 < D_g$ ou également $L < 107.5 \cdot D_g$.

Dans ces conditions l'ombre est entourée par une bande de pénombre d'une largeur théorique égale à D_0^{16} . Même si l'ombre vraie "propre" disparaît quand $L \geq 107.5 \cdot D_g$, la pénombre devient bien visible, et possède une forme qui approche celle du profil de l'objet si la distance L est inférieure à environ 150 à 200 fois D_g (cas C et D du tableau).

Les ombres et les gnomons

L'étude de l'ombre de l'élément qui, dans un cadran solaire indique l'heure ou le jour sur la table du cadran, est assez complexe en raison de la variété des cadrans et des gnomons qui projettent l'ombre: hampes/tige, sphères, disques pleins ou percés, pointes de flèche, fils tendus, miroirs, etc. Puisque cet article ne veut donner que des indications sur le

¹⁶ De nombreux tests ont été réalisés par des passionnés de gnomonique, pour déterminer expérimentalement la position dans laquelle est perçue la ligne limite de la pénombre. [3]

De ces résultats on déduit que la pénombre devient "visible" pour environ 60 à 90% de sa largeur. Cette grande incertitude dépend du fait que la valeur de l'illumination "Jd" dépend beaucoup des conditions atmosphériques. En présence de brouillard, ou de nuages blancs la valeur augmente et l'ombre est fortement illuminée ; par conséquent, sa limite "visible" se déplace en s'éloignant de la zone obscure.

comportement de l'ombre et certainement pas remplacer l'expérience des cadraniers, je me limiterai à quelques modèles de "styles/gnomons".

Les gnomons et styles les plus utilisés sont ceux qui, vus du Soleil à différentes heures et saisons, présentent toujours le même "profil" d'ombre et donc une symétrie, au moins autour de l'axe polaire. Ce sont ceux en forme de sphère ("noeud sphérique") et à long corps cylindrique (style-axe ou style polaire).

Je ne considère pas les caractéristiques de l'ombre portée par les "styles droits" car, pour ceux-ci, seule l'ombre de la "pointe", c'est-à-dire le "noeud", est utilisée.

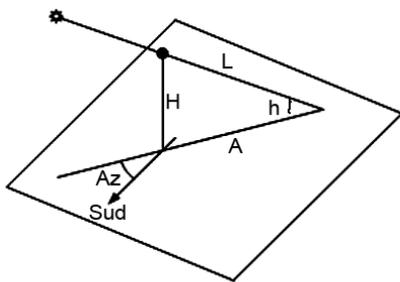
Nœuds Sphériques

Soit un "noeud" constitué d'une sphère avec D_g son diamètre et H sa distance au centre du plan du cadran solaire. Puisque au cours des heures la position du Soleil change dans le ciel, changeront en conséquence soit le point où tombe l'ombre, soit la distance L du noeud au centre du cadran, soit l'angle entre les rayons du Soleil et le plan, soit enfin les dimensions de l'ombre elliptique.

Pour trouver une indication sur la valeur à donner au diamètre D_g , nous devons prendre en considération deux conditions contradictoires:

- d'un côté, le diamètre de la sphère doit être petit pour donner une ombre (elliptique) de dimension non excessive et comparable à la largeur des lignes horaires.

- de l'autre, le diamètre doit être grand pour que, même quand les rayons du Soleil sont très inclinés sur le plan, nous ayons une ombre propre et une tâche obscure facilement observable.



Considérons d'abord un cadran solaire horizontal. En prenant "h" la hauteur du Soleil¹⁷, nous avons:

$$L = \frac{H}{\sin(h)} \quad A = \frac{H}{\tan(h)}$$

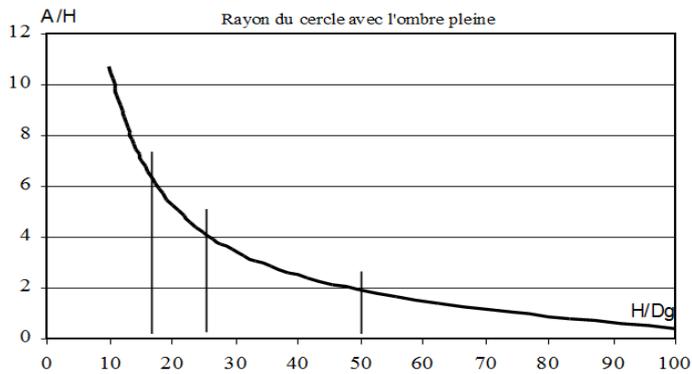
Afin que la sphère produise une ombre vraie elle doit être à une distance: $L \leq 107.5 \cdot D_g$. Dans ce cas, la "tache" produite a une forme elliptique avec une zone centrale (ombre) ayant un petit axe égal à $D_g - D_o$, une bande de pénombre de largeur D_o et donc une dimension totale égale à $D_g + D_o$, où $D_o = L/107.5$.

Les axes de l'ellipse de l'ombre et de pénombre ont entre eux le rapport $1:1/\sin(h)$ et donc, aux solstices, les rapports $1:1,07$ et $1:2,73$. En diminuant la hauteur h du Soleil, la distance L augmente et rejoint la valeur $(107,5 D_g)$ pour laquelle l'ombre propre disparaît pour donner seulement de la pénombre.

Dans ce cas, la "tache" a un petit axe égal à $2 D_g$ et, avec une bonne approximation, le rapport entre les axes devient $1: (A/H)$. En posant $k = \frac{H}{D_g}$ on retrouve la relation suivante qui permet de calculer la distance A_M du pied du style auquel on doit la disparition de l'ombre

$$\text{vraie } \frac{A_M}{H} = \frac{107.5}{H} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{k}{107.5}\right)^2} \quad (11)$$

¹⁷ Sauf si différemment spécifié, je considère la latitude du lieu égale à 45° dans tous les exemples numériques. Dans le cas où le plan est vertical avec h , on indique l'angle entre les rayons du soleil et le plan lui-même.



Le cercle dont l'origine est le pied du style et le rayon AM contient tous les points du c.s. dans lesquels on a une ombre propre. La formule (11) nous indique comment ce rayon varie, changeant le rapport k entre la hauteur de la sphère sur le plan et son diamètre. Son aspect est représenté dans le diagramme ci-dessous : plus petit

est Dg , à parité avec le style droit, plus grande est la zone dans laquelle la sphère donne l'ombre vraie.

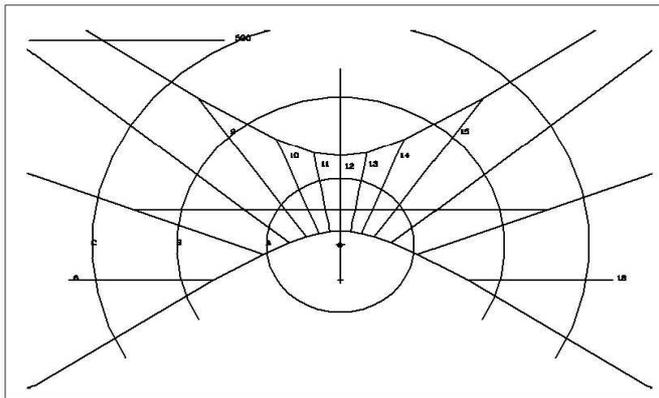
Par exemple avec $H=50\text{cm}$

Dg -cm	1	2	3
k	50	25	16.6
A_M/H	1.9	4.2	6.4
A_M -cm	95	210	318

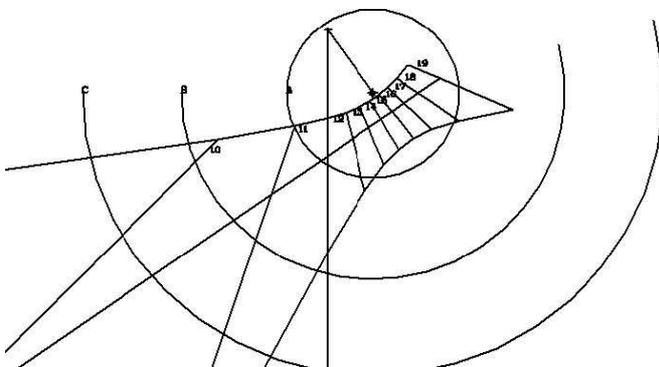
On peut facilement démontrer que la formule (11) convient également pour un cadran vertical ou déclinant. Dans les figures qui suivent, ont été tracés sur le dessin d'un c.s. les cercles avec des rayons égaux aux valeurs A_M de table (indiqués par les lettres : A, B, C). Puisque le cercle B contient pratiquement

toute la zone centrale du c.s. il suffit que le rapport $k=H/Dg$ soit inférieur de 20-30 environ.

Avec cette valeur de k , puisque quand l'ombre tombe sur ce cercle limite les valeurs des axes de la tache-ellipse sont $2Dg$ et $2Dg * (A_M/H)$ environ, nous aurons à l'intérieur de presque tout le c.s. le rapport entre les axes de la tache au maximum de : 1:4 -1:5.



Ce résultat nous amène par exemple à prendre un diamètre de la sphère de $Dg > 1,7-2,5\text{cm}$ si $H=50\text{cm}$ et un diamètre de $Dg > 0,7-1\text{cm}$ si $H=20\text{cm}$. Evidemment en prenant une sphère plus grande l'ombre est meilleure, mais la tache d'ombre devient plus grande également et ce, au détriment d'une lecture précise de l'heure.



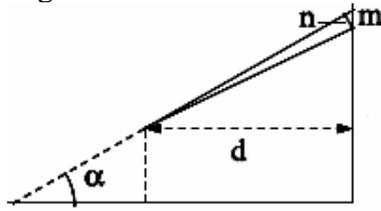
Largeur des lignes horaires et dimension minimale du noeud.

Quand le Soleil est sur la perpendiculaire au plan (comme cela peut advenir avec les cadrans solaires en zones polaires ou avec ceux des localités subtropicales) ou pareillement, sous nos latitudes, à proximité du solstice d'été (cas des cadrans horizontaux) ou à proximité du solstice d'hiver (cadrans verticaux), l'ombre a pratiquement la dimension de la sphère. Il faut alors, pour pouvoir

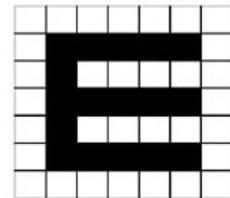
lire l'heure, qu'elle soit bien visible et donc qu'elle ait un diamètre supérieur à la largeur des lignes horaires.

Des critères partagés par tous et qui permettraient de trouver la valeur optimale pour cette grandeur n'existent pas. A mon avis, un critère qui pourrait être adapté est celui qui est utilisé par les oculistes dans les tests de vue et qui est adopté par les opticiens¹⁸.

Il convient de dessiner les lignes de façon que l'observateur voie leur largeur sous un angle de 5'.



Ce "critère" est confirmé par l'expérience, même si l'œil réussit à apercevoir, non sans fatigue et concentration, une ligne ayant une épaisseur peu inférieure; pour avoir une vision "aisée" et immédiate, il faut que l'angle soit au moins de 3 à 7'.



Lettera di un ottotipo

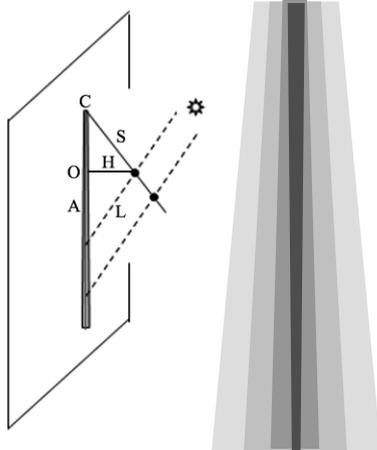
Si on connaît la distance d entre l'observateur et le cadran ainsi que l'angle α pour lequel nous devons lever les yeux, on peut trouver la valeur de l'angle que la ligne de largeur "m" sous-tend avec la relation $\gamma' = 3438 \cdot \frac{\cos^2(\alpha)}{d} \cdot m$. La relation inverse donne la valeur de

m : $m = \frac{d}{3438 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot \gamma'$. Dans les cas plus communs, l'angle α est d'environ 30° pour avoir une vision aisée. Par exemple, si $d=5m$ avec $\alpha=5'$, on obtient, pour la largeur des lignes, la valeur : $m=10mm$ environ. La dimension la plus petite de la sphère-noeud doit, comme cela a déjà été dit, être égale au moins à : 1,2-1,5 fois la valeur "m" trouvée.

En ce qui concerne la dimension des chiffres des heures, à mon avis, leur hauteur ne devrait pas être inférieure à 10-15' d'arc, correspondant à une acuité visuelle de 4-5/10.

Gnomons cylindriques

Considérons, pour simplifier, un cadran solaire vertical méridional avec un style polaire cylindrique de diamètre "Dc". Supposons qu'il est midi. Prenons un point quelconque du style, distant d'une valeur S du centre C, à une distance H du plan et qui projette son ombre en un point A par rapport au pied C du style.



L'ombre est, comme d'habitude, formée d'une zone centrale obscure avec aux bords une bande de pénombre. Puisque, en s'éloignant de C la distance L de la pointe du style au plan augmente, nous savons que la dimension de la face d'ombre propre diminue, tandis qu'augmente celle de la pénombre.

L'aspect de l'ombre est donc celui du schéma, dont les parties latérales ont été exagérées pour une meilleure compréhension. Valent encore les relations trouvées auparavant, où à présent h est complètement

$$\text{de la hauteur du Soleil : } L = \frac{H}{\sin(h)} \quad A = \frac{H}{\tan(h)}$$

Le style produit une ombre propre si $L \leq 107.5 \cdot D_c$

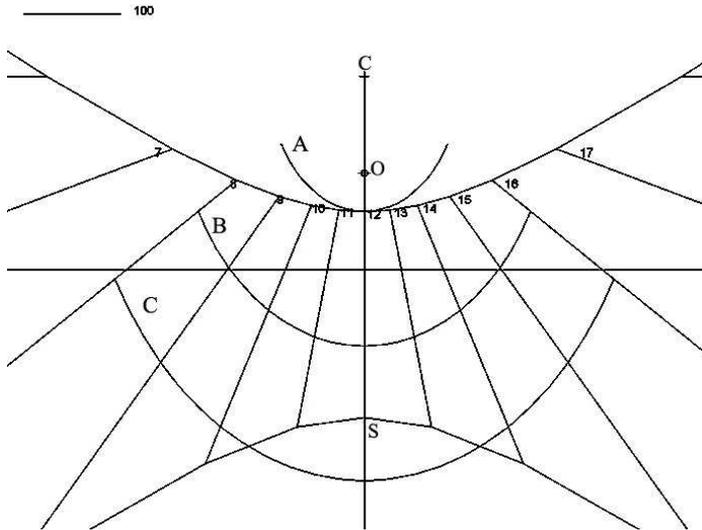
Pour une localité de Lat : $\approx 45^\circ$ au solstice d'été (cas le plus désavantageux pour l'ombre), le résultat est :

¹⁸ Il s'agit de ces tableaux de signes et de lettres utilisés pour tester la vue. Parmi les nombreuses sortes, un de ceux qui donnent les résultats les plus corrects est celui constitué par des lettres comme la lettre "E" avec ses trois "bras" espacés d'un carreau et de longueur égale à la hauteur de la lettre. Quand la lettre est vue et reconnue d'une distance telle que les simples bras et les espaces sous-tendent l'angle de 1' d'arc et que la lettre entière se voit sous l'angle de 5', alors on estime que l'acuité de la vue est de 10/10. En d'autres mots, on considère "normale" l'acuité visuelle des personnes qui reconnaissent la lettre E sous-tendue par un arc de 5 minutes.

$$H = S \cdot \cos(45^\circ) \quad A = S \cdot \cos(45^\circ) \cdot \tan(68.5^\circ) = 1.795 \cdot S$$

$$L = 1.929 \cdot S \quad \overline{COmbra} = 2.50 \cdot S \quad D_0 = L \cdot \Phi = \frac{S}{55.71}$$

Puisque la largeur de la zone dans l'ombre est $(D_c - D_0)$, elle s'annule lorsque $S \geq 55.718 \cdot D_c$. Dans ces conditions, la largeur totale de la pénombre vaut $2D_c$. Par exemple si $D_c = 1\text{cm}$ l'ombre s'annule quand $S = 56\text{cm}$ environ. La pénombre mesure 2 cm et se trouve à environ 140 cm du centre $D_c/H = 2,5/100\text{ C}$.



Si la longueur du style n'est que de 40 cm , alors sa partie extrême produit une zone d'ombre large d'environ 3 mm , avec, sur les côtés, une pénombre large d'environ 7 mm . $D_c/H = 3,5/100$.

Dans la figure du tracé d'un cadran vertical méridional de latitude $\text{Lat.} = 45^\circ$, sont dessinées les courbes des points pour lesquels l'ombre vraie du style s'annule suivant diverses valeurs du rapport D_c/H , où D_c est le diamètre du cylindre et H la distance du point terminal (nœud) du style (ou longueur du

style droit).

Les valeurs de ces rapports sont $1/100$ pour la courbe A, $2/100$ et $3/100$ pour les courbes B et C. Le point O est la projection du point terminal du style polaire au pied du style orthogonal (ou pied du style droit). Comme on le voit, si nous traçons un cadran avec une certaine valeur de style droit et prenons le diamètre de la hampe (diamètre du style) $1/100$ de cette valeur, la hampe n'aura pas d'ombre propre, mais seulement de la pénombre sur l'ensemble du cadran.

Si, au contraire, nous utilisons un diamètre égal à $3/100$ du style orthogonal (style droit), la tige donnera une ombre propre sur presque tout le cadran. Prenons par exemple $H = 50\text{cm}$, on aura $OS = 126,9$, $SC = 176,9\text{cm}$ et $GS = 136,4\text{cm}$. En prenant une tige de diamètre 5mm ($D_c/H = 1/100$), l'ombre propre s'annule sur la courbe A et au point S on aura une bande de pénombre d'une largeur d'environ 18 mm .

Avec un diamètre $D_c = 1,5\text{ cm}$ ($D_c/H = 3/100$), l'ombre s'annule sur la courbe C et au point S, on aura une ombre d'une largeur d'environ 2mm , centrée sur une bande de pénombre de 28mm . Enfin avec un diamètre de $2\text{ cm} = 4/100$ du style orthogonal, le style donne une ombre propre pendant une bonne partie de l'année et aux heures centrales de la journée. Durant les mois d'été seulement, l'ombre devient moins visible dans la partie terminale.

On peut facilement démontrer que l'ombre vraie s'annule au point S si le diamètre est $D_c = H/40$. Puisque pour les cadrans solaires, avec un style polaire, c'est l'ombre entière qui indique l'heure par recouvrement de la ligne horaire, on a un bon compromis en prenant un diamètre d'environ $1/50$ à $1/40$ de la hauteur du point nodal.

Hampes coniques

Certains utilisent, comme style polaire, une tige mince, conique, terminée en pointe. Je parlerai plus tard de l'effet d'une pointe sur l'ombre, mais dès maintenant je voudrais

seulement noter que ce genre de hampe ne fait rien d'autre que renforcer les défauts, du point de vue de l'ombre, d'un style polaire.

Comme nous l'avons dit précédemment, l'ombre vraie d'un style diminue de largeur, jusqu'à s'annuler peu à peu, à mesure que l'on s'éloigne du centre du c.s., tandis qu'augmente la largeur de la pénombre. Un style avec une petite conicité (hampe conique) fait que la largeur de l'ombre diminue plus rapidement et s'annule d'abord, sans diminuer en pratique la largeur de la pénombre (pratiquement celle-ci dépend seulement du diamètre du Soleil).

Les courbes A, B, C de la figure précédente qui indiquent les points auxquels l'ombre vraie et propre s'annule, se rétréciraient et se déplaceraient vers le haut, rendant la lecture plus difficile.

Au contraire, même si je ne connais pas d'exemple, on pourrait concevoir une hampe avec une conicité inversée, c'est-à-dire plus large en extrémité et plus étroite à la base (par exemple avec à la base environ $1/80$ de H et à l'extrémité environ $1/40$ de H ; 1 et 2 cm avec H = 40cm).

Éléments constants de formes diverses

Comme cela a déjà été dit, il est opportun que l'élément qui produit l'ombre ait une symétrie, tout au moins autour de l'axe polaire. Ceci pour deux raisons :

- ° la forme de l'ombre, c'est-à-dire son profil, demeure presque inchangée au fil des heures (sauf les allongements dus aux variations d'inclinaison des rayons solaires)
- ° pouvoir mieux identifier le centre de la tache ombre-pénombre, en particulier quand elle tombe loin et devient à peine perceptible.

Cet effet, même s'il ne dépend pas des dimensions, est beaucoup plus perceptible pour les cadrans solaires de grandes dimensions où la largeur de la pénombre peut atteindre 10 cm. Certes, une différence de perception peut être apportée par l'aspect, la finition de la surface où sont tracées la ou les lignes (ainsi pour une méridienne horizontale, la surface peut être formée de pavés). Pour cette raison, si l'on désire obtenir une bonne précision et une bonne clarté dans la lecture, il est préférable d'utiliser une tige symétrique plutôt qu'un élément avec "voile" pour lequel il n'est pas facile de déterminer où l'ombre "se termine"(voir [3]).

Je limiterai les notes qui suivent à l'étude de certains genres de "nœuds"¹⁹ puisque, pour la détermination du jour dans l'année (arcs diurnes), on utilise toujours cet élément ainsi que pour lire l'heure sur les cadrans solaires de Temps Vrai.

Les cadraniers ont inventé de très nombreuses formes de nœuds. Certains avec des dimensions finies et, presque toujours, avec une symétrie axiale, comme les sphères, les sphères rayonnantes, les axes avec gonflements de différentes formes, les axes avec des incisions ou reports circulaires, anneaux, etc. D'autres avec des dimensions infinitésimales, comme l'extrémité de pointes circulaires (cônes, pyramides) ou des pointes d'éléments plats (pointes de flèche, feuilles). D'autres enfin avec des trous réalisés presque toujours sur des disques ou des plaques.

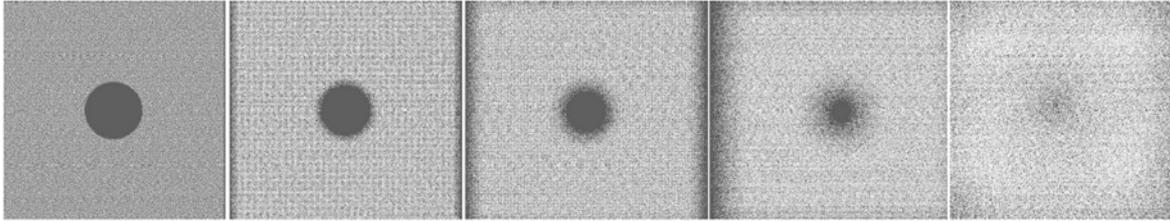
Le comportement de certains de ces types de nœuds est présenté dans les figures qui suivent sachant que les ombres produites sont projetées sur un écran placé à diverses distances

²⁰

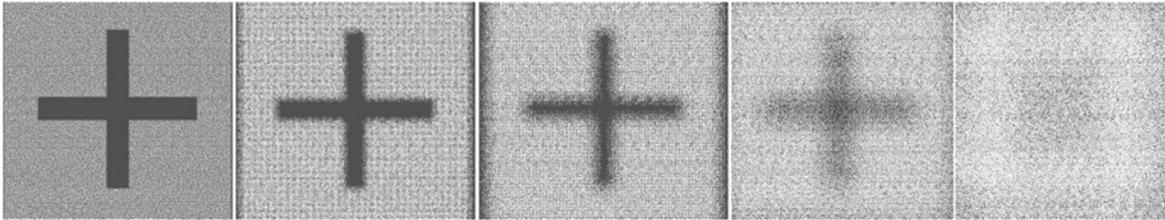
¹⁹ Dans le texte, je désigne par le terme de "nœud" ce que d'autres appellent le "point gnomonique". C'est-à-dire cet élément géométrique dont l'ombre (théorique) indique l'heure sur la table du cadran. Ce sont donc "des nœuds" ou "les points extrêmes" d'une tige/hampe ou d'un style orthogonal, si on les utilise dans le but ci-dessus, soit le centre d'une sphère insérée sur un style, etc.

²⁰ Dans toutes les figures, le profil du nœud est celui de l'image de gauche, ayant en réalité un côté de 10cm. Dans les images qui suivent sont montrées, vers la droite, les ombres projetées sur des écrans placés aux distances de 50, 100, 200 et 500cm. Toutes les images ont été obtenues par points avec un programme de simulation écrit par l'auteur (environ 300 000 points par image).

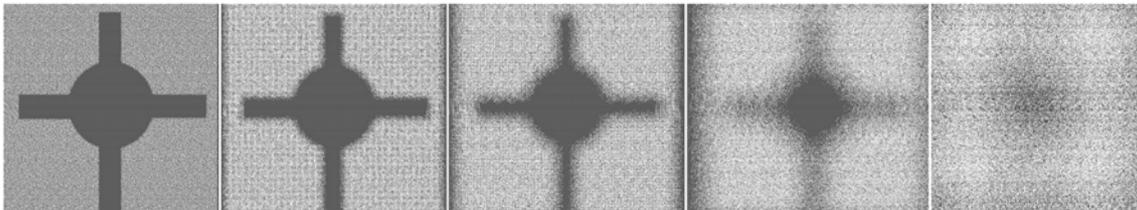
Nœuds sphériques ou pseudo-sphériques



▲ A) Sphère: diamètre 2.5cm, à une distance de 500 cm (L/Dg) =200, le point d'ombre est bien défini.

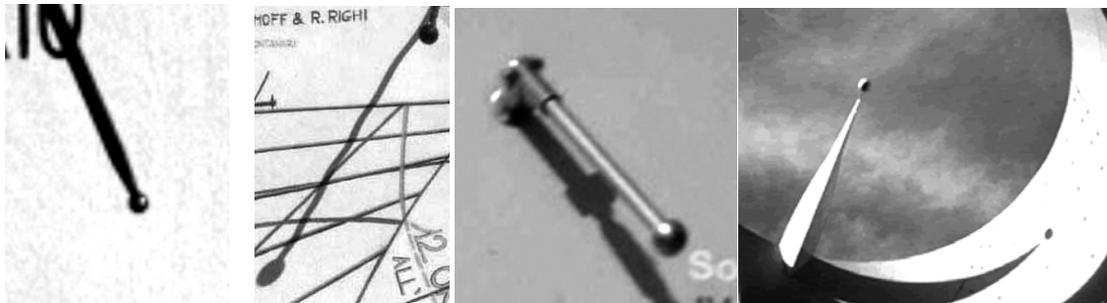


▲ B) Croix: Longueur du bras = 3cm, largeur du bras 1 cm. L'ombre, à la distance de 200 cm, est mieux visible de par sa forme cruciforme, que celle d'une sphère d' 1 cm de diamètre.

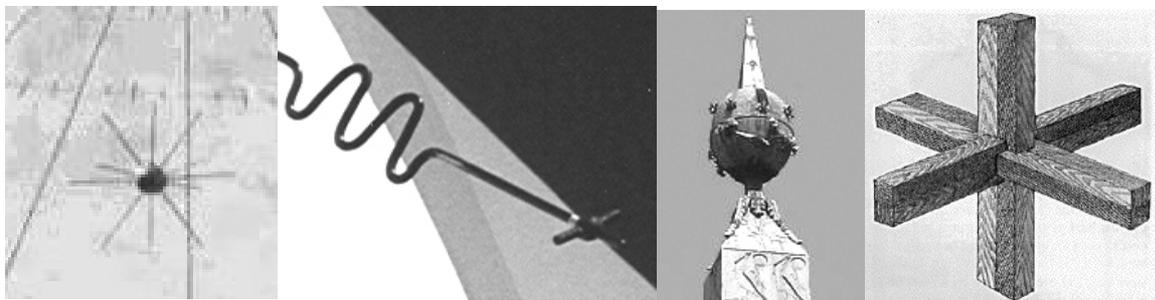


▲ C) Croix sur sphère: Diamètre de la sphère = 4cm, bras de la croix: 2.5 x 1 cm.

Nota: Même si les figures ci-dessous sont à deux dimensions, elles peuvent être assimilées au type B) de croix volumique à 6 bras ou plus et au type C) sphères rayonnantes (comme les mines marines)

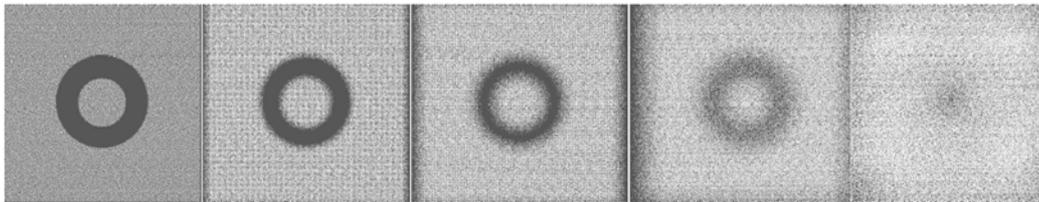


▲ Quelques exemples de gnomons à sphère ²¹

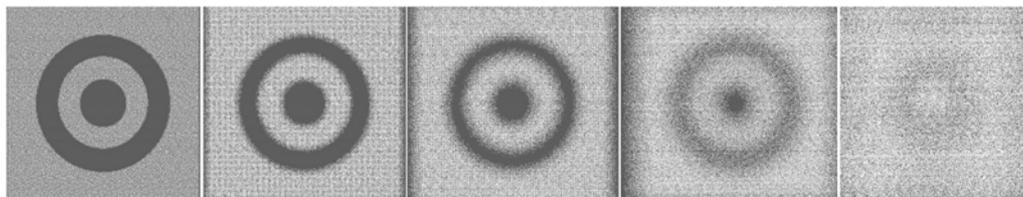


▲ Sphère rayonnante (R.Baggio), étoile (R.Righi), sphère (Montecitorio), et croix tridimensionnelle.

²¹ Il m'est impossible d'indiquer les "constructeurs" des cadrans solaires ayant des gnomons cités. Je prie les auteurs et les lecteurs de m'excuser.



▲ D) Anneau: Diamètre externe = 4,5cm, diamètre interne = 2,5cm. Largeur de l'anneau = 1cm L'anneau est bien visible jusqu'à la distance de 200 cm (et plus: $L/D_{int} = 80$ et plus). A la distance $L/D_{int} = 200$ une tache centrale qui indique une position précise est encore visible.



▲ E) Anneau avec sphère centrale – Diamètre sphère 2.5 cm. Largeur des anneaux 1 cm.

Pointes

Dans beaucoup de cas, que ce soit avec un style polaire ou un style droit, le "point gnomonique" est constitué par une "pointe" en extrémité, comme par exemple une pointe de flèche plane ou tridimensionnelle, une pyramide, un cône, une feuille, etc. On rencontre souvent des éléments coniques ou pyramidaux sur les petits cadrans solaires dans lesquels le gnomon est utilisé aussi comme élément décoratif.

Puisque ces éléments "pointus" sont utilisés presque toujours dans le but d'avoir une meilleure précision dans la lecture, il faut démystifier la croyance que l'ombre d'une pointe donne une indication plus correcte, plus précise et plus nette que d'autres types de nœuds^{22 23}.

L'explication vient du fait que, plus on avance vers la pointe, plus la dimension de la section vue du Soleil diminue et donc plus diminue la largeur de l'ombre "vraie". A une certaine distance de la fin de la pointe donc, l'ombre vraie disparaît, tandis qu'augmente la zone d'incertitude, même quand la distance pointe-cadran est relativement petite.

On peut affirmer que l'incertitude sur la localisation de la partie terminale de l'ombre d'une pointe est environ égale à 50% de la dimension de l'ombre-pénombre d'un point élémentaire, c'est-à-dire environ $L/200$. Par exemple à la distance de 1m, on a une incertitude d'environ 5 mm. On a la même incertitude avec un style à voile, tandis qu'avec un style symétrique, comme une hampe ou une sphère, la recherche du centre peut être faite avec une précision bien meilleure.

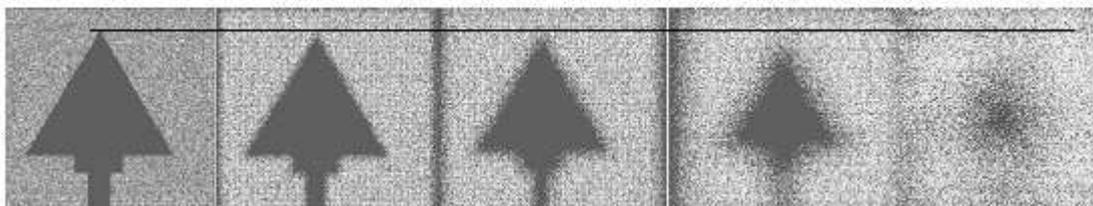
Dans la figure F), on peut clairement voir comment la "position" de la pointe est déjà incertaine à la distance de 100 cm (3^e image) pour devenir ensuite inacceptable à 200 cm (4^e image)



▲ F) Pointe – Diamètre = 2.5cm, longueur = 6cm

²² Evidemment, mes critiques concernent seulement l'aspect "technique", sans aspects artistiques et/ou esthétiques.

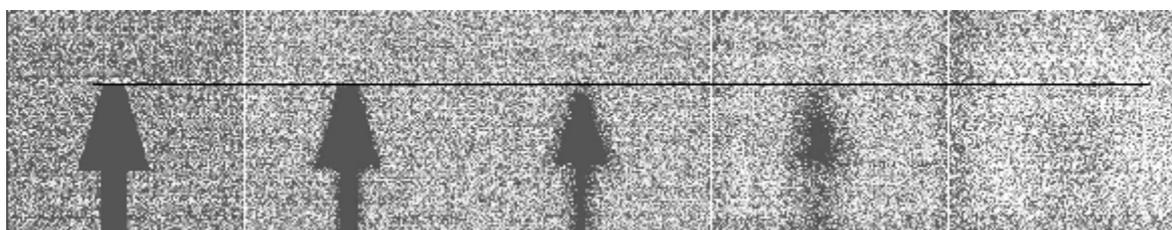
²³ Dans l'Antiquité de petits gnomons coniques étaient souvent utilisés, en particulier par les Arabes. A ces époques, on ne cherchait pourtant pas la précision que nous demandons de nos jours. Seules la simplicité et la robustesse étaient recherchées.



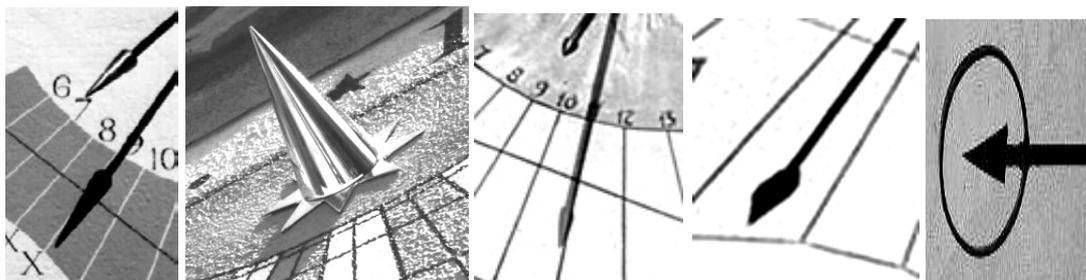
▲ G) Pointe à flèche : 7 x 6 cm

Dans l'exemple de "pointe de flèche" des figures G), non seulement nous avons l'effet décrit ci-dessus qui porte à des erreurs dans la lecture, mais, à grande distance (dernière image à droite), le corps de la pointe produit une ombre qui peut être facilement confondue avec celle à utiliser pour les lectures. Dans ces cas, il est préférable, au lieu d'une pointe, d'utiliser un élément arrondi ou tronqué, comme dans la fig. H).

Dans le cas où l'on désire utiliser un élément à pointe, je conseille les formes pyramidales à base polygonale. Ceci parce que ces solides, qui ne sont pas toujours dans la direction de l'ombre de la pointe peuvent provoquer une autre incertitude, en plus de celle due à "l'effet pointe"²⁴.



▲ H) Pointe tronquée ou arrondie: Diamètre extrémité = 1cm.



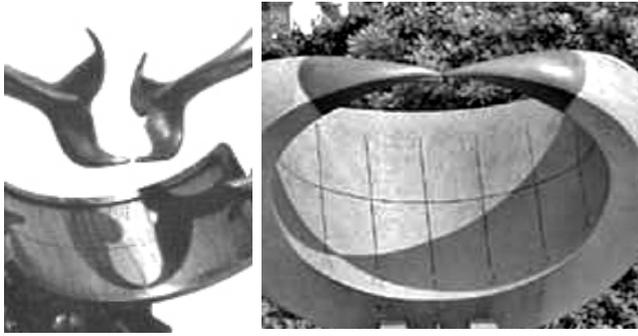
▲ Exemples de nœuds à pointe.

Un cas différent est celui de deux points en opposition comme dans les figures ci-dessous. Pour trouver l'heure on n'a pas besoin d'observer où se termine l'ombre d'une des deux pointes, mais le point intermédiaire entre les deux ombres. Evidemment la précision dans la détermination de ce point central est meilleure que celle qu'on obtient avec une simple pointe. La chose est valable pour les gnomons réalisés en deux éléments séparés par un mince espace ou fente (voir exemple avec style en queue de poisson, en forme de bec).



▲ I) Pointes en opposition: Distance entre les pointes : 1cm

²⁴ Il est évident, comme cela a déjà été dit, que ces considérations sont valables seulement quand il est intéressant de lire avec précision la position de l'ombre de la pointe.



▲ Exemples de nœuds avec pointe affichée

Trous

Des trous pratiqués dans des disques (œillette) ou dans des rubans sont souvent utilisés comme "Nœuds".

L'étude de ce cas est parfaitement identique à celle de l'ombre. L'unique différence est que maintenant nous avons affaire à une petite tache de lumière entourée d'une zone dans l'ombre, au lieu du contraire. Même si,

des deux zones et donc sur le contraste entre elles, la tache lumineuse, produite par un trou est mieux perçue et "vue" par rapport à l'ombre d'une sphère. Ceci est, je crois, la raison qui fait souvent préférer le disque troué.

L'explication est probablement que la grande tache d'ombre produite par le ruban ou le disque attire notre attention et que tout de suite après on se focalise sur la zone lumineuse à l'intérieur. Les formes que l'on peut rencontrer sont très différentes même si les plus communes sont les circulaires ou pseudo-circulaires (disques, étoiles trouées, profil rayonnant, etc.). Par expérience le trou est toujours circulaire, même s'il n'y a aucune raison théorique qui empêche d'avoir des profils divers (toujours contenus dans un cercle) comme des polygones, étoiles, etc).



▲ Exemples de "trous"

Les relations mathématiques déjà établies pour l'ombre sont valables pour la lumière produite par un trou. Un trou réalisé dans un plan perpendiculaire (normal) aux rayons solaires, produit sur un écran parallèle, si la distance L est petite, une zone centrale d'un diamètre $(DF-Do)$, illuminée pleinement (illumination = $J_0 + J_d$), et une bande de pénombre de largeur Do , dans laquelle la lumière va diminuer graduellement .

Si ensuite $L > 107,5 DF$, alors l'intensité lumineuse centrale n'est plus celle d'une zone illuminée pleinement par le Soleil et sa valeur diminue suivant l'augmentation de L . Dans tous les cas, la largeur totale de la tache de lumière est $(DF + Do)$. Si enfin le plan du trou est incliné par rapport aux rayons du Soleil, la quantité de lumière qui le traverse diminue, comme diminue l'inclinaison entre l'écran et le trou.

Pour un plan vertical à midi, on trouve la relation : $J = (J_0 + J_d) \cdot \left(\frac{k \cdot D_F}{H} \right)^2 \cdot \sin^3(h) \cdot \sin(h + \gamma)$

qui exprime l'intensité lumineuse dans la zone centrale de l'image (si la distance L est grande).

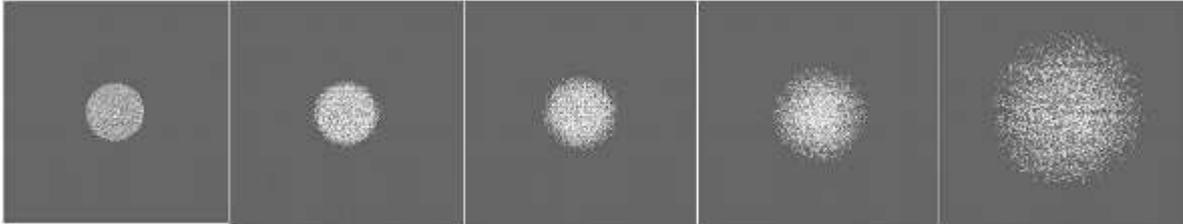
Dans cette formule, h est l'inclinaison des rayons du Soleil sur le plan du cadran, γ est l'angle entre le plan du trou et celui du cadran, H est le style droit, $k=107.5$ ²⁵.

Ainsi la forme de la tache de lumière produite par un disque troué sur le plan (par exemple vertical) d'un cadran solaire dépend soit de la hauteur du Soleil, soit de l'inclinaison du plan du disque par rapport à la paroi. Etant donné que, si le disque est parallèle à la paroi,

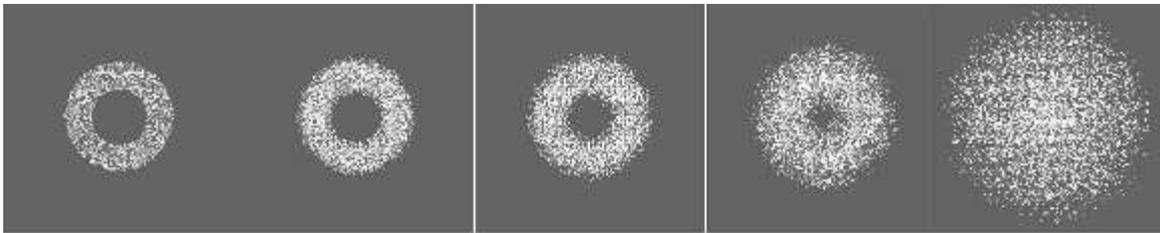
²⁵ Une étude quantitative est mentionnée dans mon article [4]

la forme de la tache de lumière est toujours circulaire, cette disposition est préférée par certains. Dans ce cas pourtant, l'inclinaison des rayons sur le plan du disque peut être très petite (pour $\text{Lat.}=45^\circ$ jusqu'à 21.5°) et la quantité de lumière qui traverse le trou diminue beaucoup, rendant la tache peu lumineuse.

Pour cette raison, je conseille de placer le plan du trou de façon que son axe soit confondu avec la droite correspondant au point d'intersection entre la ligne du plan de l'équateur céleste et celui du plan de la sous-styloire (sur un cadran solaire l'axe du trou doit être confondu avec la droite d'intersection du plan de la sous-styloire et du plan de l'équinoxiale). Des considérations analogues peuvent être faites pour les trous en forme d'anneau.



▲ L) Trou. Diamètre = 2,5 cm

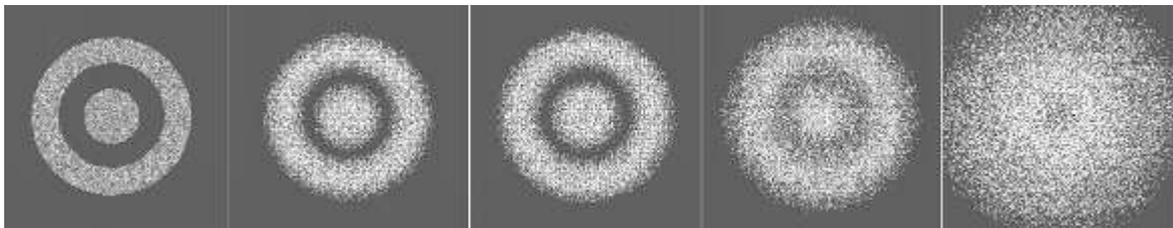


▲ M) Trou en forme de couronne circulaire: Diamètre disque interne = 2,5cm, Diamètre externe = 4.5cm

Dans le cas d'un trou en forme d'anneau (fig. M), on peut noter comment la tache obscure centrale est bien visible jusqu'à une distance L/D interne = 107,5 environ, tandis que la tache lumineuse complète est visible jusqu'à L/D externe = 107,5. Dans la figure fig. M), ces distances sont 270 et 480 cm.

On peut alors dire que les deux cercles se passent le "relais". Quand la distance L est petite, l'effet du disque obscur est mis en évidence. Quand L augmente, au contraire c'est "l'effet anneau" qui devient primordial. Cet effet, à mon avis très utile, milite en faveur de ce genre de trou.

En augmentant la complexité du trou, comme dans la figure. N, nous ne voyons pas d'améliorations notables.



▲ N) Trou en forme de double couronne circulaire: Diamètre du disque interne = 2,5cm, Diamètre externe = 6,5cm, largeur des anneaux = 1 cm.

On observe que beaucoup de cadrans solaires anciens (ou méridiennes) utilisent un disque troué avec un style orthogonal/style droit, jusqu'à environ 1 m de longueur. Le disque a un diamètre égal à environ $1/5$ du style orthogonal et le trou a un diamètre d'environ $1/50$ de la longueur de ce style orthogonal. Dans un cadran solaire méridional, avec une latitude de 45° , pour une hauteur maximum du Soleil à midi : $h_{\text{max}} = 68,5^\circ$, on a la distance maximum entre le disque et le plan de $L = H / \cos(68.5^\circ)$. Afin que, dans la partie centrale, il y ait au

moins un point pleinement illuminé, il faut donc que $L=107.5 \cdot D_F$ dont $D_F = \frac{H}{\cos(68.5) \cdot 107.5} = \frac{H}{40}$. A mon avis, le diamètre du trou devrait être un peu plus grand et atteindre environ $H/35$.

Nœuds pour lignes méridiennes

Les considérations faites jusqu'à présent valent évidemment dans le cas des "méridiennes" de Temps Moyen, c'est-à-dire constituées de courbes en 8. Les nœuds qui peuvent être utilisés imposent des contraintes moindres que celles des cadrans solaires qui possèdent un éventail de lignes horaires. Ainsi, il n'est pas nécessaire que la symétrie du nœud soit sphérique ou bien déterminée par rapport à l'axe polaire. Il suffit que ce nœud soit symétrique au plan méridien. Les disques simples, les sphères, les trous, les trous en forme de couronne ou de formes variées, les anneaux opaques, les courtes tiges transversales à l'axe polaire, etc, répondent parfaitement à la contrainte.

Spécialement pour les grandes méridiennes horizontales tracées au sol, dont le surface peut être piétinée, des trous en forme de couronne (ou équivalent) sont préconisés car leur centre est bien visible, même à des distances relativement grandes.



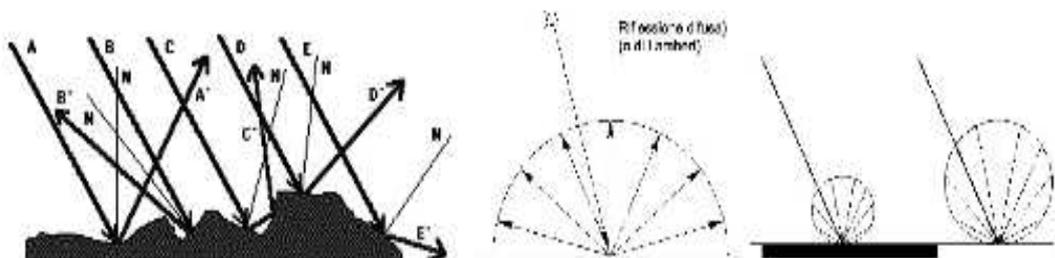
▲ Exemples de "nœuds" pour les méridiennes

Propriété de réflexion des surfaces.

Quand la lumière frappe une surface, elle est en partie absorbée et en partie réfléchie. Pour les corps transparents, elle est en partie transmise. On définit la réflexion par la quantité de lumière qui est réfléchie par rapport à celle qui frappe la surface.

Il peut y avoir deux sortes de réflexion. La réflexion est dite "diffuse" lorsque la lumière incidente est réfléchie dans toutes les directions, de façon isotrope (réflexion de Lambert). Un observateur regardant la surface dans une direction quelconque la voit toujours d'égale luminosité (c'est-à-dire que la superficie a la même radiance). Jusqu'à présent, n'ont été implicitement considérées que les superficies ayant cette propriété et, pour cette raison, seule a toujours été prise en considération la luminosité (c'est-à-dire la quantité de lumière qui frappe la superficie), et non la "radiance" (quantité de lumière émise par la surface elle-même).

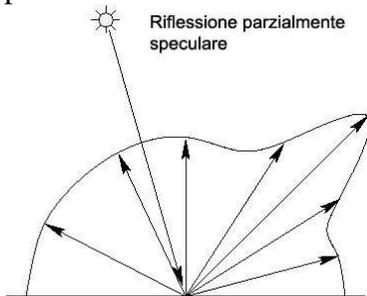
En général, les surfaces qui donnent une réflexion diffuse présentent une rugosité plus ou moins accentuée, souvent seulement au niveau microscopique. Elles peuvent pour cela être assimilées à un ensemble de très petites auréoles planes orientées au hasard, chacune d'entre elles reflétant les rayons qui la frappent selon la loi de la réflexion spéculaire.



Presque tous les matériaux naturels, comme les tissus, le bois, la pierre, les marbres non polis, et beaucoup d'autres matériaux utilisés dans le bâtiment, comme des briques, crépis, peintures murales et autres revêtements aux surfaces pas trop "lisses", présentent cette caractéristique.

Si au niveau macroscopique la surface présente également une "brillance" (spécularité partielle, la distribution de la lumière réfléchiée peut ne plus être égale dans toutes les directions, mais prédominer dans une direction préférentielle. L'observateur voit donc la zone illuminée par les rayons solaires de façon plus ou moins lumineuse suivant la position de son point d'observation.

Des exemples de surfaces de ce genre sont des marbres brillants, le bois brillant, certains vernis, les verres, les métaux brillants, même en partie seulement, etc. Au contraire, la lumière diffuse du ciel est réfléchiée de façon égale dans toutes les directions et donc, si la surface est illuminée seulement par elle, elle est vue également "lumineuse" quelque soit le point d'où l'observateur la regarde.



▲ Réflexion avec Brillance partielle

Enfin si la surface est parfaitement réfléchissante (comme un miroir), la lumière réfléchiée ne peut être vue que dans la direction opposée à celle du Soleil. D'un point quelconque, il n'est pas possible de voir l'ombre. En réalité, elle n'est pas visible dans la direction où les rayons du soleil sont réfléchis dans la mesure où on peut voir le soleil. Il n'apparaît que la silhouette du gnomon contre le disque du Soleil. Il n'est donc pas possible de tracer un cadran solaire sur un "miroir" !

Ci-dessus, a été donné, la définition de la réflexion et de la lumière incidente réfléchiée.

Sans entrer dans le domaine des propriétés spectrales de la lumière et des couleurs, il nous faut faire ici faire quelques observations sur cette propriété.

Puisque la réflexion sur une surface modifie, dans une même proportion, la quantité de lumière sortant de deux zones différemment illuminées, sa valeur n'agit pas sur le "contraste" entre ces zones. Seulement dans le cas de surface avec une très basse réflexion (noir de fumée, velours noir), les flux lumineux sortants, s'ils sont encore proportionnels aux illuminations, deviennent très petits et tombent dans le champ où la loi de W-F n'est plus valide. Dans ces cas, les valeurs du seuil sont supérieures aux valeurs susmentionnées et la visibilité d'une zone faiblement ombragée devient beaucoup plus difficile.

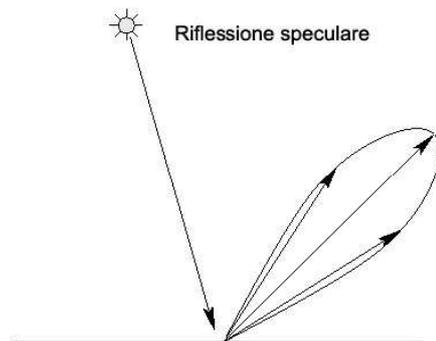
En Appendice B, sont données les valeurs de la réflexion de certains matériaux.

Quelques curiosités sur l'ombre et sur la pénombre.

Pour terminer, je veux insister sur certains effets curieux et peu connus de l'ombre et de la pénombre.

1) Si l'on met les mains face à la lumière du Soleil et que l'on rapproche deux doigts l'un de l'autre, on voit apparaître, presque à l'improviste, un pont obscur entre les deux doigts en contre jour ; ils semblent se toucher même si, dans la réalité, demeure encore un petit espace entre les deux.

En conséquence, le contraste entre une zone dans l'ombre (illuminée seulement par la lumière diffuse) et une zone en plein Soleil varie suivant le point de vue de l'observateur, et diminue si l'objet est regardé par exemple dans une direction normale aux rayons du Soleil. D'où une moindre visibilité et une difficulté de perception de l'ombre. Ceci explique le phénomène bien connu qu'il est plus difficile de lire l'heure indiquée par l'ombre sur un cadran solaire en cuivre ou en métal luisant.



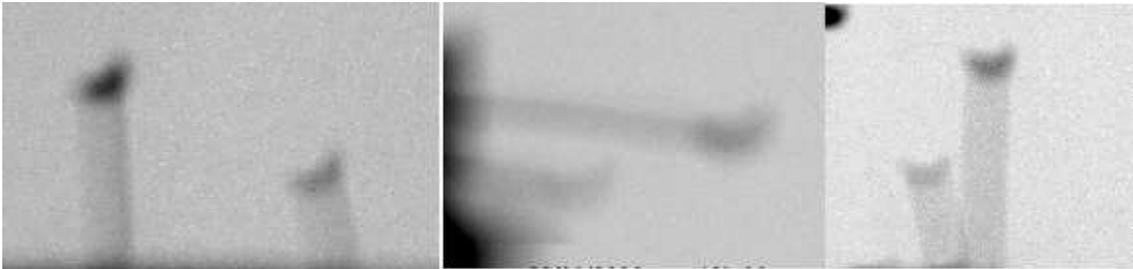
▲ Réflexion sur un miroir

L'effet est dû aux deux zones de pénombre qui les entourent et qu'à un certain point, elles se superposent, donnant lieu à une zone plus obscure. Des points de cette zone, on pourrait voir le disque du Soleil en partie obscurci par un doigt et en partie par l'autre. L'effet commence quand la distance entre les deux doigts devient inférieure à environ $L/107,5$.

2) Si on observe l'ombre des doigts d'une main et qu'on l'éloigne, on verra les « doigts » devenir toujours plus flous jusqu'à ce que l'espace entre eux disparaisse.

3) Comme cela a été dit au début, l'ombre d'un point a la forme de la source. Cela peut se vérifier en illuminant, avec une lampe à incandescence, la tête d'une épingle de bureau (petite sphère de 2-3 mm de diamètre). L'ombre (très faible et difficile à voir) a la forme du filament en spirale de la lampe.

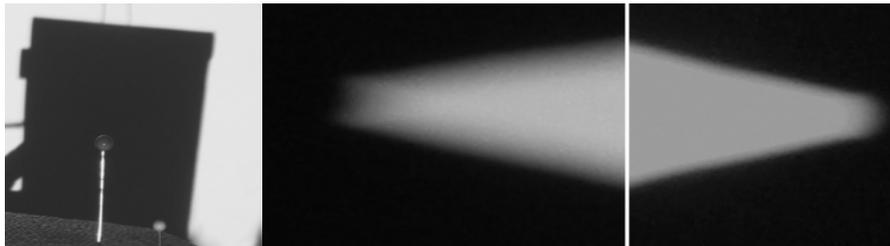
Une autre expérience consiste à regarder l'ombre de la petite sphère de la tête d'épingle durant une éclipse de Soleil. On peut voir alors que l'ombre a la forme d'une demi-Lune, comme la partie illuminée du Soleil. On raconte que, durant une éclipse, il a été observée l'ombre en forme de demi-Lune d'un ballon, échappé des mains d'un enfant. Le même phénomène peut se présenter à l'aube ou au coucher du Soleil, quand seule une partie du disque solaire pointe encore au-dessus de l'horizon.



▲ Exemples d'ombres de petites sphères durant l'éclipse du Soleil du 29/3/2006

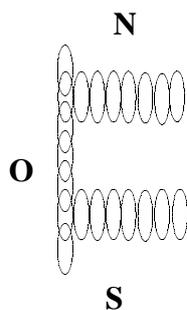
4) Si on entaille une feuille de papier dans une zone en forme d'angle aigu et si on regarde l'ombre de la feuille, on verra à l'intérieur que le sommet de l'angle est toujours arrondi. L'effet est plus grand quand la surface qui reçoit l'ombre est éloignée. Le point terminal de l'angle, en fait, ne produit pas l'ombre propre mais seulement un disque de pénombre de la même dimension $L/107,5$.

Le même phénomène peut être observé durant une éclipse de Soleil : le point terminal présente l'aspect d'une demi-Lune.



▲ Les sphères-Eclipse

▲ Ombre d'un angle opposé-Eclipse (photos 29/3/2006)



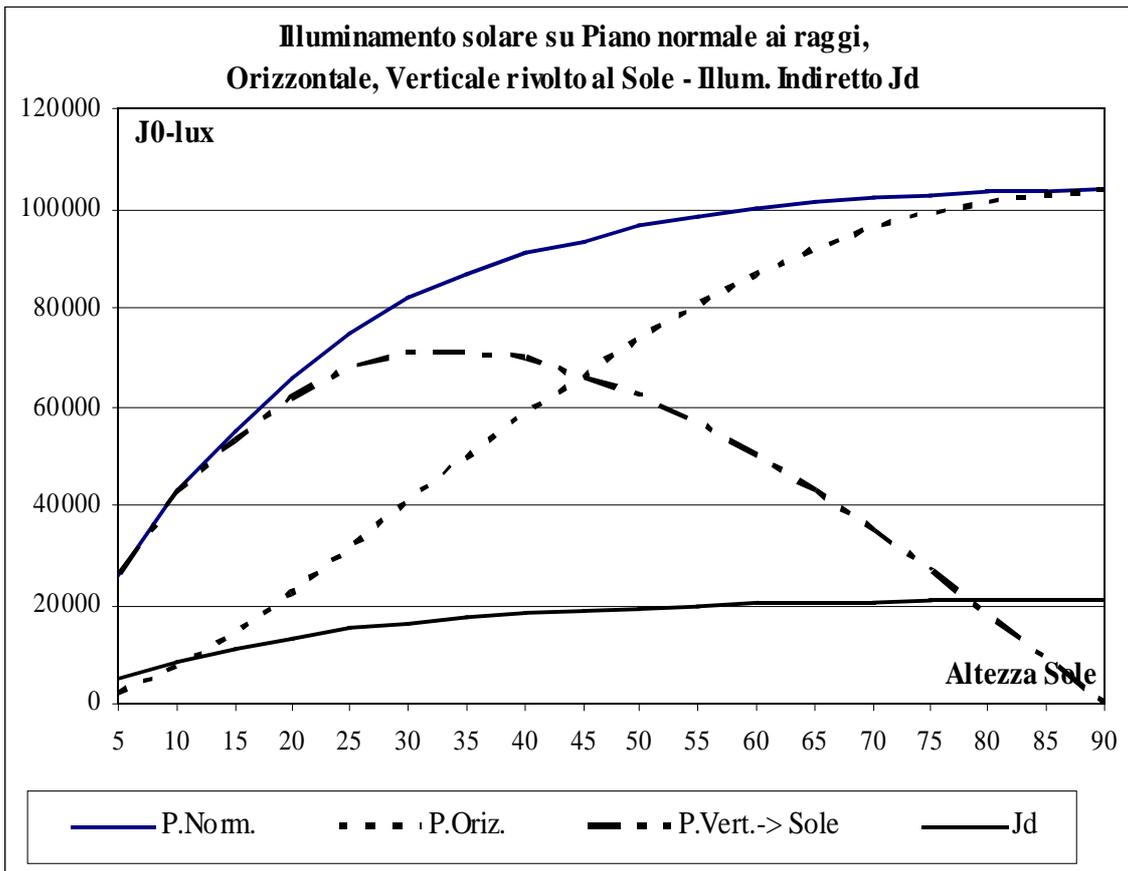
5) Si l'on observe sur le sol l'ombre produite par des fils orientés N-S pour l'un, E-O pour l'autre, quand on les éloigne du sol, à un certain moment, on verra disparaître l'ombre du fil orienté E-O, tandis que demeurera celle du fil N-S (la distance doit être au moins 500 fois le diamètre des fils). Le phénomène est dû au fait que chaque point des fils produit sur le sol une hélice de pénombre suffisamment allongée et de faible "obscurité".

Tandis que les hélices de pénombre dues aux points du fil E-O ne se superposent pas, celles des points du fil N-S se superposent provoquant une augmentation de l'"obscurité" complète.

ANNEXE A

La luminosité J_0 due seulement aux rayons du soleil varie soit en fonction de la hauteur du Soleil sur l'horizon, soit en fonction de l'inclinaison du plan recevant les rayons. Dans la figure ci-dessous sont tracées les variations de J_0 , avec une atmosphère claire, suivant la hauteur du Soleil, pour un plan parallèle aux rayons, pour un plan horizontal et pour un plan vertical tourné vers le Soleil (c'est-à-dire avec le même azimut que le Soleil). Dans le graphique sont aussi reportées les variations de la luminosité indirecte J_d due au ciel.

Evidement, la luminosité totale d'une surface est donnée par la somme: $J_d + J_0$

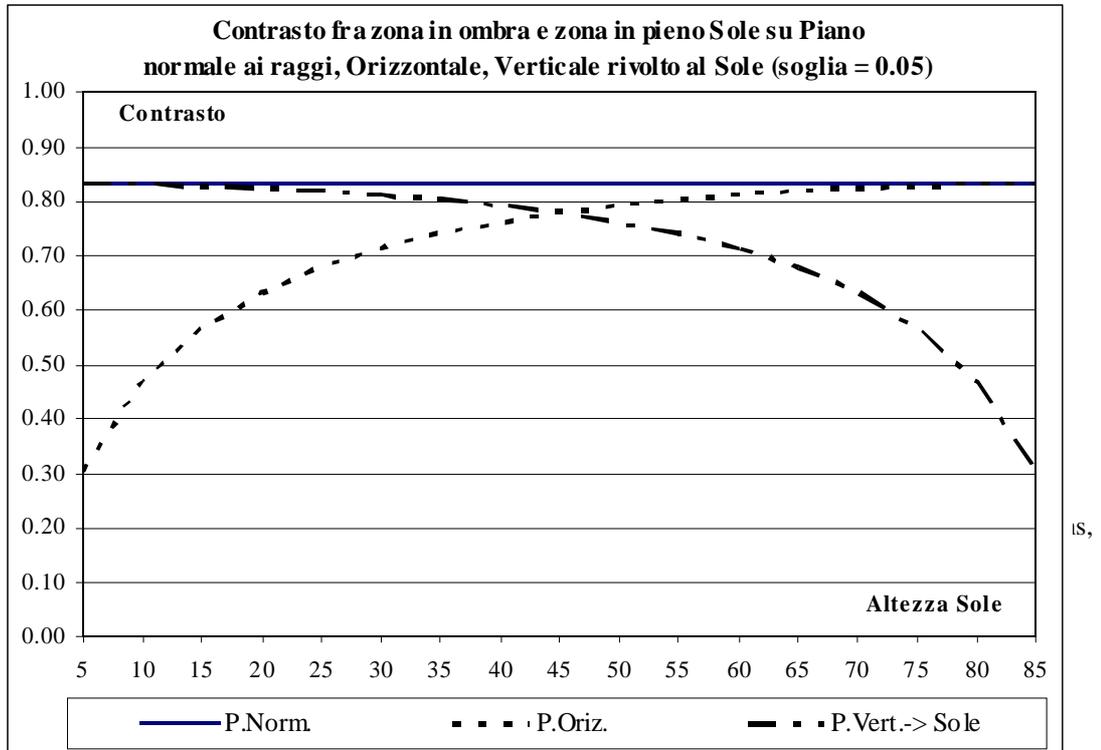


Illumination solaire sur un Plan parallèle aux rayons,
Horizontal, Vertical tournée vers le Soleil-Illum. Indirecte : J_d

Le contraste entre la zone dans l'ombre et celle illuminée qui l'entoure varie aussi. Il varie avec la hauteur du Soleil sur l'horizon ou avec l'inclinaison du plan recevant la lumière. Dans la figure sont tracées les variations du contraste en fonction de la hauteur du Soleil pour un plan parallèle aux rayons, pour un plan horizontal et pour un plan vertical tourné vers le Soleil.

La valeur minimum du contraste est d'environ 0,05 (valeur de seuil) pour percevoir une différence de luminosité entre les deux zones.

Contraste entre la zone dans l'ombre et la zone en plein Soleil sur le plan parallèle aux rayons, horizontal, vertical, tourné vers le Soleil (seuil = 0,05)



Annexe B

Superficie	Forma della riflessione	Riflessione in percent. della luce incidente
Carbonato di magnesio	diffusa	93-98%
Neve	mista	93%
Intonaco (calce) bianco	diffusa	90-92%
Argento lucidato	speculare	87-92%
Alluminio o argento su vetro	speculare	80-90%
Vernice bianca	diffusa	75-88%
Fogli d'alluminio	speculare	85-87%
Carta bianca da filtro	diffusa	80-85%
Carta bianca patinata	mista	80%
Carta assorbente bianca	diffusa	70-80%
Alluminio ossidato anodicamente	mista	70-80%
Porcellana bianca lucida	mista	60-80%
Porcellana bianca opaca	diffusa	60-80%
Acciaio smaltato bianco	mista	60-70%
Cromo lucidato	speculare	62-67%
Acciaio inossidabile lucidato	speculare	55-65%
Nichelio	speculare	60-63%
Carta bianca ordinaria	diffusa	60%
Cromo opaco	mista	50-60%
Marmo	diffusa	40-60%
Tela bianca	diffusa	30-60%
Alluminio commerciale	speculare	53-55%
Legno bianco di quercia	diffusa	25-35%
Intonaco di calcestruzzo	diffusa	20-30%
Carta velina	diffusa	22%
Laterizi (mattoni)	diffusa	10-15%
Legno di quercia scura	diffusa	10-15%
Inchiostro tipografico nero	diffusa	10%
Carta da disegno nera	diffusa	5-6%
Nero fotografico su carta mat	diffusa	6%
Nero fumo	diffusa	1-3%
Nero fotografico su carta lucida	mista	2%
Inchiostro di China su carta	diffuso	2%
Tela nera	diffusa	1-1½%
Legno impregnato nero	diffusa	1%
Velluto nero	diffusa	0,4%

ANNEXE C

Diamètre de l'ellipse-ombre produite par une sphère sur un plan vertical déclinant.

On a un plan vertical déclinant avec une déclinaison α et un style orthogonal terminé par une sphère de diamètre D et de centre G . La longueur du style orthogonal H est la distance du centre G de la sphère au plan.

Soit :

- Az , l'Azimut et h , la hauteur du Soleil au moment du calcul.
- x, y les coordonnées cartésiennes du point P où tombe l'ombre du point G .
- β l'angle que le rayon du Soleil passant par G forme avec le plan.
- L la distance entre le point-ombre P et G
- a, b les demi-axes de l'ellipse de l'ombre géométrique.

Considérant un Soleil ponctuel, on a les relations :

$$x = -H \cdot \tan(Az - \alpha)$$

$$y = H \cdot \frac{\tan(h)}{\cos(Az - \alpha)}$$

$$\tan(\beta) = \frac{H}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad L = \frac{H}{\cos(\beta)} = \sqrt{x^2 + y^2 + H^2}$$

° L la distance entre le point-ombre P et G

° a, b les demi-axes de l'ellipse de l'ombre géométrique.

Considérant un Soleil ponctuel, on a les relations :

$$x = -H \cdot \tan(Az - \alpha)$$

$$y = H \cdot \frac{\tan(h)}{\cos(Az - \alpha)}$$

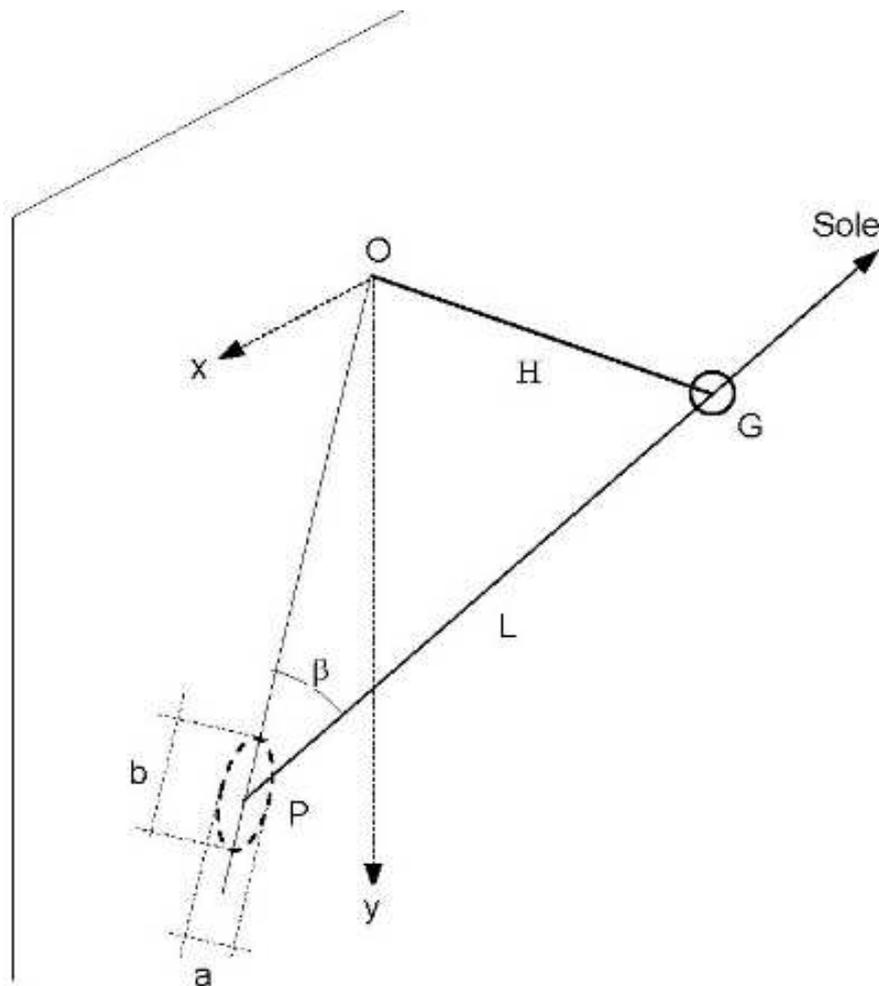
$$\tan(\beta) = \frac{H}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad L = \frac{H}{\cos(\beta)} = \sqrt{x^2 + y^2 + H^2}$$

$$a = D \quad b = \frac{D}{\sin(\beta)}$$

En raison du diamètre du Soleil l'ombre est formée d'une ellipse centrale d'ombre vraie (axes : a1, b1) et d'une ellipse externe de pénombre (axes : a2, b2) où :

$$a1 = D - L/107.5 \quad b1 = \frac{(D - L/107.5)}{\sin(\beta)} \quad a2 = D + L/107.5 \quad b2 = \frac{(D + L/107.5)}{\sin(\beta)}$$

La largeur de l'anneau de pénombre va de $\frac{L}{107.5}$ à $\frac{L}{107.5 \cdot \sin(\beta)}$



ANNEXE D

Forme de la tache de lumière produite par un trou circulaire sur un plan vertical
(Hypothèse où le Soleil est considéré comme ponctuel).

Considérons un trou circulaire réalisé dans une plaque appartenant à un plan incliné et déclinant ainsi qu'un plan vertical déclinant : les rayons du Soleil qui traversent le trou vont frapper le plan formant sur lui une tache de lumière.

Etant donné que le trou "est vu" du Soleil comme une ellipse, le pinceau formé par les rayons, a lui aussi une section normale à l'axe de forme elliptique. Enfin ce pinceau écrasé coupe le plan vertical encore dans une ellipse dont les axes ont une longueur et une inclinaison qui dépendent de manière complexe des angles entre les divers éléments : plan, plan du trou, direction des rayons du Soleil.

Supposons que:

- le Soleil soit ponctuel et que ses rayons, soient tous parallèles,
- soient F est le point de rencontre de l'axe du trou avec le plan et H la distance du centre C du trou du même plan,

- soient Az_Plan et Az_Trou, les déclinaisons du plan vertical et du plan contenant le trou

- soit α la déclinaison du plan du trou par rapport au plan vertical, c'est à dire :

$$\alpha = (Az_Plan - Az_Trou).$$

- soit : β l'inclinaison du plan du trou par rapport à la verticale, c'est-à-dire l'angle que forme l'axe du trou avec le plan horizontal : $\beta = 0^\circ$, si le trou est vertical : $\beta = 90^\circ$, si le trou est horizontal.

Considérons sur le plan, un système d'axes orthogonaux avec:

- comme origine O le pied de la normale au plan du centre du trou (style orthogonal)
- l'axe x, appartenant au plan vertical, horizontal et positif vers la gauche
- l'axe y, appartenant au plan vertical, vertical et positif vers le bas.

Un rayon de Soleil, avec pour azimuth = Az_Soleil et pour hauteur sur l'horizon = η , passant par le centre C du trou, frappera le plan vertical au point S.

Nous indiquons par γ l'azimut du rayon par rapport au plan c'est-à-dire:

$$\gamma = Az_Plan - Az_Soleil,$$

On a les résultats suivants :

° Cosinus directeur de la droite CF:

$$m1 = \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\beta); \quad m2 = \text{sen}(\beta); \\ m3 = -\text{cos}(\alpha) \cdot \text{cos}(\beta)$$

° Cosinus directeur de la droite CS:

$$n1 = \text{sen}(\gamma) \cdot \text{cos}(\eta); \quad n2 = \text{sen}(\eta); \\ n3 = -\text{cos}(\gamma) \cdot \text{cos}(\eta)$$

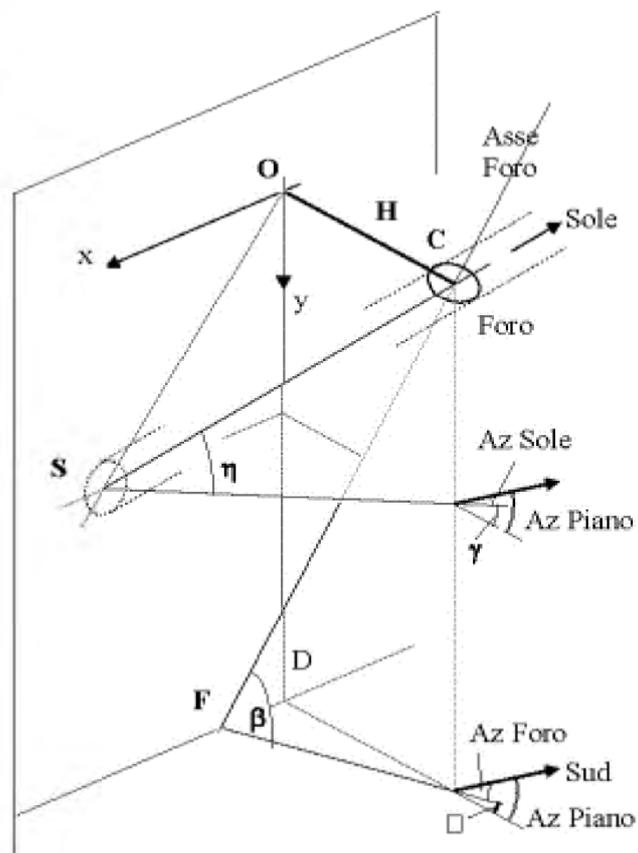
° Angle entre les droites CF et CS:

$$\text{cos}(\vartheta) = m1 \cdot n1 + m2 \cdot n2 + m3 \cdot n3$$

° Coordonnées du point F :

$$\left\{ H \cdot \tan(\alpha), H \cdot \frac{\tan(\beta)}{\cos(\alpha)} \right\} = \left\{ -H \cdot \frac{m1}{m3}, -H \cdot \frac{m2}{m3} \right\}$$

$$\left\{ H \cdot \tan(\gamma), H \cdot \frac{\tan(\eta)}{\cos(\gamma)} \right\} = \left\{ -H \cdot \frac{n1}{n3}, -H \cdot \frac{n2}{n3} \right\}$$



$$\text{Droite OS} \quad y = \frac{n2}{n1} \cdot x = \frac{\tan(\eta)}{\text{sen}(\gamma)} \cdot x \quad \text{Distance CS:} \quad \overline{CS} = \left| \frac{\rho}{n3} \right|$$

$$\text{Equation du plan du trou: } m1 \cdot x + m2 \cdot y + m3 \cdot (z - H) = 0$$

$$\text{Equation de la parallèle au trou pour C: } \frac{x}{n1} = \frac{y}{n2} = \frac{z - H}{n3}$$

Le plan : CFS contenant la normale au trou et le rayon du Soleil coupe le plan vertical longe la droite FS. Equation du plan CFS $x \cdot l1 + y \cdot l2 + (z - H) \cdot l3 = 0$ avec

$$l1 = (m2 \cdot n3 - m3 \cdot n2) / \sqrt{A}; \quad l2 = (m3 \cdot n1 - m1 \cdot n3) / \sqrt{A}; \quad l3 = (m1 \cdot n2 - m2 \cdot n1) / \sqrt{A}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{(m2 \cdot n3 - m3 \cdot n2)^2 + (m3 \cdot n1 - m1 \cdot n3)^2 + (m1 \cdot n2 - m2 \cdot n1)^2}$$

$$\text{Equation de la droite SF: } y - y_s = -\frac{l1}{l2} \cdot (x - x_s)$$

Avec quelques calculs, on trouve les formules suivantes qui permettront d'obtenir les valeurs du grand axe et du petit axe de l'ellipse dans laquelle le trou est projeté sur le plan et les inclinaisons de ces axes par rapport au système Oxy.

Cosinus directeurs de la droite normale à CS qui appartient au plan CFS:

$$j1 = n3 \cdot l2 - n2 \cdot l3; \quad j2 = n1 \cdot l3 - n3 \cdot l1; \quad j3 = n2 \cdot l1 - n1 \cdot l2$$

$$\text{Angle auxiliaire } \tau : \quad \tan(2 \cdot \tau) = \frac{\cos(\theta) \cdot l3 \cdot j3}{\text{sen}^2(\theta) \cdot n3^2 + l3^2 - \cos^2(\theta) \cdot j3^2}$$

La relation précédente donne deux valeurs: τ_1 et $(90 - \tau_1)$. L'une sert pour déterminer la valeur du petit axe et l'autre pour le grand axe de l'ellipse image.

Si (xM, yM) sont les coordonnées d'un de ces points, on trouve :

$$xM - xS = -D \cdot \cos(\tau) \cdot \frac{j2}{n3} + D \cdot \text{sen}(\tau) \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{(j1 \cdot n3 - j3 \cdot n1)}{n3}$$

$$yM - yS = D \cdot \cos(\tau) \cdot \frac{j1}{n3} + D \cdot \text{sen}(\tau) \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{(j2 \cdot n3 - j3 \cdot n2)}{n3}$$

où : D est le demi-diamètre du trou et θ est l'angle entre le rayon et la parallèle au trou.

La longueur de l'axe est : $\sqrt{(xM - xS)^2 + (yM - yS)^2}$

L'inclinaison est : $= \frac{yM - yS}{xM - xS}$

Exemple :

$$\alpha = 20^\circ; \quad \beta = 30^\circ; \quad \gamma = 40^\circ; \quad \eta = 60^\circ; \quad D = 1$$

$$\tau1 = -14.0036^\circ; \quad \tau2 = +75.9964^\circ \quad \theta = 32.8692^\circ$$

$$\text{Grand axe} = 2.2107 \text{ incliné de : } +67.5^\circ \quad \text{Petit axe} = 0.9919 \text{ incliné de } -22.5^\circ$$

On peut démontrer la propriété suivant: le diamètre d'un trou parallèle au plan vertical est projeté d'une longueur inchangée D. La projection sur le plan vertical de ce diamètre - long D - passe par le point : S et est perpendiculaire à la ligne : CF.

Formules Approximatives

Si l'inclinaison des rayons du Soleil sur le plan n'est pas très importante (inférieure à 20 - 30° environ) les formules suivantes donnent des valeurs des axes de l'ellipse et de ses pentes suffisamment proches des valeurs exactes (erreur inférieure à environ 10% sur les longueurs des axes et à environ 10° sur les pentes).

$$\text{Petit axe} = D \quad \text{Grand axe} = D \cdot \frac{\cos(\eta - \beta)}{\cos(\eta) \cdot \cos(\gamma)} \quad \text{Pente } \pi: \quad \tan(\pi) = \frac{\tan(\eta)}{\text{sen}(\gamma)}$$

Cette pente est celle de la droite OS et donc l'ellipse a environ son grand axe sur cette droite.

Exemple :

Avec les données de l'exemple précédent et avec les formules approximatives on trouve les valeurs :

Grand axe = 2.26103 avec une erreur de 2.27%; inclinaison = 69.6° avec une erreur de 2.1°.
Petit axe = 1.00 avec une erreur de 0.81%.

Cas particulier – Azimut du plan vertical, du trou et du Soleil égaux : $\alpha = \gamma = 0$

Si le plan du trou a la même déclinaison que le plan vertical, et que le Soleil "est en face" du plan, c'est-à-dire que ses rayons appartiennent à un plan normal au plan vertical, alors on a: $\alpha = \gamma = 0$

Dans ce cas l'angle θ entre l'axe du trou et le rayon du Soleil vaut : $\theta = \eta - \beta$ (avec $\eta - \beta$ en valeur absolue) , la tache de lumière sur le plan est une ellipse avec un petit axe mineur horizontal de longueur = D et le grand axe vertical de longueur $D \cdot \frac{\cos(\eta - \beta)}{\cos(\eta)}$

Un cas comme celui-ci se présente lorsque le plan et le trou sont orientés vers le Sud et que le Soleil est sur le Méridien pour lequel: $\eta = 90 - \varphi + \delta$. Si l'axe du trou se trouve sur l'Equateur céleste $\beta = 90 - \varphi$ et donc l'axe vertical a une longueur $= D \cdot \frac{\cos(\delta)}{\sin(\varphi - \delta)}$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Minnaert – The nature of light and colour – Dover Publ. – New York 1954
- [2] Gianni Ferrari – Lo Shadow Sharpener – Gnomonica Italiana n. 3 – Ottobre 2002 – p. 32-35 The Shadow Sharpener – The Compendium – December 2002 – p. 6-11
- [3] Gianni Ferrari – L'ombra e la penombra di un elemento rettilineo – Gnomonica Italiana n. 4 – Febbraio 2003 – pagg. 34-38 The shadow & penumbra of a rectilinear element -The Compendium - March 2003 - p. 3-8
- [4] Gianni Ferrari – Il foro delle meridiane a camera oscura. Considerazioni – Atti del XII Seminario Nazionale di Gnomonica – Rocca di Papa 2003 – p. 83-98
- [5] Gianni Ferrari – L'immagine del Sole nelle meridiane a camera oscura – Giornale di Astronomia – Vol. 32 – n. 1 – Marzo 2006 – p. 37-45





Ombre et pénombre élément rectiligne

Gianni Ferrari

Voici quelques observations relatives à l'ombre et à la pénombre d'un élément rectiligne rapportées à la problématique d'un style de cadran solaire.

Supposons que nous ayons un "élément" rectiligne qui, éclairé par la lumière du Soleil, projette son ombre sur un plan se trouvant à une certaine distance, par exemple sur le plan horizontal, et supposons également, pour simplifier, que ce soit le bord supérieur d'un mur vertical, d'une corniche ou d'un grand style triangulaire de cadran solaire monumental.

Si le Soleil avait un diamètre infinitésimal, c'est-à-dire réduit à un point, "l'élément" produirait seulement une ombre et il y aurait une ligne nette de séparation entre la zone lumineuse et la zone d'ombre. J'appellerai cette ligne "ombre géométrique" ou "théorique".

Par contre en raison du diamètre fini du Soleil entre la partie du plan complètement éclairée et celle complètement dans l'ombre on va avoir une zone de pénombre, dans laquelle l'éclairement varie graduellement.

Dans le cas le plus simple, pour lequel le plan est normal aux

rayons du Soleil, la largeur de cette zone est $L_R * \Phi_{rad}$ où L_R est la distance entre l'élément rectiligne et le plan et Φ l'angle sous-tendu par le disque solaire en radians ($\Phi \approx 32' \approx 1/107rad$).

Par définition, une surface est en pénombre quand elle est éclairée seulement partiellement et quand d'un point de celle-ci, "on ne voit" qu'une partie du disque solaire. Si nous pouvions mettre l'oeil en différents points de la zone en pénombre nous pourrions voir le disque solaire assombri comme en Fig. 2.

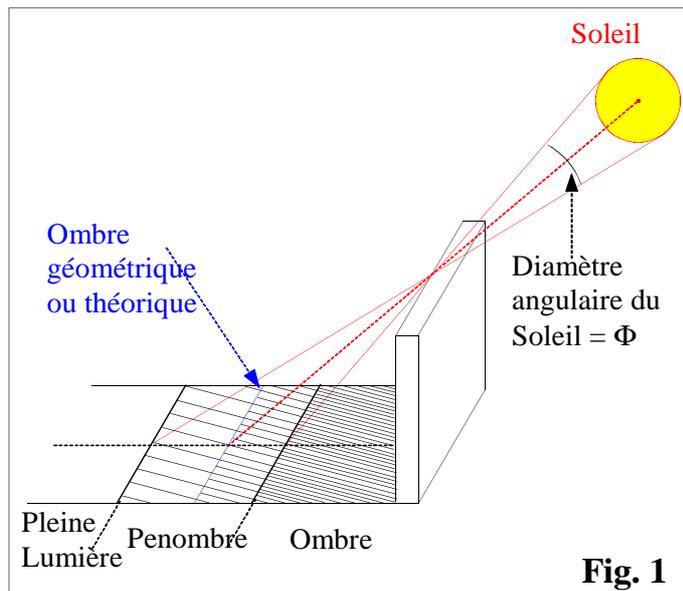


Fig. 1

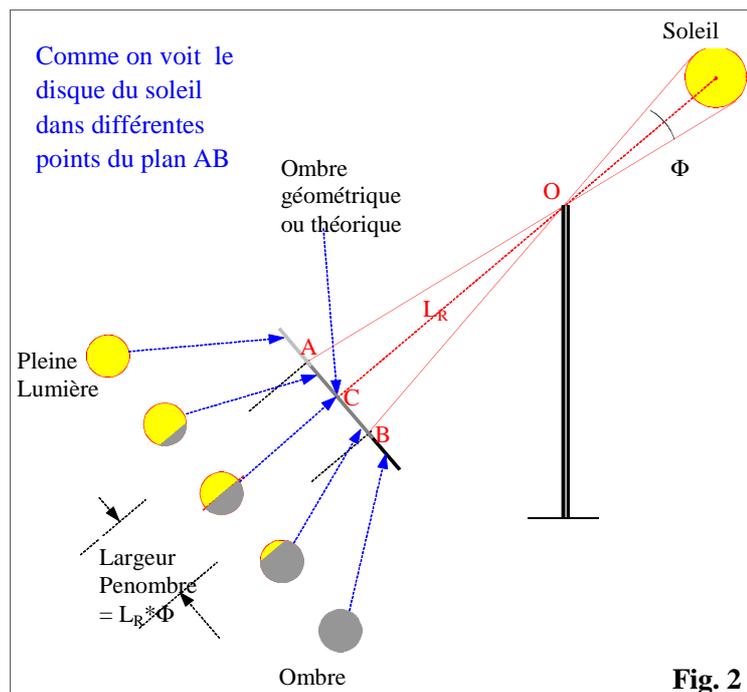


Fig. 2

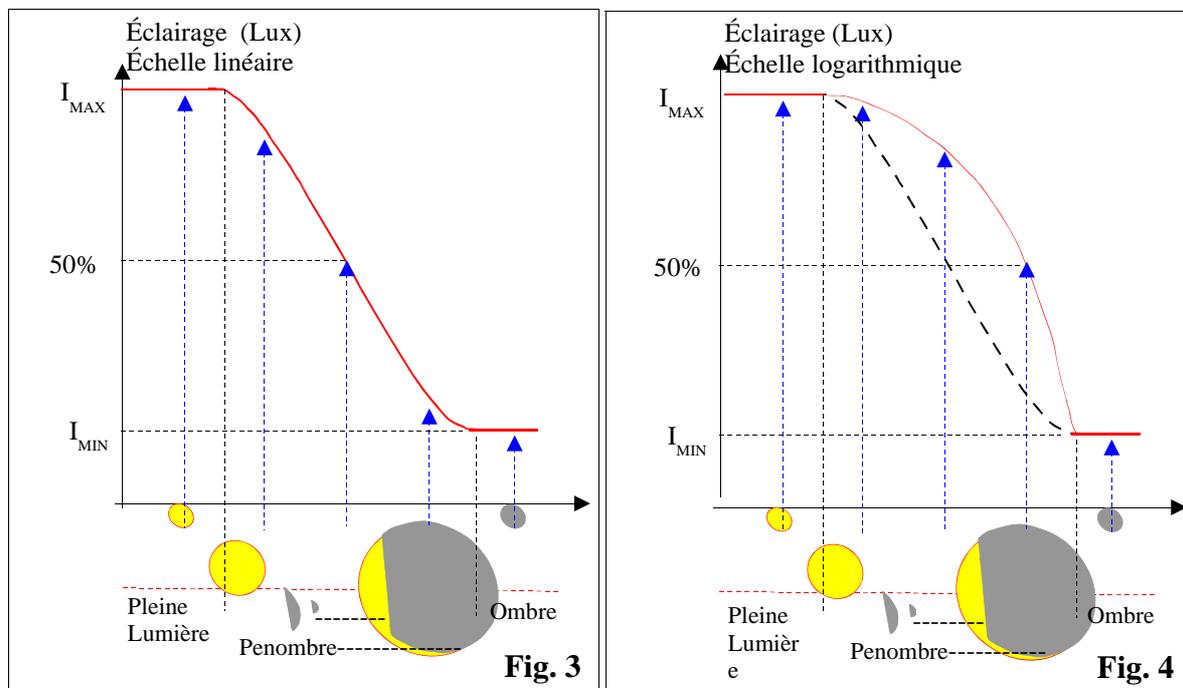
Au point C, centre de la pénombre et intersection de la ligne de l'ombre géométrique avec le plan, on pourrait voir, assombrie, exactement la moitié du disque solaire.

La courbe de l'éclairement dans la bande de pénombre passe de la valeur maximum I_{MAX} , que l'on a sur la zone du plan en lumière pleine, à la valeur minimum I_{MIN} que l'on a dans la zone en ombre pleine.

La valeur I_{MAX} est due à la lumière qui vient directement du Soleil et dépend, de sa hauteur sur l'horizon, d'un éventuel ciel voilé, de la présence de poussières et de vapeur dans l'atmosphère, enfin de l'angle entre la normale au plan et la direction des rayons solaires. Les valeurs typiques vont de 30000 à 80000 voir 100000 lux.

La valeur I_{MIN} est l'éclairement indirect dû principalement à la lumière réfléchiée par la partie libre du ciel visible de la zone considérée du plan, par la lumière réfléchiée par les nuages et les murs des éventuels bâtiments environnants, etc. Sa valeur peut changer en fonction d'un ciel voilé, de la situation atmosphérique (nuages), de la présence de végétation empêchant une vision directe d'une partie du ciel, ou encore des murs et des édifices environnants, de leurs caractéristiques de réflexion et de la couleur de leurs surfaces, etc. Les valeurs d' I_{MIN} changent de 1/10 à 1/60 des valeurs d' I_{MAX} .

La courbe théorique de l'éclairement dans la zone de pénombre est représentée en Fig. 3.



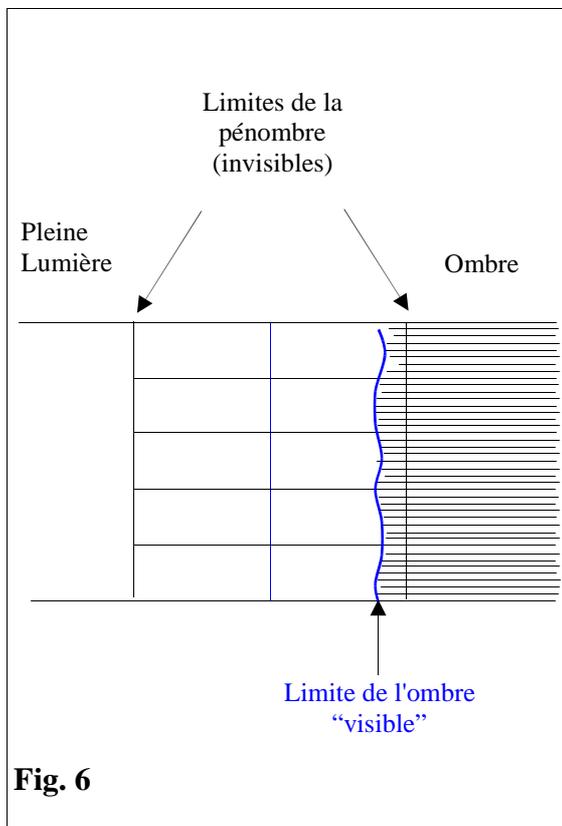
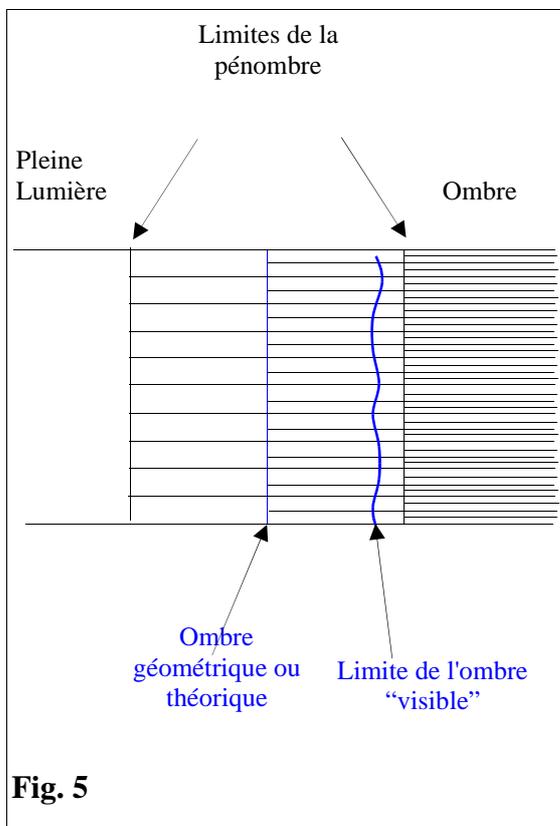
Où se termine l'ombre ?

Maintenant le problème qui se présente consiste à déterminer où notre oeil "voit" le bord de l'ombre, c'est-à-dire où l'ombre "se termine".

Selon la loi de Fechner¹ la sensation produite par une cause externe sur un organe de nos sens (stimulus) est proportionnelle au logarithme de l'intensité de la stimulation qui l'a produite.

¹ La loi de Weber-Fechner (~ 1870) est une loi psycho-physique approchée qui affirme que le degré de réponse d'un organe sensoriel, c'est-à-dire la sensation produite par celui-ci, est proportionnelle au logarithme de l'intensité du stimulus qui a agi sur l'organe ou bien, que la plus petite variation appréciable dans la sensation est provoquée par un changement constant de pourcentage du stimulus. Pour la vision ([brillance](#) d'une surface blanche) ce pourcentage est de 1.6% (1/60) environ. Cette loi approximative est de nature statistique. Elle a une importance pratique considérable particulièrement en optique et acoustique.

Pour cette raison, en regardant la bande de pénombre, notre oeil "ne voit pas" l'intensité lumineuse, qui diminue selon la courbe de la Fig. 3, mais il la perçoit selon une courbe du type de celle représentée en Fig. 4. On peut dire que nous voyons arriver le passage de la lumière à l'ombre plus brusquement que celui "mesuré" par un instrument photoélectrique et ce changement brusque est dans une zone assez proche du point où se termine la pénombre.



La Fig. 5 montre la limite "visible" de l'ombre qui se trouve, comme il a été dit, déplacée vers l'ombre pleine par rapport à la ligne de l'ombre géométrique. La Fig. 6 représente la zone de pénombre comme "elle apparaît" à notre oeil. En pratique la pénombre est presque invisible et l'on perçoit une brusque variation d'intensité lumineuse entre la zone en lumière pleine et celle en ombre totale.

La courbe de la "sensation" représentée en Fig. 4 (produite par la "stimulation" de la Fig. 3) dépend beaucoup du rapport entre les éclaircissements maximum et minimum. Si ce rapport augmente (et en particulier si IMIN diminue) l'infléchissement de la courbe s'accroît, c'est-à-dire que la courbe reste presque horizontale sur un grand espace pour descendre brusquement.

Au contraire si le rapport diminue (c'est-à-dire si IMIN augmente), le cours tend à s'atténuer et à se rapprocher de la courbe théorique linéaire (Fig 7). La valeur de l'éclaircissement IMIN dépend beaucoup des conditions atmosphériques. En présence de brume ou de nuages blancs, sa valeur augmente (l'ombre est plus éclairée), et donc la limite "visible" de l'ombre se déplace loin de la zone assombrie et plus près de la ligne de l'ombre géométrique.

On trouve que la limite "visible" de l'ombre est déplacée par rapport à la ligne théorique d'une quantité qui peut varier d'environ 35% à 45% de la largeur totale de la pénombre (c'est-à-dire 70% à 90% de la largeur de la moitié de la pénombre)

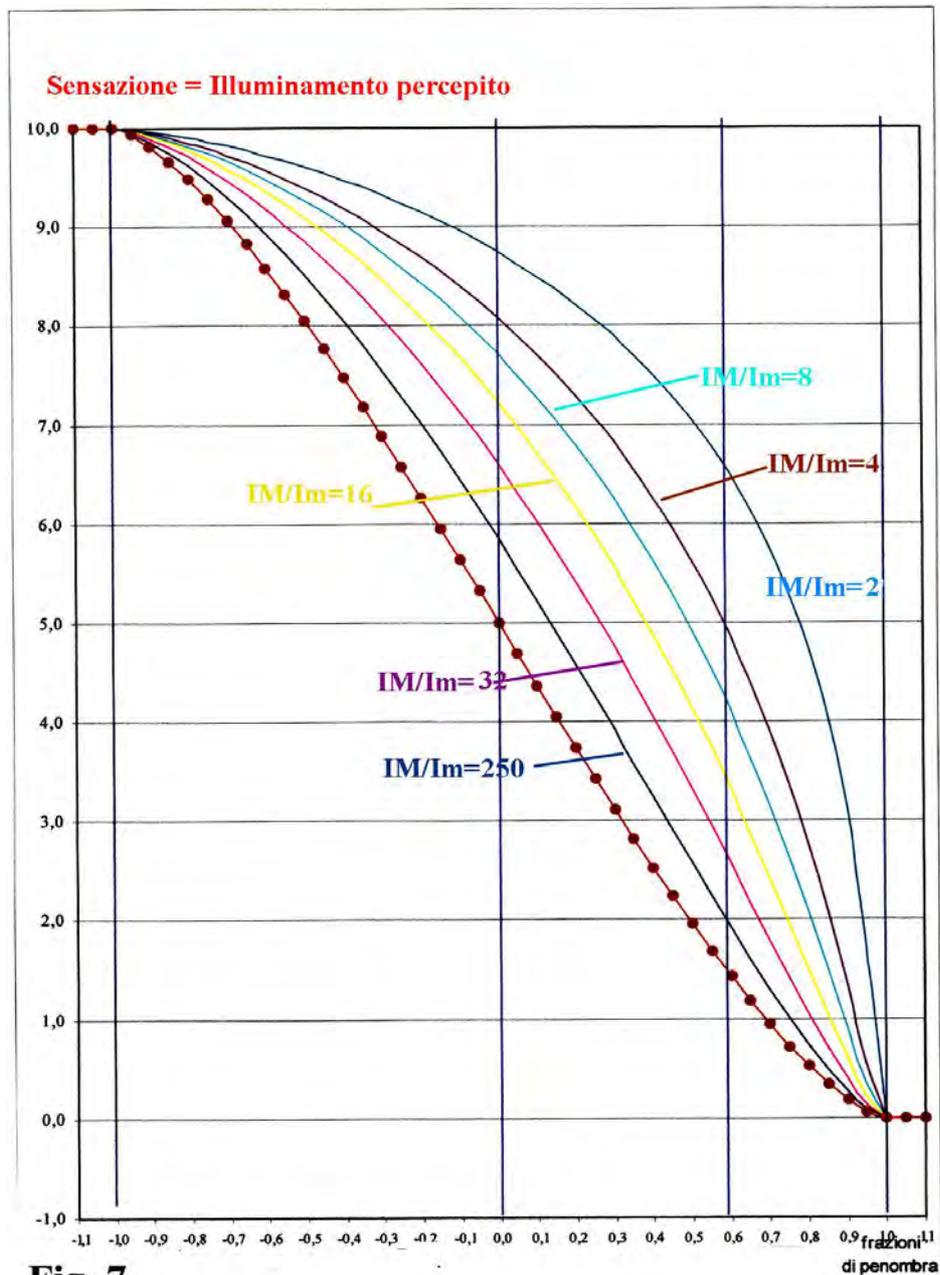


Fig. 7

Si sur un plan (supposé horizontal) a été tracée une ligne horaire², par exemple pour l'heure H, à cette heure H, la ligne de l'ombre géométrique coïncidera avec la ligne horaire même. Cependant un observateur verra la fin de l'ombre décalée par rapport à cette ligne et "il lira" une heure légèrement différente. Pour les heures du matin, il lira une valeur plus grande de H et affirmera que le cadran "avance".

De manière différente, l'observateur voyant la ligne de l'ombre coïncider avec la ligne horaire en déduit qu'il est l'heure H, alors qu'en réalité la ligne de l'ombre géométrique est "en arrière" (toujours dans le cas des heures du matin).

Ce phénomène fait qu'un cadran solaire "avance" le matin et "retarde" l'après-midi. Notons cependant que ces variations sont modestes. En effet le Soleil se déplace de la valeur de son diamètre en environ 120-128 sec. Le retard pourra varier de 35% à 45% de cette valeur, donc de 40 à 58 sec.

² Ligne calculée comme habituellement en considérant le centre du soleil.

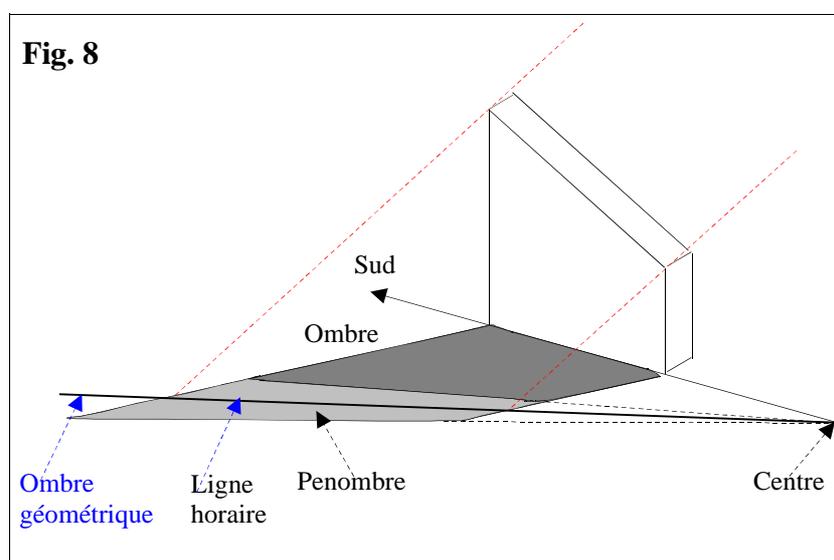
Résultats expérimentaux

de nombreux tests ont été réalisés, par l'auteur même même, pour déterminer expérimentalement la position dans laquelle est perçue la ligne limite de l'ombre par rapport à celle de l'ombre géométrique.

Pour de nombreux essais, un Shadow Sharpener³ a été utilisé pour déterminer la position de la ligne de l'ombre théorique. De nombreux résultats, obtenus par des amateurs de gnomonique, ont été rapportés dans la "Sundial Mailing List" et sont en accord complet avec les considérations théoriques décrites ici.

Par exemple, Pete S. (USA) a trouvé un retard de 53 sec ou de 0.22° , correspondant à un déplacement de 42% de l'amplitude de la pénombre. B. Walton (USA) a trouvé un retard de 40 sec, correspondant à un déplacement de 35%. B. Walton a trouvé également, en utilisant un exposimètre photographique, que le rapport IMAX/IMIN atteint la valeur d'environ 120 avec un ciel serein, et de 30 avec un ciel nuageux.

Cas des cadrans solaires horizontaux de grandes dimensions



Supposons maintenant que l'élément rectiligne décrit au début de l'article soit un style polaire dont l'ombre est utilisée pour déterminer l'heure en comparant son bord avec les lignes horaires tracées sur un plan horizontal⁴. Le calcul des cadrans solaires se faisant toujours en utilisant la position du centre du Soleil dans le ciel, à une heure solaire vraie locale, l'ombre théorique ou géométrique du bord du style coïncide exactement avec la ligne horaire tracée pour l'heure considérée.

Nous sommes donc dans le cas où l'ombre du bord de l'élément linéaire qui forme le gnomon coïnciderait, aux différentes heures, avec les lignes horaires tracées sur le plan seulement si le diamètre du Soleil était ponctuel. Dans la réalité l'élément linéaire produit une "bande" de pénombre qui, dans le cas de cadrans horizontaux, a la forme d'un petit angle dont la bissectrice est l'ombre géométrique elle-même (Fig. 8) et dont l'ouverture (toujours inférieure au degré) change à chaque heure (Fig. 9).

³ Un Shadow Sharpener est un dispositif qui permet de visualiser l'ombre d'un objet lointain sans être perturbé par la pénombre. Le plus simple SS est constitué par un trou sténopéique qui produit l'image du Soleil et celle d'un objet mise entre le Soleil et l'observateur.

⁴ Par simplicité je ferai référence aux seuls cadrans horizontaux. Le raisonnement peut être évidemment étendu aux autres positions du plan. J'ai supposé partout être dans une localité de 40° de latitude.

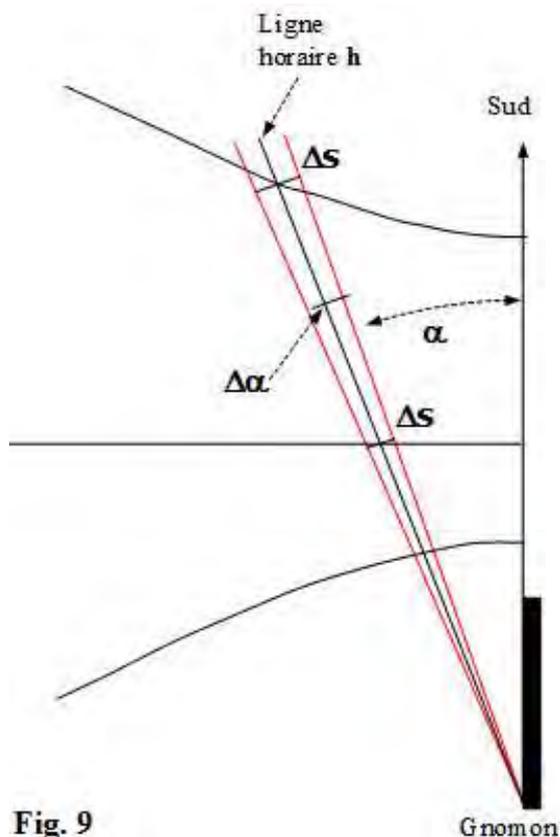


Fig. 9

Les valeurs de cet angle de pénombre et ses dimensions transversales, exprimées en millièmes de la longueur du style orthogonal, aux Équinoxes et au Solstice d'hiver, sont reportées dans le tableau ci-dessous.

Cadran solaire horizontal - Latitude = 40° (Fig. 9)

Heure	Δα minutes d'arc	Δs –	Δs –
		Équinoxes	Solst. Hiver
1/1000 ortho-style			
12	20.6	12.1	19.0
13 – 11	21.4	12.9	20.5
14 – 10	24.1	15.2	26.2
15 – 9	29.1	20.5	41.9
16 – 8	36.7	32.5	118.8
17 – 7	45.4	69.7	----

De l'examen de ces données on déduit immédiatement que pour les cadrans solaires avec un gnomon en forme de voile de petites dimensions - avec un ortho- style

jusqu'à quelques décimètres - la largeur de la pénombre est presque toujours inférieure à la largeur des lignes tracées sur le plan et donc il est pratiquement impossible de voir la différence entre la position de l'ombre théorique et la limite "visible" de l'ombre.

Par exemple avec une voile de 30 cm, à 9 heures, la largeur de la pénombre vaut 6,1 mm aux Équinoxes et 12,6 mm au Solstice d'hiver.

Avec des cadrans solaires horizontaux monumentaux, la largeur de la pénombre devient par contre assez grande et il faut bien distinguer les instants auxquels le centre de la pénombre et le "bord" visible de l'ombre même passent sur la ligne horaire tracée.

Par exemple avec un style orthogonal de 4.0 m, à 9 heures, la largeur de la pénombre vaut 82 mm aux Équinoxes et 168 mm au Solstice d'hiver. A 11 heures ces grandeurs se réduisent à 51 et à 81 mm.

Donc, comme il a déjà été mentionné, dans le cas de grands cadrans solaires l'instant auquel "on voit" l'ombre coïncider avec le centre de la ligne horaire diffère de l'heure pour laquelle la ligne a été calculée d'une valeur allant de 40 à 60 secondes environ, en avance ou en retard.

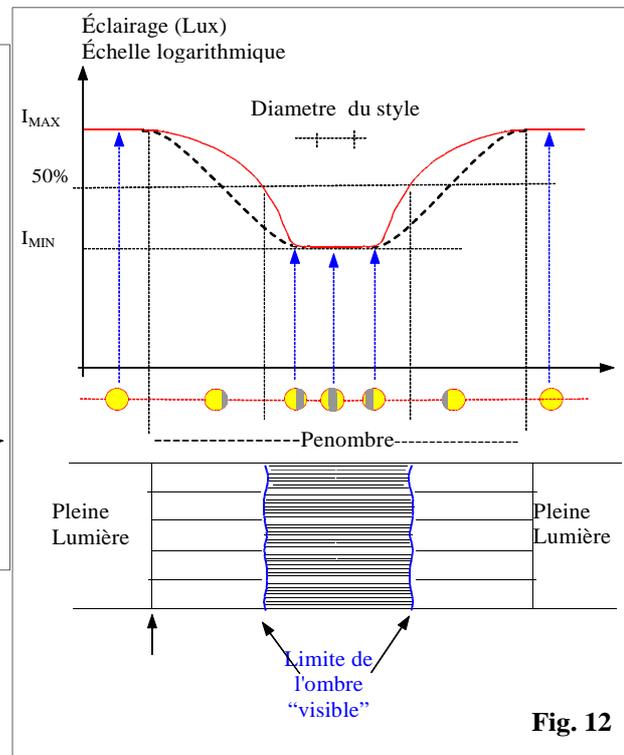
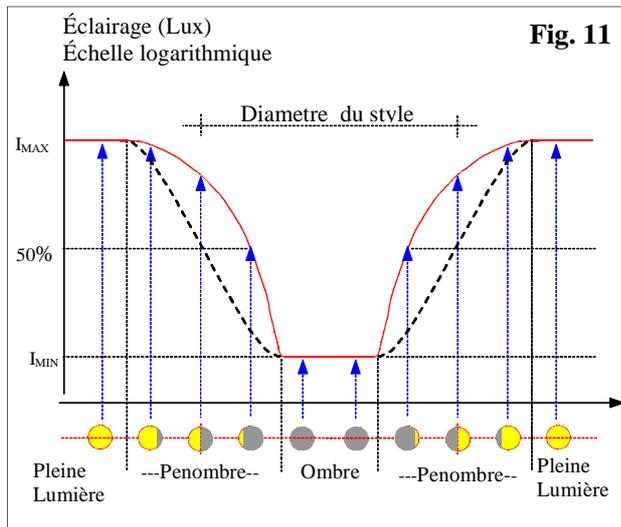


Fig 10

Quelques exemples sont illustrés dans la Fig. 10 : le grand cadran solaire équatorial de Jaipur en Inde avec un rayon de 15,1 m et une largeur moyenne de la pénombre de 14 cm environ et les gnomons de deux grands cadrans solaires horizontaux à Singleton (Australie) et à Pinawa (Manitoba, Canada).

Gnomon sphérique ou à bâton.

Le phénomène décrit se retrouve évidemment quand l'élément qui fait ombre est une style ou une sphère. Dans ce cas la symétrie de l'ombre permet avec une relative facilité de trouver son centre et donc de déterminer l'instant auquel il tombe sur les lignes horaires (Fig 11).



Il faudrait, pour plus de précision, faire quelques considérations sur le changement de l' "obscurité" de l'ombre en fonction de la distance entre l'élément linéaire et le plan. En effet quand cette distance devient grande (supérieure à 200-300 fois le diamètre du style) il n'y a plus de zone d'ombre totale et la luminosité de la zone centrale augmente.

Le contraste entre la zone éclairée et la zone assombrie vient donc à diminuer en rendant à la fin presque impossible d'observer l'ombre du style même. (Fig. 12). Un exemple de ce phénomène est la disparition de l'ombre des câbles électriques suspendus en bordure des routes quand leur distance au sol devient trop grande.

Conclusions

La possibilité pour un cadran solaire conventionnel d'indiquer l'heure avec précision est généralement compromise, dans le cas de petits cadrans, par la largeur des lignes et l'imprécision du tracé. Dans le cas des cadrans de grandes dimensions, s'ajoute la présence de pénombre due au diamètre fini du Soleil.

Dans le projet de grands cadrans solaires il faudrait, pour cette raison, considérer l'effet de la pénombre, et donc, utiliser des styles cylindriques, sphériques ou autres éléments symétriques permettant de déterminer avec une bonne précision le centre de leur ombre.

Gianni Ferrari gferid@gmail.com





Cadran solaire à chambre obscure

Gianni Ferrari

Sous le titre initial de « Paramètres d'un cadran solaire à chambre obscure : calculs, vérification des alignements, erreurs » sont présentées et analysées les erreurs qui peuvent apparaître dans le cas d'un cadran solaire classique à chambre obscure. Erreurs qui peuvent provenir de l'imprécision des alignements, de la réalisation du trou (œilleton), des mesures erronées utilisées lors de la réalisation du projet ou de restaurations mal exécutées, de modifications mal calculées et arbitraires.

Sont données, en outre, les relations mathématiques pour le calcul de quelques paramètres fondamentaux du cadran solaire.

La problématique

Dans les cadrans solaires classiques à chambre obscure, il est parfois possible de relever de petites différences entre l'instant du midi vrai local et celui du passage du centre de l'image du Soleil sur la ligne méridienne¹.

Les causes les plus fréquentes de ces imprécisions altérant légèrement le fonctionnement du cadran solaire sont soit des erreurs d'alignement de la ligne méridienne et de la réalisation de l'œilleton, soit des imprécisions dans les mesures utilisées pour le projet, soit encore, et pour une grande part, des erreurs dues aux restaurations mal exécutées et aux modifications mal calculées ou arbitraires².

Par la suite j'utiliserai l'adjectif **existant** pour déterminer les éléments du cadran solaire qui peuvent s'observer et se mesurer actuellement. J'appellerai donc "*trou existant*" le trou à travers lequel entrent les rayons du Soleil "aujourd'hui", "*ligne méridienne existante*" la ligne méridienne dans son état actuel et pour lequel il est possible de contrôler le passage de l'image du Soleil.

Évidemment les éléments présents actuellement ne coïncident pas toujours exactement avec ceux pensés et réalisés au moment de la construction du cadran solaire.

J'appellerai "*ligne méridienne idéale*" la ligne méridienne qu'il faudrait tracer pour observer, avec le trou existant, le passage du Soleil exactement à l'instant du Midi Vrai. La ligne méridienne idéale est donc l'intersection du plan horizontal et du plan méridien passant par le centre du trou existant.

Définissons:

- φ la latitude du lieu;
- F le point qui détermine le centre du trou gnomonique **existant** (actuel);
- O le point de rencontre de la ligne verticale du point F avec le plan horizontal, c'est-à-dire la projection de F sur le plan horizontal (le sol)³. Le point O est un point connu puisqu'il peut être obtenu soit avec un fil à plomb passant par F, soit en utilisant des instruments plus complexes;

¹ Pour la définition et la détermination correcte du centre, voir en Appendice.

² La lente variation de l'inclinaison de l'Écliptique et une éventuelle erreur sur la valeur de la Latitude du lieu produisent des modifications sur la longueur de la ligne méridienne, mais ils n'influencent pas l'instant du passage du centre de l'image du Soleil sur la ligne même.

³ On suppose toujours que le plan est horizontal et donc que la ligne méridienne existante est elle-même parfaitement horizontale, ce qui n'est pas toujours exact en raison des possibles affaissements induits par le temps et les restaurations du dallage.

– ρ , la distance entre les points F et O, c'est-à-dire la hauteur du trou gnomonique existant par rapport au plan horizontal (ortho-trou).

Si la ligne méridienne est tracée correctement, on doit avoir:

- le point O comme origine pour la mesure des distances. Si la ligne méridienne débute plus au Nord de ce point, son prolongement doit passer obligatoirement par O;
- la coïncidence exacte de l'intersection entre le plan méridien passant par F et le plan horizontal, c'est-à-dire avec la droite de direction Sud-Nord géographique passant par O (ligne méridienne idéale) (Fig. 1).

Si ces conditions sont satisfaites, l'instant auquel le centre de l'image du Soleil produite par l'ocillon F passe la ligne méridienne correspondra exactement au Midi Vraie Local.

Si la ligne méridienne existante n'a pas été tracée correctement, le passage du centre de l'image du Soleil sur la ligne se produira chaque jour de l'année soit en retard, soit en avance par rapport au Midi Vrai. La valeur de ces écarts est fonction de l'ensemble des erreurs commises dans le tracé, c'est-à-dire de l'ensemble des écarts entre la ligne méridienne existante et celle "idéale".

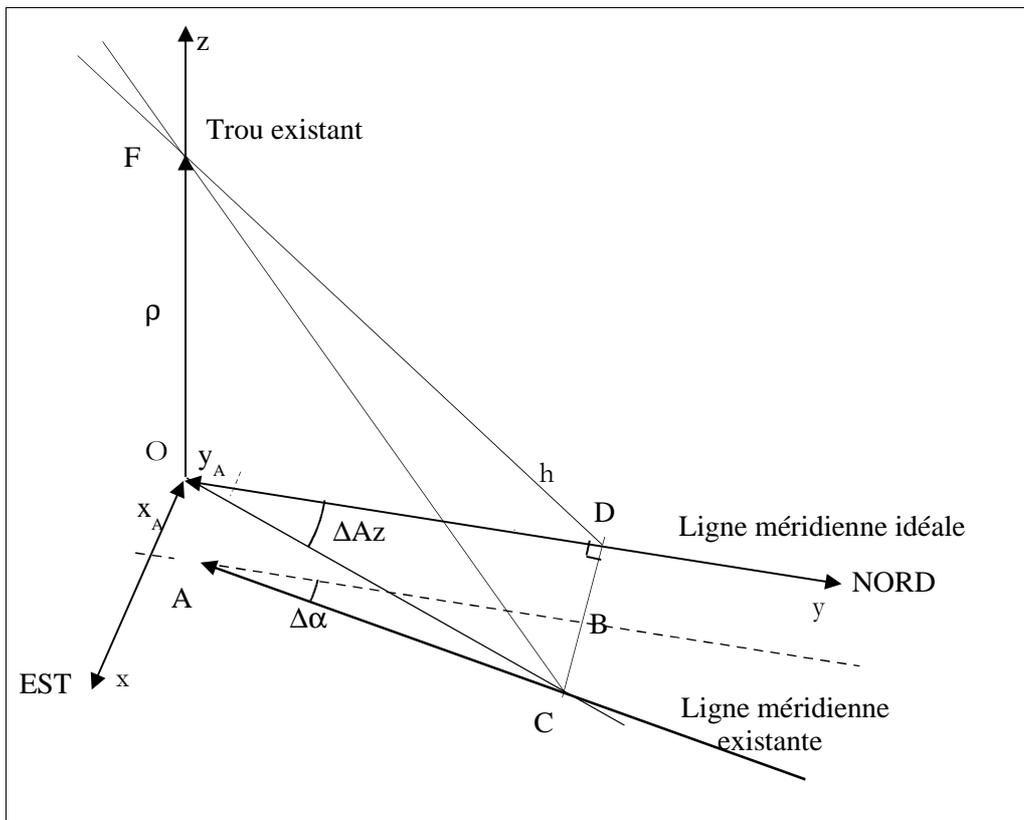


Figure 1

Les erreurs que je prendrai en considération sont:

- un possible déplacement du point A "départ" de la ligne méridienne dû à une erreur sur la position du pied de la verticale du trou F lors du tracé, un déplacement du trou F résultant d'une restauration, ou enfin, une restauration incorrecte de la ligne méridienne,
- une possible rotation de la ligne méridienne existante par rapport à la ligne Sud-Nord, due à une mauvaise orientation de la ligne.

Je n'examinerai pas le cas d'une erreur dans la mesure de la hauteur du trou par rapport au sol horizontal, que je considérerai correcte.

Définissons:

Oxyz, système de coordonnées cartésiennes avec:

- le point O comme origine, il est le pied de la verticale passant par le centre du trou F sur le plan horizontal et correspond au "départ" de la ligne méridienne idéale⁴;
- x, axe de la direction Est-Ouest géographique, avec x croissant vers l'Est;
- y, axe de la ligne méridienne (idéale), c'est-à-dire de direction Sud-Nord géographique avec valeurs croissantes en allant vers le Nord;
- z, axe vertical, positif vers le haut.

Le trou F existant a donc pour coordonnées (0, 0, ρ) et le plan méridien coïncide avec le plan yz.

- A est le point de départ de la ligne méridienne existante à ce jour. Ses coordonnées sont (x_A, y_A, 0)
Si le Trou existant est plus à l'Ouest de la ligne méridienne existante, alors x_A > 0 .
Si le Trou existant est plus au Sud du point A (comme dans la Fig. 1), début du tracé de la ligne méridienne existante, alors y_A > 0 .
- Δα est l'angle, **en radians**, que la ligne méridienne existante forme avec l'axe y. C'est-à-dire avec la direction Sud-Nord correcte. L'angle est positif si la ligne existante est tournée en sens horaire ou Nord-Est.
- ΔAz, Δω sont respectivement l'azimut et l'angle horaire du centre du Soleil à l'instant du passage sur la ligne existante, mesurés en radians.
- δ est la valeur de la déclinaison "apparente" du Soleil, tenant compte de la réfraction. Elle est donc donnée par la somme de la déclinaison δ_i "théorique" et de la réfraction r.
- h est la valeur de la hauteur "apparente" du Soleil, qui tient compte de la réfraction.
- r est la valeur de la réfraction atmosphérique.

Hypothèses

Je suppose que:

- les erreurs du tracé (x_A, y_A, Δα) sont très petits;
- les instants pour lesquels le centre de l'image du Soleil tombe sur la ligne méridienne existante et sur la ligne idéale sont très voisins. C'est-à-dire que les valeurs de ΔAz et Δω sont très petites;
- la hauteur apparente du Soleil, à l'instant où l'image traverse la ligne méridienne existante, peut être considérée égale à la hauteur de l'instant du passage au méridien $b = 90^\circ - \varphi + \delta$, δ étant la déclinaison apparente du Soleil;
- la courbe parcourue par le centre de l'image du Soleil à proximité de l'intersection avec la méridienne peut être considérée comme un segment perpendiculaire à la ligne méridienne idéale, c'est-à-dire disposée exactement dans la direction Est-Ouest ou axe x.

Relations entre les variables

De la Fig. 1 nous tirons: $b = 90^\circ - \varphi + \delta$

$$\overline{OD} = \frac{\rho}{\tan(b)} = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta) \quad \overline{AB} = \overline{OD} - y_A$$

$$\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \tan(\Delta\alpha) \cong (\overline{OD} - y_A) \cdot \Delta\alpha = [\rho \cdot \tan(\varphi - \delta) - y_A] \cdot \Delta\alpha$$

$$\overline{BC} = \overline{DC} - \overline{BD} = \overline{OD} \cdot \tan(\Delta A\hat{x}) - x_A$$

$$\overline{DC} = \overline{OD} \cdot \tan(\Delta A\hat{x}) = x_A + \overline{BC} \cong x_A + [\overline{OD} - y_A] \cdot \Delta\alpha$$

⁴ Même si le trou F existant ne coïncide pas avec le trou original, j'ai retenu l'origine du système comme étant au pied de F et non au point A, départ de la ligne méridienne existante. En effet :

- les valeurs de l'Azimut et de l'angle horaire du Soleil sont référées au plan méridien passant par le trou existant, qui ainsi coïncide avec un plan coordonné ;
- l'instant du passage coïncide avec celui de passage sur un axe coordonné (y), c'est-à-dire un axe coordonné correspondant à la ligne méridienne idéale ;
- le point O est connu.

Si nous dérivons les deux membres de la relation classique:

$$\sin(\omega) \cdot \cos(\delta) = \cos(h) \cdot \sin(Az)$$

par rapport à Az^5 et supposons δ et h constants à proximité de midi, avec Az , ω , ΔAz et $\Delta \omega$ en radians, nous obtenons:

$$\frac{dAz}{d\omega} = \frac{\cos(\omega) \cdot \cos(\delta)}{\cos(Az) \cdot \cos(h)} \quad \text{et, en supposant } Az \cong \omega \cong 0,$$

$$\frac{\Delta Az}{\Delta \omega} \cong \frac{\cos(\delta)}{\cos(h)} \cong \frac{\cos(\delta)}{\sin(\varphi - \delta)}$$

Finalement de $\overline{DC} = \overline{OD} \cdot \tan(\Delta Az) \cong \overline{OD} \cdot \Delta Az$ on tire:

$$\Delta Az = \frac{x_A + (\overline{OD} - y_A) \cdot \Delta \alpha}{\overline{OD}} = \frac{x_A - y_A \cdot \Delta \alpha}{\rho \cdot \tan(\varphi - \delta)} + \Delta \alpha \quad \text{et ensuite:}$$

$$\Delta \omega = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \cdot \Delta Az = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \cdot \Delta \alpha + \frac{x_A - y_A \cdot \Delta \alpha}{\rho} \cdot \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \quad (1)$$

et:

$$\Delta \alpha = \frac{\cos(\delta) \cdot \Delta \omega - \frac{x_A}{\rho} \cdot \cos(\varphi - \delta)}{\sin(\varphi - \delta) - \frac{y_A}{\rho} \cdot \cos(\varphi - \delta)} \quad (2)$$

Enfin nous obtenons:

$$AC = \frac{AB}{\cos(\Delta \alpha)} = \frac{\rho \cdot \tan(\varphi - \delta) - y_A}{\cos(\Delta \alpha)} \approx [\rho \cdot \tan(\varphi - \delta) - y_A] \cdot \left(1 + \frac{(\Delta \alpha)^2}{2} - \dots \right) \text{ c'est-à-dire}$$

$$AC = [\rho \cdot \tan(\varphi - \delta) - y_A] \cdot \left[1 + \frac{(\Delta \alpha)^2}{2} + \text{termes négligeables} \right] \quad (3)$$

Retard dans le passage de l'image du Soleil sur la ligne existante

Dans les précédentes formules, $\Delta \omega$ est la variation de l'angle horaire du Soleil, c'est-à-dire le retard à l'instant du passage du centre de l'image du soleil sur la ligne méridienne existante par rapport à l'instant du Midi Vraie Local. Si $\Delta \omega$ est positif, cela signifie que le centre de l'image du Soleil passe sur la ligne existante **APRÈS** le Midi Vrai.

La variation de 1° de l'angle horaire correspond à 4 minutes de temps et 1 seconde de temps correspond à une variation de $1/240$ de degré, soit: $\frac{\pi}{240 \cdot 180}$ rad.

Pour exprimer $\Delta \omega$ en secondes de temps il faut remplacer dans les formules précédentes $\Delta \omega$ par la valeur $\frac{\pi}{240 \cdot 180} \cdot \Delta \omega_{\text{sec}}$

Considérations:

- si $\Delta \alpha$ est positif (ligne méridienne existante tournée vers le Nord-Est) on a un $\Delta \omega$ positif. L'image du Soleil passe au méridien après le midi vrai;
- si la valeur de x_A est positive, le trou existant est alors plus à l'Ouest de la ligne méridienne existante, on a le même effet;
- la valeur de y_A , si elle est petite comme retenue dans nos hypothèses, ne produit qu'un effet négligeable sur le retard du passage.

⁵ Il faut observer que cette relation est valide même si la déclinaison δ et la hauteur h sont « apparentes », c'est-à-dire corrigées pour la réfraction atmosphérique.

Recherche de la valeur des erreurs x_A , y_A , $\Delta\alpha$.

Pour obtenir la valeur des erreurs, il faut mesurer l'instant du passage du centre du Soleil au méridien en deux instants différents. En négligeant l'effet de y_A , nous avons les formules qui suivent dans lesquels (δ_1 et $\Delta\omega_1$) sont les valeurs à un instant t_1 , et (δ_2 et $\Delta\omega_2$) celles à un second instant t_2 .

Avec:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sin(\varphi - \delta_1)}{\cos(\delta_1)} & A_2 &= \frac{\sin(\varphi - \delta_2)}{\cos(\delta_2)} \\ B_1 &= \frac{\cos(\varphi - \delta_1)}{\cos(\delta_1)} & B_2 &= \frac{\cos(\varphi - \delta_2)}{\cos(\delta_2)} \end{aligned} \quad \text{nous tirons de (1) les formules :}$$

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{1_rad} &= A_1 \cdot \Delta\alpha_{rad} + \frac{(x_A - y_A \cdot \Delta\alpha_{rad})}{\rho} \cdot B_1 \\ \Delta\omega_{2_rad} &= A_2 \cdot \Delta\alpha_{rad} + \frac{(x_A - y_A \cdot \Delta\alpha_{rad})}{\rho} \cdot B_2 \end{aligned} \quad \text{et}$$

$$\Delta\alpha_{rad} = \frac{B_1 \cdot \Delta\omega_{2_rad} - B_2 \cdot \Delta\omega_{1_rad}}{A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2} \quad (4)$$

$$\frac{x_A}{\rho} = \frac{A_2 \cdot \Delta\omega_{1_rad} - A_1 \cdot \Delta\omega_{2_rad}}{A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2} - \frac{y_A}{\rho} \cdot \frac{B_2 \cdot \Delta\omega_{1_rad} - B_1 \cdot \Delta\omega_{2_rad}}{A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2}$$

et en négligeant l'effet de y_A :

$$\frac{x_A}{\rho} = \frac{A_2 \cdot \Delta\omega_{1_rad} - A_1 \cdot \Delta\omega_{2_rad}}{A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2} \quad (5)$$

La valeur de y_A peut être obtenue en mesurant la longueur AC à l'instant t_1 ; de la (3) en effet:

$$y_A = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta_1) - \frac{\overline{AC_1}}{1 + (\Delta\alpha)^2 / 2} \quad (6)$$

Je rappelle que si le trou existant est plus à Ouest de la ligne méridienne existante, alors $x_A > 0$. S'il est plus au Sud du point A (début de la ligne méridienne existante), alors $y_A > 0$.

Exemple- Cadran solaire de S. Marie des Anges à Rome ⁶

Avec $\varphi = 41^\circ 54' 11''$; $\rho = 20340\text{mm}$ nous avons les résultats suivants:

1- Solstice d'hiver

$\delta_1 = -23.4357^\circ$ (decl. apparente); hauteur du Soleil $h_1 = 24.6971^\circ$; rif=2.15'; $\Phi = 32.51'$;
le passage est retardé de 17 sec; $\Delta\omega_1 = 17\text{sec}$ de temps = 0.001236 rad

2 - Équinoxes

$\delta_2 = +0.00550^\circ$ (decl. apparente); hauteur du Soleil $h_2 = 48.1118^\circ$; rif=0.89'; $\Phi = 32.11'$;
le passage est en retard de 10 secondes; $\Delta\omega_2 = 10\text{secondes}$ de temps = 0.0007272 rad

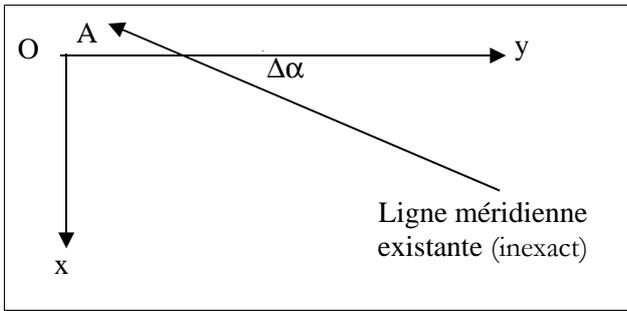
3 - Solstice d'été

$\delta_3 = +23.44120^\circ$ (decl. apparent); hauteur du Soleil $h_3 = 71.5381^\circ$; rif=0.33'; $\Phi = 31.48'$;
le passage est en retard de 3 secondes; $\Delta\omega_3 = 3\text{secondes}$ de temps = 0.0002181 rad

Des couples de mesures (1-2), (1-3), (2-3) avec les relations (4) et (5) nous obtenons les valeurs suivantes:

$$\Delta\alpha = 280,35'' ; 280.39'' ; 280.48'' \quad x_A = -4.93\text{mm} ; -4.94\text{mm} ; -4.93\text{mm}$$

⁶ Les valeurs qui concernent le cadran solaire de S. Marie des Anges à Rome ont été fournies par Mario Catamo et Cesare Lucarini. Je les remercie pour leur collaboration.



L'origine O (c'est-à-dire la verticale du trou) se trouve donc à Est de la ligne méridienne existante et forme un angle de $280''$ avec la ligne Nord-Sud (Fig. 2)

◀ Fig. 2

Recherche de la hauteur ρ du trou

En voulant déterminer expérimentalement la hauteur de l'ocilleton F existant, il faut mesurer sur la ligne méridienne existante la distance d'un point Q quelconque au centre⁷ de l'image du Soleil et ce, en deux jours distincts.

Soient:

- δ_1 et QC_1 les valeurs à l'instant 1
- δ_2 et QC_2 les valeurs à l'instant 2

De l'équation (3) $AC = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta) - y_A + \text{termes négligeables}$ nous tirons:

$$\rho = \frac{QC_1 - QC_2}{\tan(\varphi - \delta_1) - \tan(\varphi - \delta_2)}$$

NB: Si l'instant du passage de l'image du Soleil sur la ligne se détermine en utilisant le bord supérieur (ou inférieur) de la tache solaire, il faudra soustraire (ou additionner) de la valeur de la déclinaison du Soleil de l'instant son demi-diamètre angulaire et utiliser ce résultat dans les formules.

Cas différents

I) La ligne méridienne existante est tracée de manière correcte: $x_A = y_A = \Delta\alpha = 0$.

De la formule (1) nous tirons évidemment : $\Delta\omega = 0$.

Le centre de l'image passe la ligne méridienne existante exactement au Midi Vraie Locale.

II) Le point A (origine de la ligne méridienne existante) coïncide avec le point O: $x_A = y_A = 0$ (Fig.3).

La ligne méridienne a été dessinée par erreur, décalée d'un angle $\Delta\alpha$. La relation (1) devient :

$$\Delta\omega_{rad} = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \cdot \Delta\alpha_{rad} \quad \text{ou aussi}$$

$$\Delta\omega_{sec} = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \cdot \frac{1}{15} \cdot \Delta\alpha''$$

et l'inverse:

$$\Delta\alpha'' = 15 \cdot \frac{\cos(\delta)}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot \Delta\omega_{sec}$$

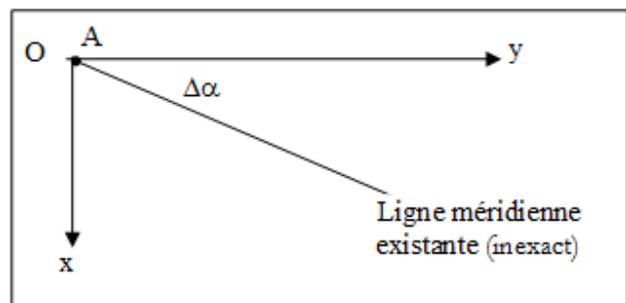


Fig 3

Exemple avec $\varphi = 41^\circ 54' 11''$; $\Delta\alpha = 4' 30'' = 270''$:

- Au Solstice d'hiver $\delta = -23.45^\circ$, on a $\Delta\omega = 17.8$ secondes de temps.
- Aux Équinoxes $\Delta\omega = 12.0$ secondes de temps.
- Au Solstice d'été avec $\delta = +23.45^\circ$, on a $\Delta\omega = 6.2$ secondes de temps

⁷ Le centre qui doit être utilisé est le point sur lequel le rayon solaire tomberait si le trou et le disque du Soleil étaient ponctuels.

III) Le point A ne coïncide pas avec le pied de la verticale du trou, alors que la ligne méridienne existante est exactement parallèle à la méridienne vraie, c'est-à-dire qu'elle est exactement orientée selon l'axe Nord-Sud géographique : $\Delta\alpha = 0$ (Fig. 4)

La formule (1) devient :

$$\Delta\omega_{rad} = \frac{x_A}{\rho} \cdot \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \text{ de lequel}$$

$$\Delta\omega_{sec} = \frac{x_A}{\rho} \cdot \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\delta)} \cdot \frac{240 \cdot 180}{\pi}$$

et ensuite

$$x_A = \rho \cdot \frac{\cos(\delta)}{\cos(\varphi - \delta)} \cdot \frac{\pi}{240 \cdot 180} \Delta\omega_{sec}$$

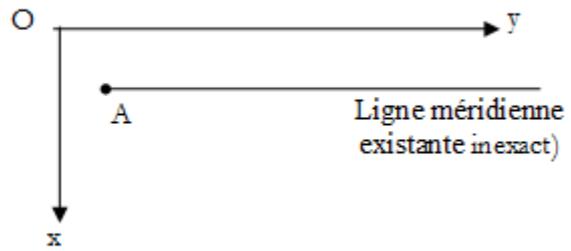


Fig 4

Exemple avec $\varphi = 41^\circ 54' 11''$ et $\rho = 20340$ mm :

Le jour où $\delta = 10^\circ$, on a un retard de 17 secondes dans le passage de la tache lumineuse. Nous obtenons $x_A = 29.2$ mm. Le point F est à l'Ouest de la ligne méridienne existante.

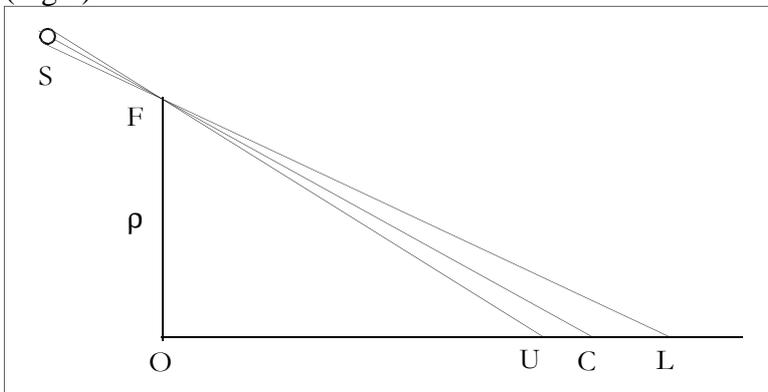
Si par contre le passage est en avance de 10 secondes, alors $x_A = -17.2$ mm. F est à l'Est de la ligne méridienne existante.

Autres formules

1) Dimension de l'ellipse image du Soleil

Dans les considérations qui suivent, l'effet de la dimension du trou sur l'image est négligé.

Soit U (upper) le point de l'image produit par le bord supérieur du disque solaire quand son centre C se trouve sur la ligne méridienne, et L (lower) le point produit par le bord inférieur (Fig.5).



Notons que le point C **ne coïncide pas** exactement avec le centre de l'ellipse lumineuse sur le plan.

◀ Fig. 5

Soit σ la valeur angulaire de demi-diamètre solaire (moyenne = $16'$).

Diamètre NORD-SUD

Les angles OUF, OCF et OLF dans la figure sont donnés par:

$$\text{OUF} = 90^\circ - \varphi + \delta + \sigma$$

$$\text{OCF} = 90^\circ - \varphi + \delta$$

$$\text{OLF} = 90^\circ - \varphi + \delta - \sigma \quad \text{pour lequel:}$$

$$OU = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta - \sigma)$$

$$OC = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta)$$

$$OL = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta + \sigma) \text{ et finalement:}$$

$$\text{Diamètre de l'image : } OL - OU = \rho \cdot [\tan(\varphi - \delta + \sigma) - \tan(\varphi - \delta - \sigma)]$$

Exemple avec $\varphi = 41^\circ 54' 11''$, $\rho = 20340$ mm et $\sigma = 32' / 2$

° Au Solstice d'hiver $OU = 437491.5$ mm

$CU = 538.9$ mm

$OC = 44330.4$

$CL = 549.9$

$OL = 44880.3$

$UL = 1088.8$ diamètre Nord-Sud

° Au Solstice d'été	OU = 6682.1 mm	CU = 105.0 mm
	OC = 6787.1	CL = 105.4
	OL = 6892.5	UL = 210.4 diamètre Nord-Sud

Diamètre EST-OUEST

Le diamètre moyen de la tache lumineuse le long de la ligne Est-ouest avec $\sigma = 16'$ est donné par:

$$\text{Diam}_{EW} = \rho \cdot \frac{2 \cdot \tan(\sigma)}{\cos(\varphi - \delta)} \cong \frac{1}{107.5} \cdot \frac{\rho}{\cos(\varphi - \delta)}$$

Exemple avec $\varphi = 41^\circ 54' 11''$, $\rho = 20340$ mm et $\sigma = 16'$:

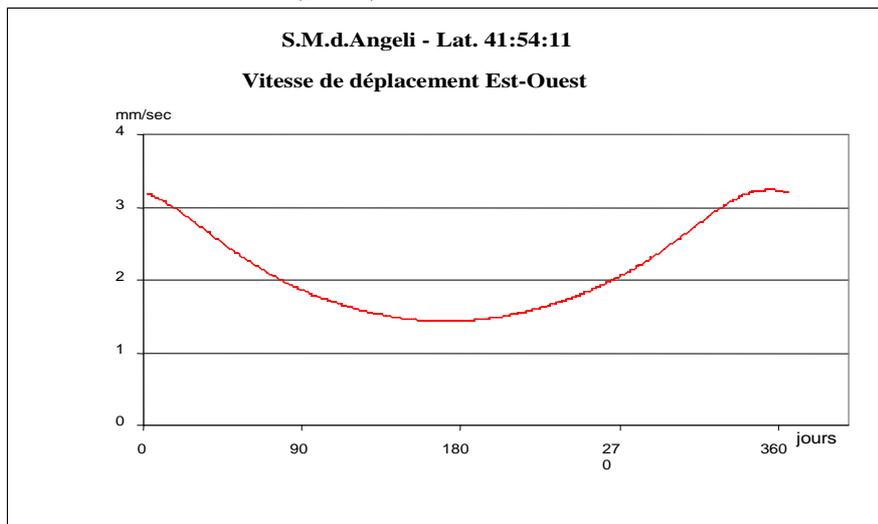
Diamètre Est-Ouest = 454.0 mm au Solstice d'hiver; 199.6 mm au Solstice d'été et 254.4 mm aux Équinoxes.

Donc au Solstice d'été l'image est de 210 x 199 mm, au Solstice d'hiver de 1089 x 454 mm et aux Équinoxes de 342x254 mm.

2) Vitesse du déplacement du centre de l'image du Soleil

On peut obtenir facilement la vitesse de déplacement de l'image du Soleil en direction Ouest-Est par la formule :

$$\text{vitesse} = \rho \cdot \frac{\cos(\delta)}{\cos(\varphi - \delta)} \cdot \frac{\pi}{240 \cdot 180} \text{ mm / sec} \quad (\text{Fig. 6})$$



Exemple avec $\varphi = 41^\circ 54' 11''$, $\rho = 20340$ mm, au Solstice d'hiver la vitesse est de 3.25 mm/sec, au Solstice d'été de 1.43 mm/sec et aux Équinoxes de 1.99 mm/sec.

◀ Fig 6

3) Durée du passage

Le temps de passage de l'image du Soleil pour couper la ligne méridienne est donné par:

$$\text{Durée}_{\text{du passage}} = 4 \cdot \frac{\text{diamètre}_{\text{du soleil}}_{\text{en minutes d'arc}}}{\cos(\delta)} \approx \frac{128}{\cos(\delta)} \text{ sec}$$

Exemple pour un diamètre solaire = 32'. Au Solstice d'hiver ou d'été nous avons un temps de passage de 139.5sec. Aux Équinoxes le temps de l'intersection est de 128 sec.

4) Vitesse de déplacement de l'image du Soleil dans la direction Sud-Nord

Le point central de l'image du soleil parcourt la ligne méridienne pendant l'année avec une vitesse qui dépend de la déclinaison du Soleil (Fig. 7). De la formule:

$$OC = \rho \cdot \tan(\varphi - \delta) \quad \text{nous tirons:}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\rho}{\cos^2(\varphi - \delta)} \cdot \frac{d\delta}{dt} \quad \text{et, avec une variation de t égal à 1 jour :}$$

$$\Delta y \approx -\frac{\rho}{\cos^2(\varphi - \delta)} \cdot \Delta\delta_{\text{rad/jour}} \text{ mm / jour} \text{ ainsi que :}$$

$$\Delta y \approx -\frac{\rho}{\cos^2(\varphi - \delta)} \cdot \frac{\pi}{60 \cdot 180} \Delta\delta_{\text{minutes/jour}} \text{ mm / jour}$$

Avec une bonne approximation de la variation de la déclinaison, en valeur absolue, on peut donner la formule:

$$\Delta\delta_{\text{minutes/jour}} \cong \frac{\sqrt{\sin^2(\varepsilon) - \sin^2(\delta)}}{\cos(\delta)} \cdot 60$$

qui ne fournit pas le signe de la variation. Il faut alors considérer que du Solstice d'hiver au solstice d'été la déclinaison augmente (et donc $\Delta\delta$ est positif et Δy négatif), et que le contraire se produit du Solstice d'été à celui d'hiver.

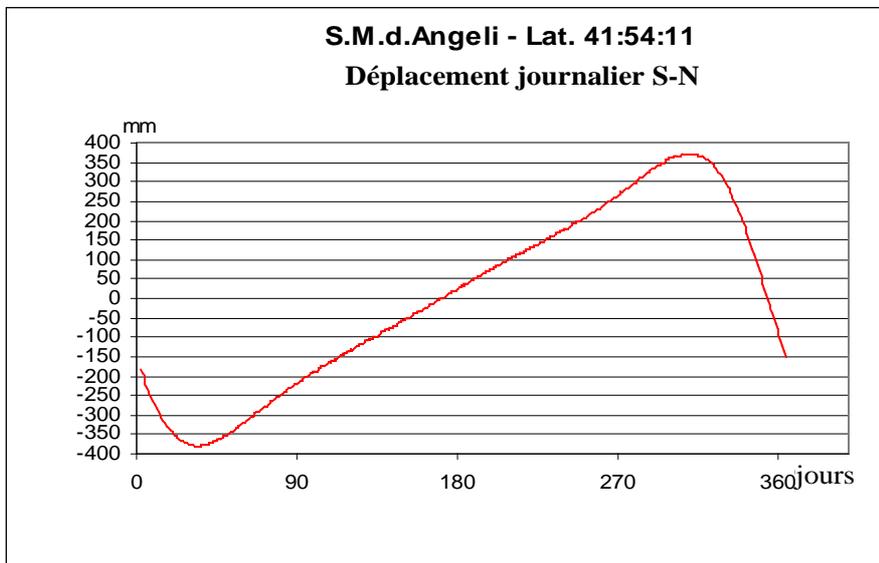


Fig 7

Exemple avec $\varphi = 41^\circ 54' 11''$, $\rho = 20340 \text{ mm}$

° A l'équinoxe de printemps $\delta = 0^\circ$ et $\Delta\delta = +0.4^\circ/\text{jour} = 24'/\text{jour} = 0.00695 \text{ rad/jour}$, nous avons $\Delta y = -256 \text{ mm/jour}$. Le signe moins signifie que, si δ grandit, y diminue.

Exemple avec $\varphi = 41^\circ 54' 11''$, $\rho = 20340 \text{ mm}$ et $\delta = -15^\circ$ (environ le 1er Novembre) on trouve:

$\Delta\delta = -0.313^\circ/\text{jour} = -18.8'/\text{jour}$ et enfin $y = +371 \text{ mm/jour}$.

APPENDICE

ANALYSE DE L'IMAGE, EFFET DE LA PÉNOMBRE, POSITION DU CENTRE DE L'IMAGE

On a facilement les relations qui suivront, avec:

- R rayon du trou ; $d = 2R$
- γ inclinaison de plan du trou par rapport au plan horizontal
- Φ diamètre du Soleil
- μ demi-diamètre du Soleil
- h hauteur du Soleil

Le centre qu'il faut considérer pour la mesure des passages est le point indiqué par C0 (voir Fig. 8), coïncidant avec la position de l'image pour un oeillet et un Soleil ponctuels.

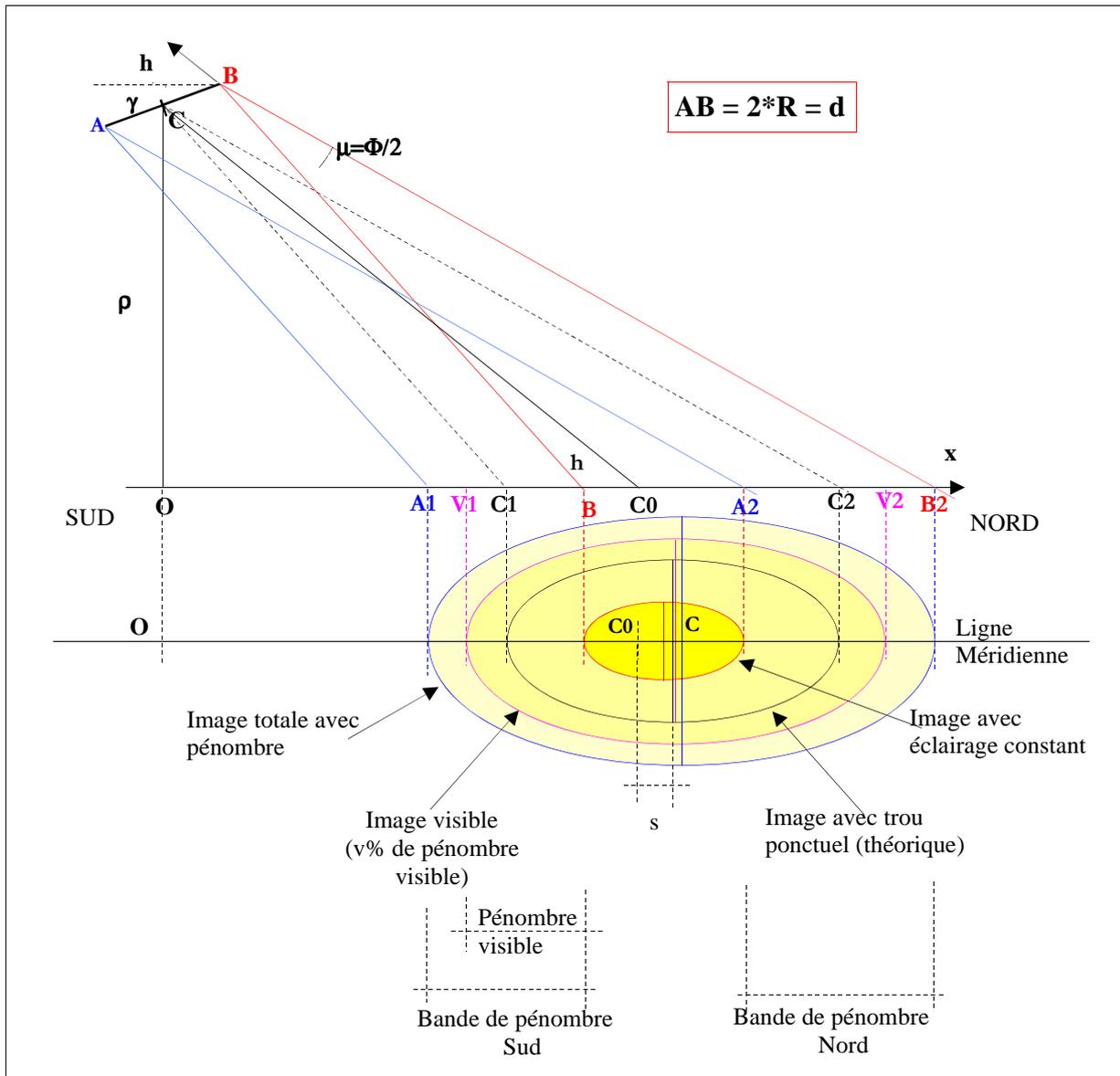


Fig. 8

En se référant à la figure ci-dessus, on définit les relations suivantes, dans lesquelles il est toujours supposé que la hauteur du Soleil intègre la réfraction.

$$x_{C0} = \frac{\rho}{\tan(b)}$$

$$\begin{cases} x_A = -R \cdot \cos(\gamma) & y_A = \rho - R \cdot \sin(\gamma) \\ x_B = +R \cdot \cos(\gamma) & y_B = \rho + R \cdot \sin(\gamma) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A1} = x_A + \frac{y_A}{\tan(b + \mu)} & x_{A0} = x_A + \frac{y_A}{\tan(b)} & x_{A2} = x_A + \frac{y_A}{\tan(b - \mu)} \\ x_{B1} = x_B + \frac{y_B}{\tan(b + \mu)} & x_{B0} = x_B + \frac{y_B}{\tan(b)} & x_{B2} = x_B + \frac{y_B}{\tan(b - \mu)} \end{cases}$$

Image globale, y compris la pénombre, de demi-axes = A1_C0 et C0_B2 :

$$\overline{A_1C_0} = \rho \cdot \left\{ \frac{1}{\tan(b)} - \frac{1}{\tan(b+\mu)} + \frac{R}{\rho} \cdot \left[\frac{\sin(\gamma)}{\tan(b+\mu)} + \cos(\gamma) \right] \right\}$$

$$\overline{B_2C_0} = \rho \cdot \left\{ \frac{1}{\tan(b-\mu)} - \frac{1}{\tan(b)} + \frac{R}{\rho} \cdot \left[\frac{\sin(\gamma)}{\tan(b-\mu)} + \cos(\gamma) \right] \right\}$$

Grand axe de l'ellipse, y compris la pénombre

$$\overline{B_2A_1} = \rho \cdot \left\{ \frac{1}{\tan(b-\mu)} - \frac{1}{\tan(b+\mu)} + \frac{R}{\rho} \cdot \sin(\gamma) \cdot \left[\frac{1}{\tan(b-\mu)} + \frac{1}{\tan(b+\mu)} \right] + 2 \cdot \frac{R}{\rho} \cdot \cos(\gamma) \right\}$$

$$\overline{B_1C_0} = \rho \cdot \left\{ \frac{1}{\tan(b)} - \frac{1}{\tan(b+\mu)} - \frac{R}{\rho} \cdot \left[\frac{\sin(\gamma)}{\tan(b+\mu)} + \cos(\gamma) \right] \right\}$$

$$\overline{A_2C_0} = \rho \cdot \left\{ \frac{1}{\tan(b-\mu)} - \frac{1}{\tan(b)} - \frac{R}{\rho} \cdot \left[\frac{\sin(\gamma)}{\tan(b-\mu)} + \cos(\gamma) \right] \right\}$$

Grand axe de l'ellipse centrale avec éclairage constant

$$\overline{A_2B_1} = \rho \cdot \left\{ \frac{1}{\tan(b-\mu)} - \frac{1}{\tan(b+\mu)} - \frac{R}{\rho} \cdot \sin(\gamma) \cdot \left[\frac{1}{\tan(b-\mu)} + \frac{1}{\tan(b+\mu)} \right] - 2 \cdot \frac{R}{\rho} \cdot \cos(\gamma) \right\}$$

Largeurs des bandes de Pénombre à l'extrémité de l'axe = B1_A1 et B2_A2:

$$\overline{B_1A_2} = 2 \cdot R \cdot \left[\frac{\sin(\gamma)}{\tan(b+\mu)} + \cos(\gamma) \right]$$

$$\overline{B_2A_2} = 2 \cdot R \cdot \left[\frac{\sin(\gamma)}{\tan(b-\mu)} + \cos(\gamma) \right]$$

NB:

Pour certaines valeurs les formules précédentes peuvent donner des résultats négatifs. Dans tous les cas, ne prendre que la valeur absolue.





Image du soleil dans chambre obscure

Gianni Ferrari

Sont présentées ici quelques considérations sur la dimension, le positionnement et la forme de l'œilleton des cadrans solaires à chambre obscure. Sont examinés la forme et l'éclairement de l'image du Soleil projetée ainsi que les effets de la diffraction. Enfin est donnée une relation originale pour le calcul du diamètre de l'œilleton.

La chambre obscure.

Considérons un objet lumineux ou éclairé par le Soleil, une surface opaque, par exemple un carton, dans lequel nous avons pratiqué un trou très petit¹ et un second écran parallèle au premier. Après avoir traversé le trou gnomonique (œilleton), les rayons lumineux émis par les différentes parties de l'objet vont frapper l'écran et produire sur lui une image inversée par rapport à l'objet original (Fig 1 et 3). L'optique géométrique montre que, si le trou a un diamètre en théorie infinitésimal, cette image est parfaitement focalisée, sans flou, sans déformation, et sa dimension est proportionnelle à la distance entre le trou et l'écran.

La luminosité de l'image est cependant très faible, théoriquement infinitésimale, en raison de la petite quantité de lumière passant à travers le trou. Cette faible luminosité empêche l'image même d'être vue si l'écran se trouve dans un lieu éclairé, même faiblement. Pour pouvoir la voir il faut que l'écran soit contenu dans un local complètement sombre, c'est-à-dire dans une "chambre obscure."

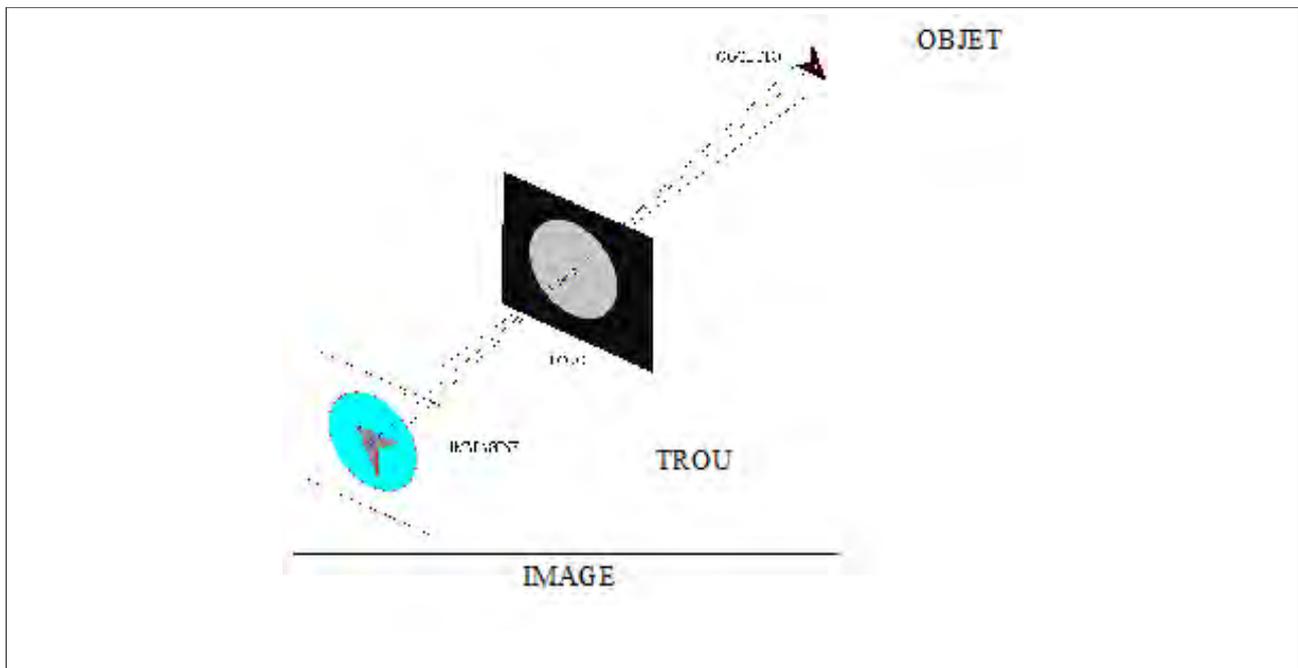


Fig. 1

¹ Un très petit trou est nommé "sténopé". Le terme sténopé dérive du mot grec "steinôpos", formé par les deux mots "stenos" et "opê" qui, traduits littéralement signifient "étroits" et "ouverture", "trou" (mots français ayant la même racine : "sténose" et "opercule". La locution "trou sténopé" signifie "trou de petite ouverture", "trou de petit diamètre", "trou d'épingle".

Aujourd'hui, le terme "trou sténopé" désigne exclusivement le petit trou qui, pratiqué dans le mur d'une chambre ou d'une boîte dont l'intérieur est dépourvu de lumière (chambre obscure), permet de projeter sur le mur opposé l'image des objets qui se trouvent devant lui. Il est utilisé dans "pin-hole photography".

Est présenté ci-avant, le phénomène du sténopé ou phénomène de la "chambre obscure", dont le principe de fonctionnement est connu depuis des millénaires. Aristote mentionnait déjà le sténopé. Les astronomes arabes l'utilisèrent pour observer l'aspect du Soleil pendant les éclipses² et par la suite de nombreux savants européens ont étudié et décrit la chambre obscure.³

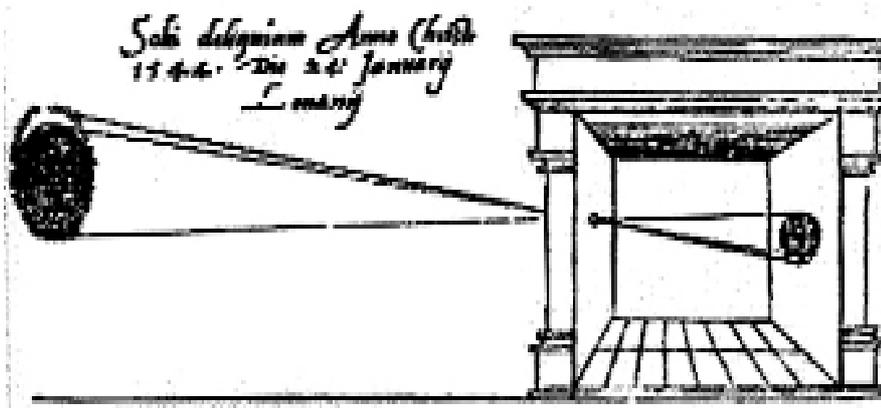


Fig. 2 - Gemma Frisius - Image d'une éclipse observée avec une chambre obscure

L'image du Soleil qui se forme sur un grand cadran solaire est également produite par un sténopé (œilleton). Je vais maintenant étudier de manière élémentaire les caractéristiques de cette image⁴.

L'image d'un objet produit par un trou de dimensions finies. Étude approchée.

Pour augmenter la luminosité de l'image d'un objet produite dans une chambre obscure et la rendre visible, même si dans la salle ne règne pas la plus complète obscurité, il faut évidemment augmenter la quantité de lumière qui entre et, par conséquent, augmenter la dimension du trou.

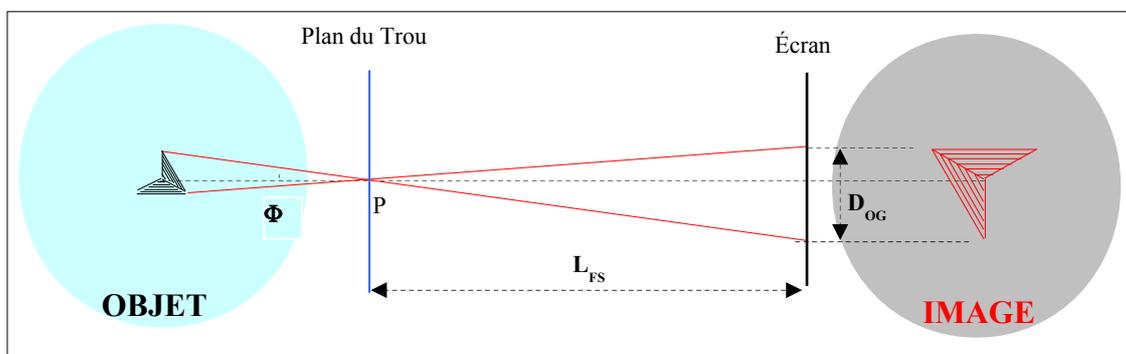


Fig. 3 – Image d'un objet produite par un trou ponctuel en contraste avec le fond du ciel

Cherchons donc à déterminer l'aspect de l'image que l'on obtient dans le cas où le trou a des dimensions finies et une forme quelconque.

² Le philosophe Ishaq al Kindi I (805-873), latinisé en Alchindus, écrivit un traité sur l'optique dans lequel il décrit les aspects mathématiques du phénomène (traduit au XII^e siècle par Gherardo de Crémone). Al Hazen (Abu Ali al Hassan Ibn al Haitam 965-1040) décrit une "chambre obscure" dans un manuscrit (Kitab-al-Manazir) dont il reste une copie traduite en latin en 1270 (Opticae thesaurus Alhazeni libri vii).

³ Par exemple Bacon (1267), Leonardo (qui compare l'oeil humain à une chambre obscure, 1515 Code Atlantique), Rainer Frisius (1545) (qui l'utilisa pour observer l'éclipse du Soleil de 1544).

⁴ La première ligne méridienne réalisée dans une chambre obscure fut construite à Rayy, près du moderne Téhéran, par l'astronome al-Khujandi en l'an 940 AD.

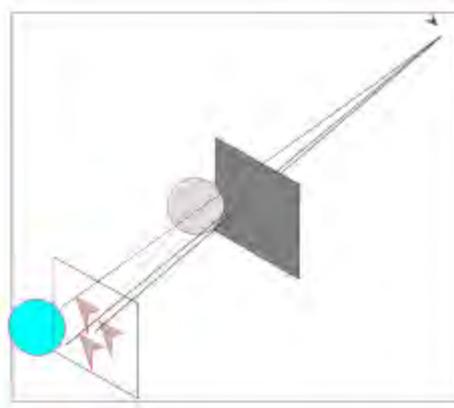


Fig. 4

Supposons recouvrir le trou d'une lame opaque et pratiquer sur celle-ci un petit trou de forme quelconque et de surface infinitésimale (ou très petite). Le résultat de l'opération sera une image (que j'appellerai pour simplifier "élémentaire") parfaitement nette et " focalisée ", mais de faible luminosité, comme décrit précédemment.

En répétant l'opération, c'est-à-dire en créant sur la lame d'autres trous les uns à côté des autres, nous aurons d'autres nouvelles images "élémentaires", elles aussi, nettes, " focalisées " et distinctes des images voisines (Fig. 4).

Si par la suite nous pratiquons une infinité de petits trous sur la lame portant le trou initial, nous obtenons une infinité d'images "élémentaires", chacune parfaitement nette, qui, en les superposant, donneront lieu à l'image produite par le trou de dimension finie considéré au début.

Pour avoir une approximation de l'aspect de l'image produite, il suffit de considérer seulement les petites zones qui se trouvent sur le périmètre du trou (Fig. 5 et 6).

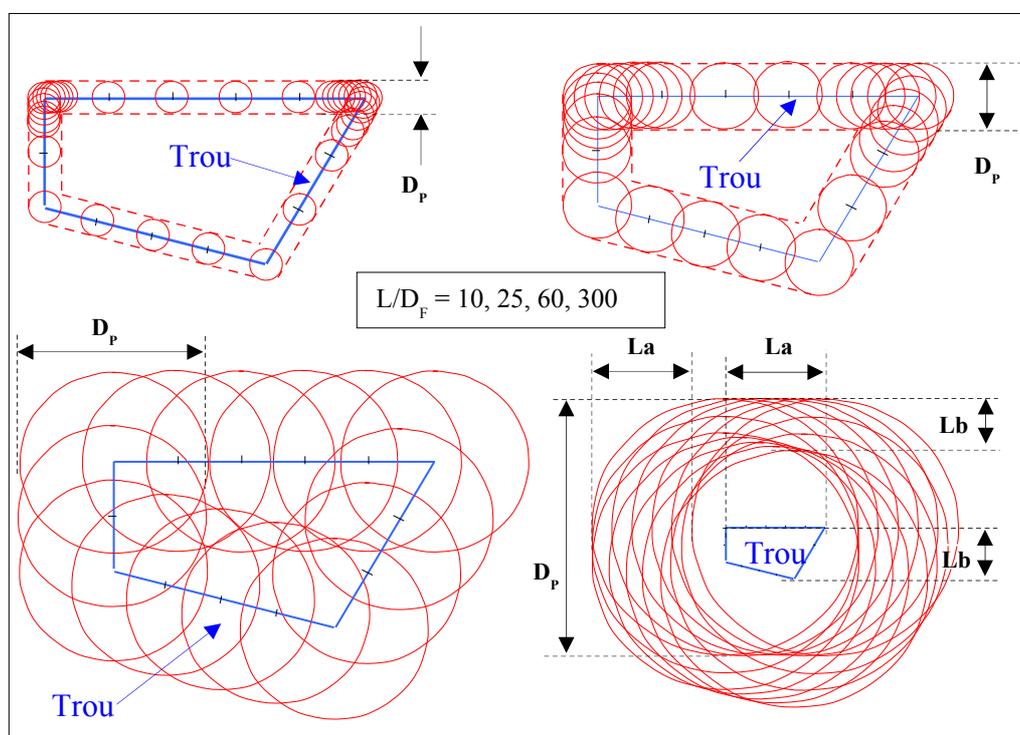


Fig. 5 – Formation de l'image d'une source circulaire

Dans le cas des cadrans solaires à chambre obscure (méridienne dans une église par exemple), on désire projeter sur un écran (mur ou plancher) l'image du Soleil. Je suppose donc que l'objet et son image "élémentaire" ont une forme circulaire même si j'ai pris comme trou une forme polygonale irrégulière.

Dans les deux illustrations qui suivent, j'ai construit les images en augmentant le rapport L/D_F entre la distance trou-image L et le diamètre D du cercle circonscrit au trou. Il est évident que l'aspect de l'image produit change beaucoup suivant la variation du rapport L/D_F .

En augmentant ce rapport on peut remarquer que:

- tant que L/D_F est petit, c'est-à-dire tant que la distance trou-écran est inférieure d'environ $50 D_F$, **l'image que la source produit sur l'écran a la même forme que le trou, quelque soit la forme de la source et du trou.**

Notons qu'il n'est pas possible d'établir scientifiquement la valeur du rapport sous lequel l'image a encore l'aspect du trou.

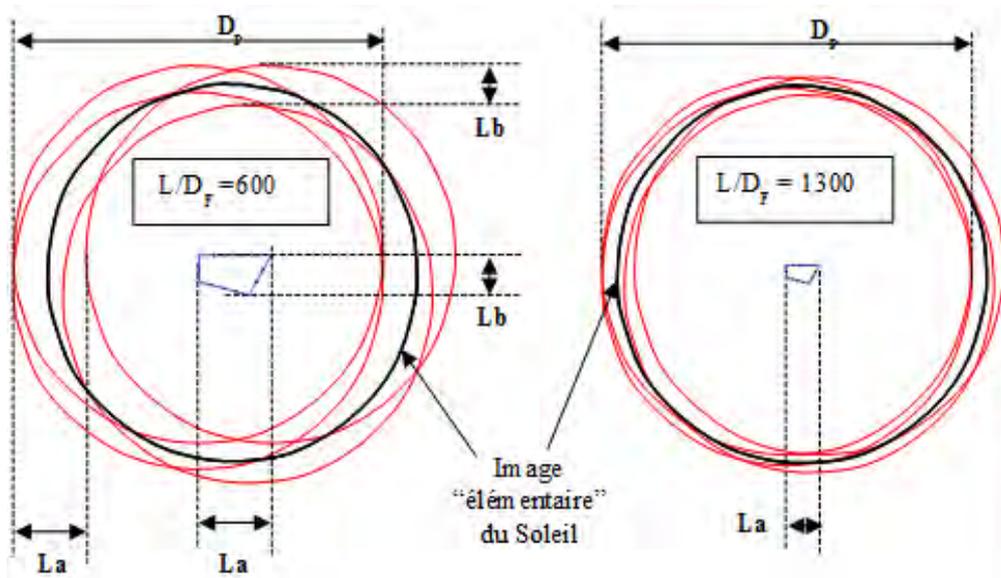


Fig. 6 – Formation de l'image d'une source circulaire

On trouve empiriquement que cette valeur vaut $\approx 30 \rightarrow 50$. Dans ce cas le trou est vu de l'écran sous un angle supérieur à environ $1-2^\circ$.

- Quand la valeur du rapport L/D_F est comprise entre ≈ 50 et $\approx 400 \rightarrow 500$, l'image produite est une figure confuse qui ne rappelle ni la forme du trou ni celle de la source.

- En augmentant encore le rapport, la forme de l'image sur l'écran ressemble de plus en plus à celle de la source. Le phénomène commence lorsque le rapport L/D_F dépasse la valeur $\approx 400 \rightarrow 500$.

Pour cette raison, en commençant par ces valeurs, un trou peut être considéré comme étant quasi ponctuel, indépendamment de sa dimension réelle.

Des figures précédentes, on peut conclure que, lorsque la distance trou-image est grande, un trou de dimensions finies produire:

- une image égale à l'objet;
 - la présence d'un "flou" ou "d'incertitude" tant dans les détails internes (par exemple taches solaires) que sur la bordure.

- la présence d'une bande de pénombre entourant l'image, avec une largeur théorique, pas complètement visible, égale à la dimension du trou. Cette bande de pénombre induit une incertitude dans la mesure de l'image.

- l'augmentation de la dimension de l'image et par conséquent la diminution de sa luminosité.

Dans les illustrations suivantes, on peut voir clairement la bande de pénombre qui entoure les images du Soleil.



Fig. 7

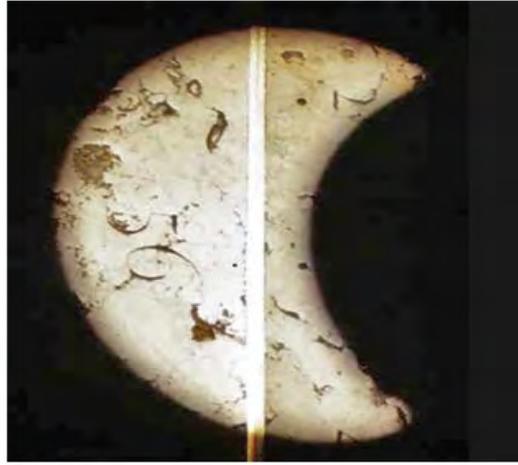


Fig. 8

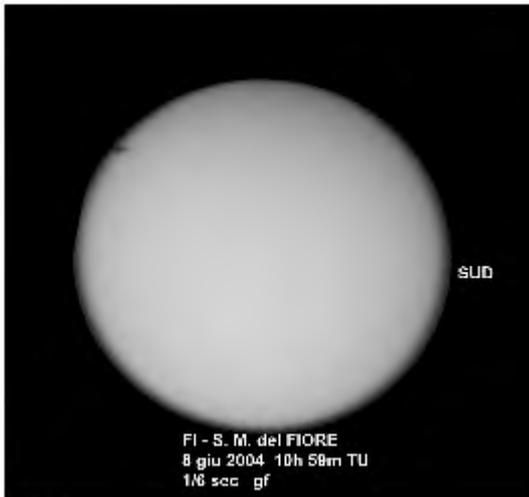


Fig. 9



Fig. 10

Fig. 7: Image du Soleil à Santa Maria degli Angeli à Rome au Solstice d'hiver. Photographie de Roberto Cappelletti

Fig. 8: Eclipse de Soleil le 11 août 1999 - Bologne San Petronio. Photographie de Guido Tonello

Fig. 9,10: Passage de Vénus devant le Soleil le 8 juin 2004 à S. Maria del Fiore de Florence. (Photographies de l'auteur).

L'image d'un objet produite par un trou de dimensions finies. Définitions.

Par la suite je supposerai (sauf indication contraire) que l'objet ou la source circulaire et les deux plans (celui du trou et celui de l'image) sont perpendiculaires aux rayons lumineux.

J'utiliserai les symboles suivants:

- D_F : diamètre du Trou circulaire avec comme centre le point P.
- L : distance Trou-Ecran, c'est-à-dire la distance entre les deux plans.
- Φ : dimension angulaire de l'objet. C'est l'angle sous lequel d'un point P au centre de l'image "se voit" l'objet lumineux. Si celui-ci n'est pas circulaire en complément à Φ : j'indique une de ses dimensions angulaires.
- D_P : la dimension de l'image.

Il existe la relation: $D_P = 2 \cdot L \cdot \tan(\Phi / 2)$ qui, si Φ est inférieur à quelques degrés, peut être remplacée par la formule: $D_P = L \cdot \Phi_{rad}$.

Dans les cadrans solaires à chambre obscure l'"objet" que l'on veut produire est naturellement celui du Soleil. L'angle Φ est son diamètre angulaire dont la valeur moyenne vaut $\Phi_0 = 32' = 1/107,5$ rad. La relation précédente devient alors: $D_p = L/107,5 = L/k$, avec k la constante dont la valeur est 107,5.

Finalement j'appellerai "distance fondamentale" la distance L_0 entre les deux écrans pour laquelle l'image produite par le Soleil à travers un trou ponctuel a un diamètre égal à celui du trou lui-même. Il s'ensuit immédiatement que : $L_0 = k \cdot D_f$.

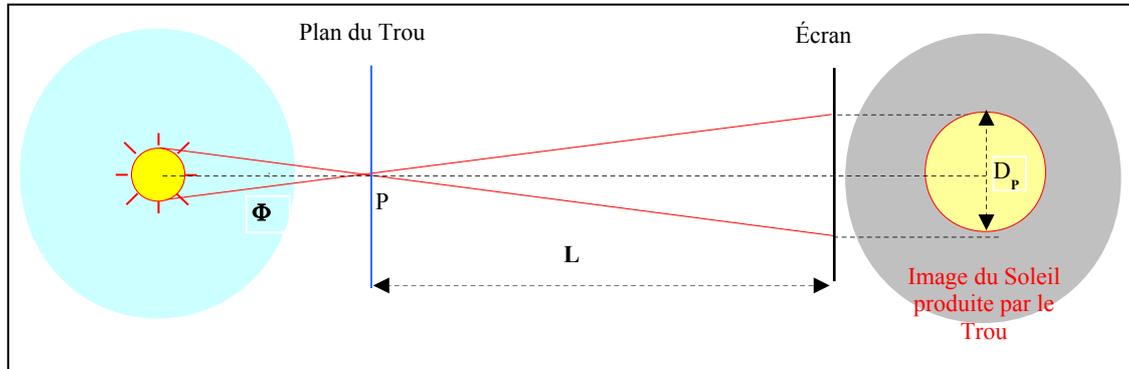


Fig. 11 – Image du Soleil produite par un trou ponctuel

Éclairage de l'image - Aspect de l'image

Jusqu'à maintenant nous avons défini la forme d'une image issue d'une source traversant un trou et se projetant sur un écran, mais cela n'est pas suffisant pour déterminer son aspect, c'est-à-dire comme elle nous apparaît exactement. Cet aspect dépend principalement des variations d'éclairage entre les différentes zones.

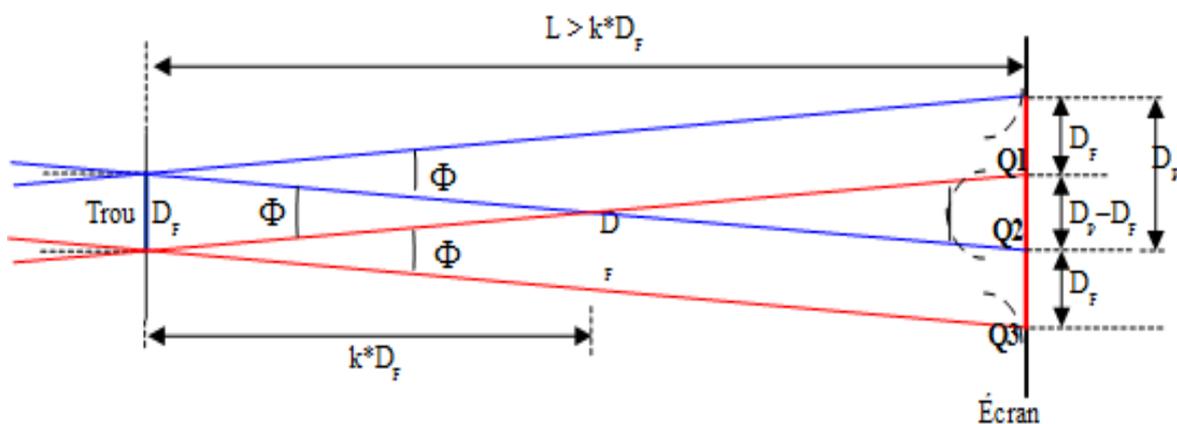


Fig. 12

Je ne considérerai pas la distribution spectrale de la lumière qui vient de la source, c'est-à-dire la différence des couleurs des différentes parties de l'image qui en influencent l'aspect de manière fondamentale. Cette simplification est justifiée par la nécessité d'une explication limitée, mais surtout par le fait que dans les cadrans solaires la couleur n'a pas d'importance puisque la source est le Soleil.

J'appelle J_0 "l'éclairage" (énergie lumineuse par unité de surface) produit par le Soleil sur le plan normal aux rayons passant par le centre du trou, supposé uniforme sur toute la surface du trou lui-même⁵.

⁵ Avec le Soleil à une hauteur d'environ 45-50° et un ciel parfaitement serein, la valeur de J_0 est d'environ 100000 lux. Par comparaison je rappelle que la valeur de l'éclairage sur une surface horizontale produite par un ciel très nuageux est d'environ 1000 lux. Celle produite par une lampe à incandescence de 60W placée à 1 m de distance est d'environ 100

Une méthode pour trouver "l'éclairement" de l'image produite consiste à déterminer, pour chaque point Q la constituant, la partie visible de la source.

Nous supposons placer notre œil exactement au point Q et regarder à travers le trou vers la source (Fig. 12) ⁶. Si nous voyons la source entière, alors l'éclairement du point Q, d'où nous observons, est égal à celui situé en un point générique totalement illuminé, c'est-à-dire = J_0 .

Si par contre nous voyons seulement une fraction f de la surface de la source, alors l'éclairement sera, = $f \cdot J_0$ (Fig. 13)

Si la source est circulaire avec un diamètre angulaire Φ , il est assez simple de calculer la fraction f de sa surface vue par n'importe quel point Q appartenant au plan de l'image. Je me limiterai seulement au cas qui nous intéresse, dans lequel la distance trou-image est très grand par rapport au diamètre du trou (au moins 400-500 fois), c'est-à-dire $L \gg L_0$.

Dans ce cas le diamètre de l'image produite par un trou **ponctuel** est plus grande que le diamètre du trou $D_P = \frac{L}{k} = \frac{L}{L_0} \cdot D_F > D_F$ et par conséquent, d'un point quelconque Q de l'image, il est toujours possible de voir partiellement le disque du Soleil, mais jamais sa totalité. En d'autres termes, le diamètre angulaire du trou vu par le plan-image est toujours inférieur à celui du Soleil.

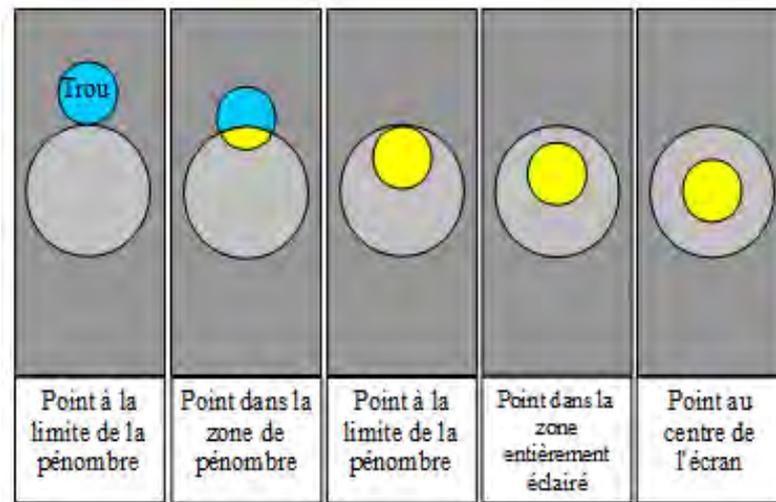


Fig. 13 - Le trou vu par les points de l'écran.

À travers le trou sont vus, soit le ciel, soit une partie du Soleil.

Le disque le plus grand représente le disque solaire comme il se verrait s'il y n'avait pas l'écran percé.

Si le point Q, d'où on voit le Soleil seulement à travers le trou est centré (entre les points Q1 et Q2, sur la Fig. 12), alors l'éclairement en ce point est donné par la formule:

$$J_Q = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_P} \right)^2 = J_0 \cdot \left(\frac{L_0}{L} \right)^2 = J_0 \cdot \left(\frac{107.5 \cdot D_F}{L} \right)^2 < J_0$$

Si nous déplaçons notre œil le long du diamètre de l'image, nous constaterons que l'éclairement reste constant et égal à la valeur indiquée, même quand, à travers le trou, n'est visible, que le disque solaire. Il apparaît immédiatement que la distance maximale du centre est: $(D_P - D_F)/2$.

Au-delà de cette distance sont visibles une partie du Soleil et une partie du ciel qui, en augmentant la distance au centre, deviennent toujours plus grande (point Q3).

lux et enfin celle produite par la lumière de la Pleine Lune est d'environ 0.2 lux.

⁶ NE JAMAIS observer directement le Soleil sans une protection appropriée et sûre!

Il y a donc une bande de pénombre dans laquelle l'éclairement diminue depuis la valeur centrale J_C jusqu'à 0. La largeur de cette bande est $= D_F$ pour laquelle le diamètre de l'image résultante entière est $= (D_P + D_F)$.

En augmentant la distance trou-image L , l'éclairement central maximal diminue très rapidement et l'image s'élargit de plus en plus. Si le diamètre du trou D_F se maintient constant, alors l'énergie lumineuse entrante reste constante pendant qu'augmente en proportion quadratique la surface sur laquelle elle est distribuée.

La Fig. 14 présente l'évolution de l'éclairement pour différentes distances trou-image. On peut remarquer que l'éclairement diminue très rapidement quand la distance L entre le trou et l'image est supérieure à $L_0=107 D_F$, pendant que les sommets se font moins pointus lorsque cette distance augmente.

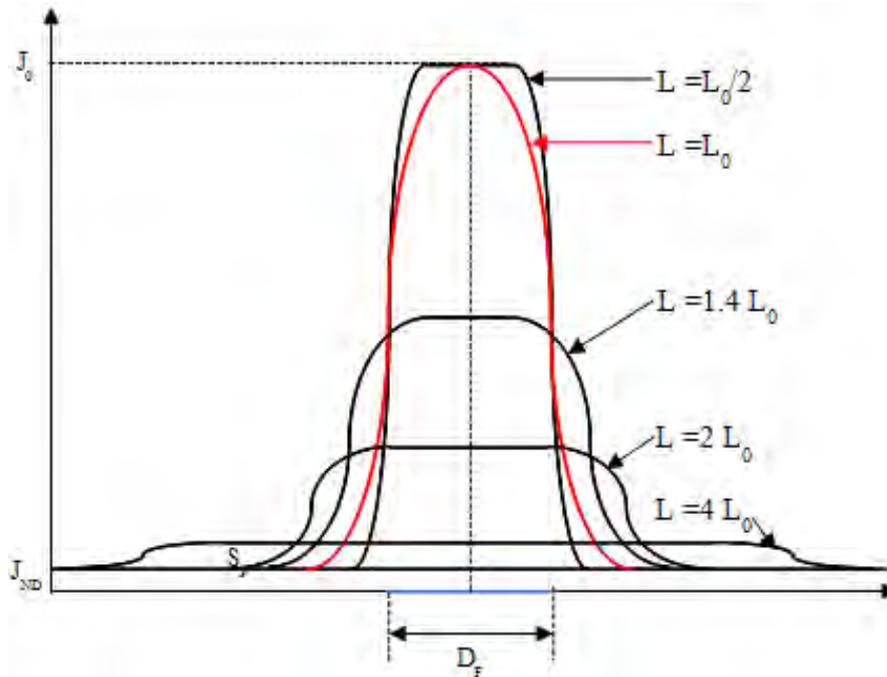


Fig. 14 – Éclairement suivant l'évolution de la distance trou-image
Avec un trou $D=2\text{cm}$, la courbe la plus haute correspond à une distance trou-image d'environ 1m .
La plus basse d'environ $8,5\text{m}$

Cela signifie que, lorsque la distance est petite, la transition entre la zone centrale intensément éclairée (J_0) et la zone d'ombre dans laquelle l'éclairement est dû essentiellement à la lumière diffuse (J_{ND})⁷, est rapide et donc très facilement perceptible. A l'inverse, lorsque les distances sont assez grandes, la transition entre une zone peu illuminée et l'ombre devient de plus en plus graduelle et par conséquent, rend plus difficile la perception correcte des limites des différentes zones (Fig. 14).

Éclairage de l'image - Trou elliptique

Si nous indiquons par β l'angle entre la normale au trou circulaire et la direction des rayons, la section du faisceau de ces rayons à l'axe le plus grand perpendiculaire au plan déterminé par la

⁷ L'illumination dans des locaux mal éclairés, comme les églises, est généralement comprise entre 15 - 50 - 100 lux pour lesquels J_{ND} à ces valeurs. La valeur de l'illumination indirecte due au ciel peut changer énormément selon les conditions de ce dernier. Avec un ciel clair en été elle peut arriver à 15000 lux, alors qu'un ciel très nuageux réduit à environ 1 000 lux. Sur une surface horizontale au coucher du soleil nous avons environ 380 lux. L'illumination nécessaire pour une lecture confortable est d'au moins 300 lux, celle prévue pour des rues peu éclairées est d'environ 15 - 30 lux et celle produite par la Pleine Lune est d'environ 0.25 lux.

direction des rayons et la normale au trou (plan principal du faisceau). Sa longueur est de: $2 \cdot a = D_F$, avec D_F le diamètre du trou.

L'axe le plus petit a par contre pour longueur: $2 \cdot b = D_F \cdot \cos(\beta)$. Il est dans le plan principal défini plus haut.

Si nous disposons, à une certaine distance du trou, un écran normal à l'axe du faisceau de rayons provenant d'une source lumineuse non ponctuelle, ceux-ci formeront sur lui une image parfaitement égale à celle qui serait produite par un trou elliptique, de demi axes a et b, pratiqué sur un plan orthogonal aux rayons mêmes.

Tous les raisonnements précédents sont encore parfaitement valides.

Si la source est le Soleil et la distance trou-image plus grande de plusieurs fois la distance fondamentale L_0 , alors l'image du Soleil sera à peu près circulaire et entourée d'une bande de pénombre d'une largeur égale à D_F dans une direction, et égale à $2b$ dans la direction perpendiculaire.

Précisément:

- la zone centrale est également une ellipse avec pour axes: $[D_P - D_F]$ et $[D_P - D_F \cdot \cos(\beta)]$
- les axes de l'image entière ont pour valeurs respectivement : $[D_P + D_F]$ et $[D_P + D_F \cdot \cos(\beta)]$
- la bande de pénombre a pour largeur : $[D_F, D_F \cdot \cos(\beta)]$
- l'éclairement de la zone centrale vaut : $J = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_P}\right)^2 \cdot \cos(\beta)$

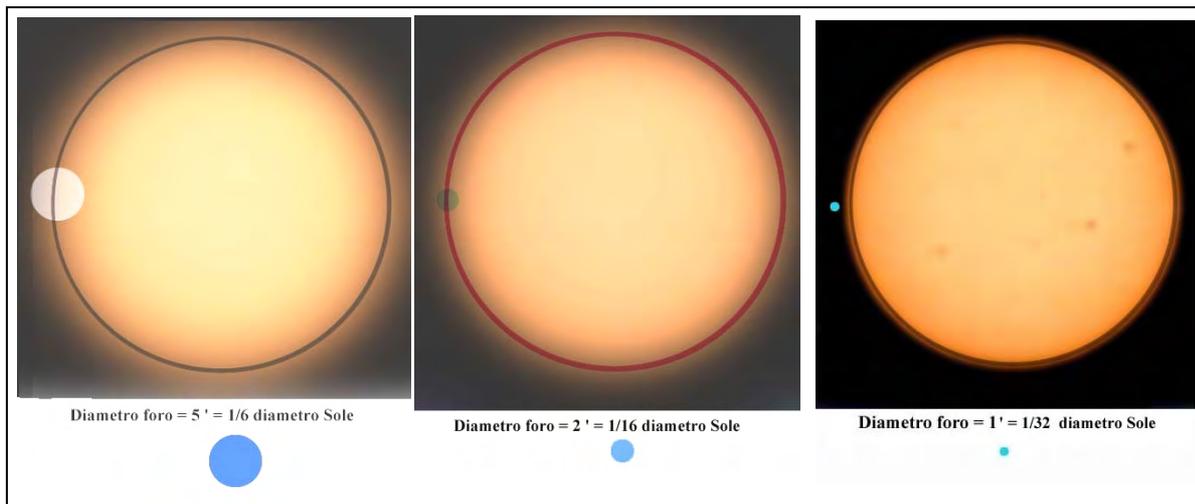


Fig. 15 – En diminuant le diamètre du trou, la luminosité de l'image et la largeur de la bande de pénombre diminuent.
Exemple pour le cadran solaire de S. Petronio à Bologne : aux Équinoxes, le diamètre du trou, vu par le centre de l'image, sous-tend 2,5' environ

Exemple:

Soit $D_F = 2$ cm, $L = 30\text{m} = 3000\text{cm}$, $\beta = 45^\circ$, $J_0 = 100000$ lux : nous avons $L_0 = 215$ cm; $L/L_0 = 14$; $D_P = 27,9$ cm

Image normale aux rayons:

- zone centrale: 25,9 x 26,5 cm
- image entière: 29,9 x 29,3 cm
- largeur des bandes de pénombre: de 2,0 et 1,4 cm
- éclairement central: $0,0036 J_0 = J_0 / 275,5$, soit environ 360 lux,

Avec un trou perpendiculaire aux rayons on aurait:

- une zone centrale de diamètre : 25,9 cm

- une image entière de diamètre 29,9 cm
- une bande de pénombre de largeur 2,0 cm
- un éclairement central $0,0051 J_0 = J_0 / 194,8$

Faisceau de rayons entrant dans un trou circulaire Plan principal en coïncidence avec un plan vertical. Source ponctuelle

Supposons que la source "Soleil" soit ponctuelle et que le plan normal au plan du trou contenant la direction des rayons (plan principal) soit un plan vertical coïncidant, dans le cas des cadrans solaires à chambre obscure, avec le plan Méridien.

Indiquons par β l'angle entre la normale au plan du trou et la direction des rayons, par γ l'inclinaison du plan du trou par rapport au plan horizontal et par h l'altitude du centre du Soleil.

La section normale du faisceau de rayons qui traverse le trou a une forme elliptique, avec l'axe le plus grand horizontal et de longueur égale à D_F . L'axe le plus petit qui, lui, appartient au plan méridien a pour longueur : $D_F \cdot \cos(\beta) = D_F \cdot \sin(h + \gamma)$ (Fig 16)

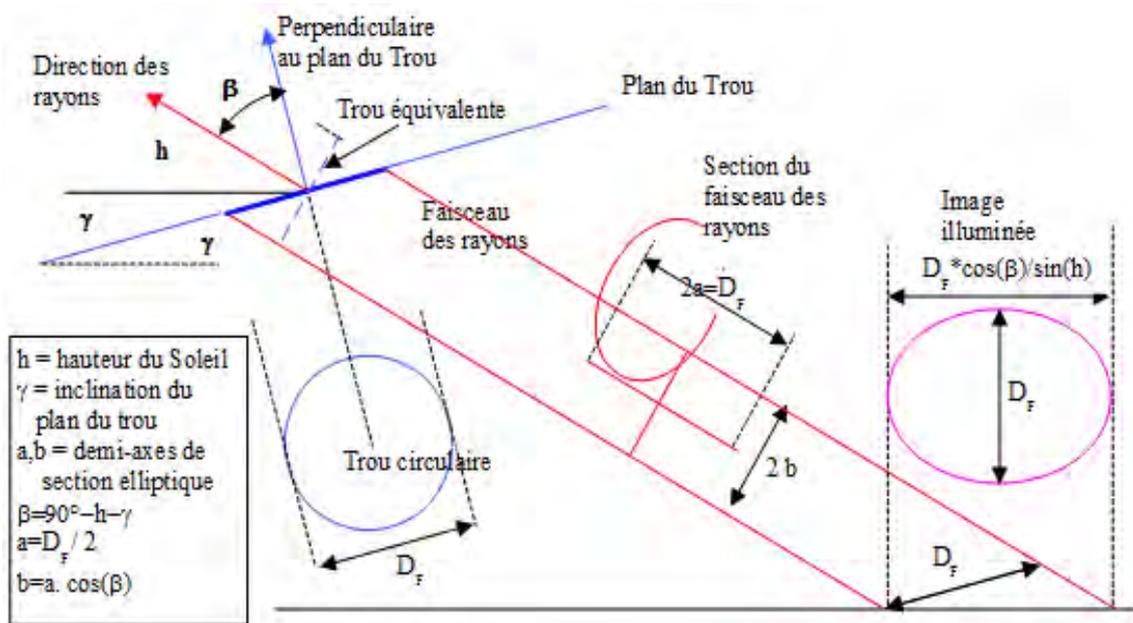


Fig. 16 – Plan du trou non perpendiculaire aux rayons
Le trou équivalent coïncide avec la section du faisceau.

Si le plan de l'image est un plan incliné d'un angle σ par rapport aux rayons, et de $(\sigma - h)$ par rapport à l'horizontale, alors l'image est une ellipse avec un axe sur le plan vertical et l'autre, perpendiculaire, avec comme longueur : D_F et $D_F \cdot \frac{\sin(h + \gamma)}{\sin(\sigma)}$.

À remarquer que les deux axes sont égaux, et que l'image est circulaire avec comme diamètre D_F , si $\sigma = h + \gamma$, c'est-à-dire si $\sigma - h = \gamma$, c'est-à-dire si le plan image a la même inclinaison que le plan du trou par rapport à l'horizon.

Dans le cas d'une source ponctuelle, ce résultat acquiert validité générale: si le plan du trou et celui de l'image sont parallèles, la forme de l'image est exactement égale à celle du trou, puisque ce sont deux sections parallèles entre elles du même faisceau de rayons.

Si finalement le plan image coïncide avec le plan horizontal, l'angle $\sigma = h$ et les axes de l'image ont pour longueurs: D_F (petit axe) et $D_F \cdot \frac{\sin(h + \gamma)}{\sin(h)}$ (grand axe).

Cette proposition N'EST PAS PARFAITEMENT EXACTE si l'on considère l'image produite par une source NON ponctuelle comme celle du Soleil.

Faisceau de rayons entrant dans un trou circulaire – Plan principal en coïncidence avec un plan vertical. Source NON ponctuelle

Si la distance Trou-Image $L \gg L_0$, alors, d'un point quelconque Q de la zone centrale, on ne voit qu'une partie du Soleil avec pour surface $= \frac{\pi}{4} \cdot Da \cdot Db = \frac{\pi}{4} \cdot (D_F)^2 \cdot \cos(\beta)$.

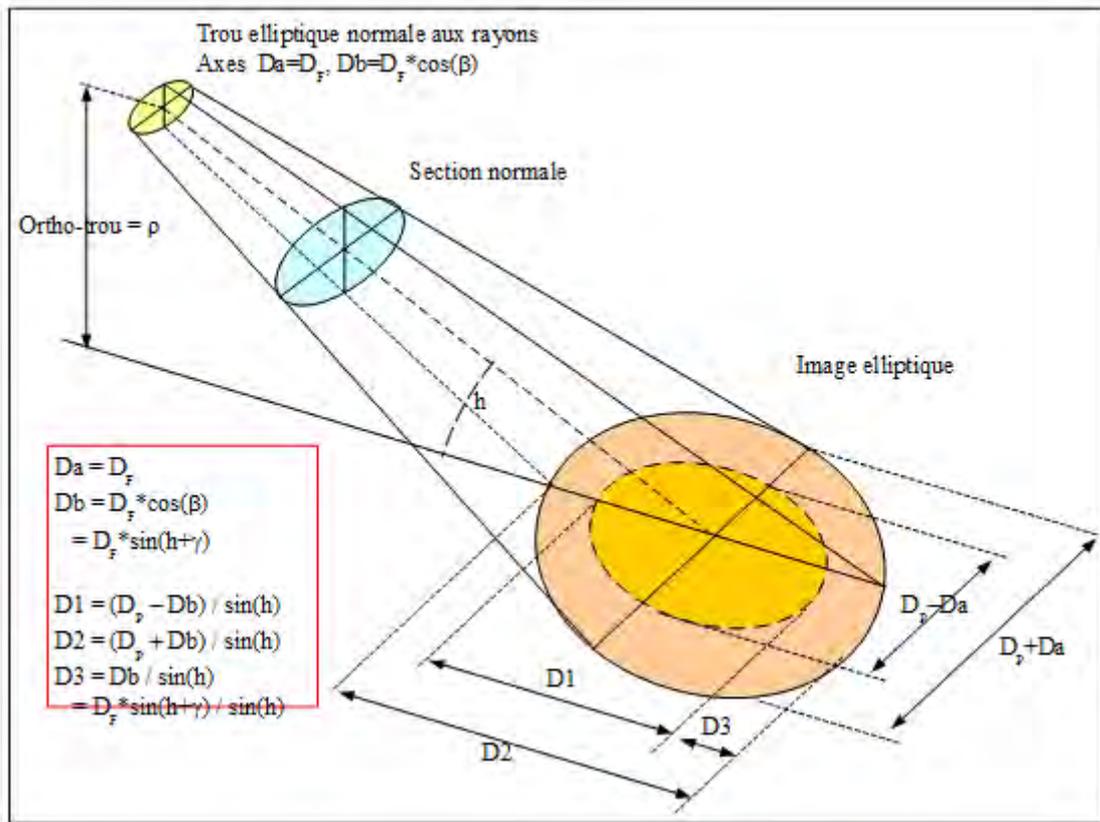


Fig. 17 – Trou elliptique - Plan Image Horizontal $L > L_0$.

L'éclairement de la zone centrale de la figure vaut : $J = J_0 \cdot \frac{Da \cdot Db}{D_p^2} = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_P} \right)^2 \cdot \cos(\beta)$

Si le plan image est le plan horizontal on a :

– une zone centrale avec:

◦ Eclairement constant dont l'axe transversal vaut: $D_p - D_F$ et l'axe longitudinal:

$$\frac{D_p - D_F \cdot \sin(h + \gamma)}{\sin(h)}$$

◦ Eclairement de la zone centrale : $J = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_P} \right)^2 \cdot \sin(h) \cdot \sin(h + \gamma)$

– Image totale avec :

◦ Axe transversal $D_p + D_F$; axe longitudinal $\frac{D_p + D_F \cdot \sin(h + \gamma)}{\sin(h)}$

– Bande de pénombre de largeur:

D_F le long de l'axe transversal; $\frac{D_F \cdot \sin(h + \gamma)}{\sin(h)}$ le long de l'axe longitudinal

Si le plan du trou est lui aussi horizontal, avec $\gamma = 0$, les formules deviennent:

– Zone centrale avec éclairage constant

◦ Axe transversal $D_P - D_F$; axe longitudinal $\frac{D_P - D_F \cdot \sin(h)}{\sin(h)} = \frac{D_P}{\sin(h)} - D_F$

◦ Éclairage zone centrale $J = J_0 \cdot \left(\frac{D_F \cdot \sin(h)}{D_P} \right)^2$

– Image totale avec:

◦ Axe transversal $D_P + D_F$; axe longitudinal $\frac{D_P}{\sin(h)} + D_F$

– Bande de pénombre de largeur constante = D_F

La "netteté" de l'image - La diffraction

Selon l'optique géométrique, l'image produite sur un écran par une source ponctuelle située à une distance infinie à travers un trou de diamètre D_F est un petit disque, ayant le même diamètre que le trou, et uniformément éclairé. Si la source a des dimensions finies, comme par exemple le Soleil, chaque point de celle-ci produit une image circulaire comme celle décrite.

De l'image totale, donnée par le recouvrement de cette infinité de cercles lumineux, il

résulte une "confusion" et un "flou" d'autant plus importants que le diamètre du trou est grand.

Dans ce cas, la plus petite séparation angulaire de deux points de l'image avec leurs voisins doit être "résolue", c'est-à-dire que les points doivent être vus comme séparés. Cette séparation angulaire minimale est

donnée par $\theta_G \cong \frac{D_F}{2 \cdot L}$.

Exemple avec $L = 20\text{m}$ et $D_F = 2\text{cm}$, on a $\theta_G \cong 1/2000 \text{ rad} \cong 1.7'$, ce qui est en pratique égal au pouvoir séparateur moyen de l'œil humain.



Fig. 18

En utilisant seulement l'optique géométrique nous avons déjà trouvé que, pour avoir une image "assez" nette du Soleil sur le plan de la ligne méridienne, il est nécessaire que la distance L entre le trou et le plan soit au moins 400 - 500 fois le diamètre D_F du trou, c'est-à-dire. Plus le diamètre du trou diminue, plus la bande de pénombre est étroite et l'incertitude qui entoure l'image est réduite, rendant "plus nette" l'image elle-même.

Si nous considérons la nature ondulatoire de la lumière, il faut tenir compte du phénomène de la diffraction de la lumière produit par le trou circulaire.

Dans le cas d'une source "monochromatique et ponctuelle", tant que le diamètre du trou D_F est assez grand, l'image est circulaire avec un diamètre D_F et avec une luminosité presque constante.

Dans cette expérience, la diffraction produit seulement des anneaux externes plus lumineux avec des largeurs de l'ordre de $\approx \sqrt{\frac{L}{10000}} ; \sqrt{\frac{L}{20000}}$ (en cm) (Fig. 18)

Cette condition persiste jusqu'à ce que $D_F > K \cdot \sqrt{\lambda \cdot L}$, avec $K \approx 5$.

Avec les longueurs d'onde de la lumière visibles, soient : 650 - 550 nm, la condition est alors valide jusqu'à ce que $D_F > \sqrt{\frac{L}{400}} ; \sqrt{\frac{L}{800}}$ (en cm).

Dans la Fig. 18 on a $L = 4 \text{ m}$, $D_F = 2 \text{ cm}$, $\lambda = 550 \text{ nm}$; la condition précédente est satisfaite ($D_F > 0.7 - 1.0 \text{ cm}$), la largeur de la bande extérieure est d'environ 1,4-2 mm et le diamètre total de l'image est = 20 mm (source ponctuelle).

Quand le diamètre du trou diminue la diffraction produit par contre une image constituée par une tache lumineuse centrale dans laquelle se concentre environ 85% de l'énergie lumineuse, entourée par des anneaux d'intensité très faible. Dans les Fig. 19 et 20, dans lesquelles $D_F = 6$ et 3mm , le contraste a été très augmenté pour souligner ces anneaux qui sont, en fait, beaucoup plus faibles que la tache centrale. Le diamètre du disque central est donné par $D_{IMM} = 2.44 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{D_F}$ (formule d'Airy), et il augmente en fonction de la diminution de la dimension du trou.

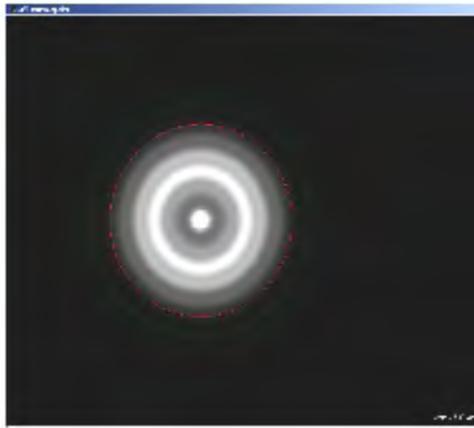


Fig. 19



Fig. 20

La lumière solaire n'étant pas monochromatique, on peut prendre une longueur d'onde égale à $600\text{-}650\text{ nm}$, pour laquelle l'œil humain possède le maximum de sensibilité, ou égale à 550 nm dans laquelle l'émission est à son maximum.

Ces valeurs donnent un diamètre de l'image de $D_{IMM} = 2.44 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{D_F} \cong \frac{L/D_F}{6500}$, ou de $\cong \frac{L/D_F}{7450}$.

La séparation angulaire minimale, c'est-à-dire le pouvoir séparateur, quand l'effet de la diffraction due au trou est sensible, est donnée par : $\theta_{diffraction} \cong \frac{1.22 \cdot \lambda}{D_F}$ (formule de Rayleigh).

Dans le cas où la source n'est pas monochromatique, il y a dans le centre un recouvrement de plusieurs disques lumineux dû aux différentes longueurs d'onde et une image globale de diamètre égal à celui du disque produit par l'onde de plus grande longueur.

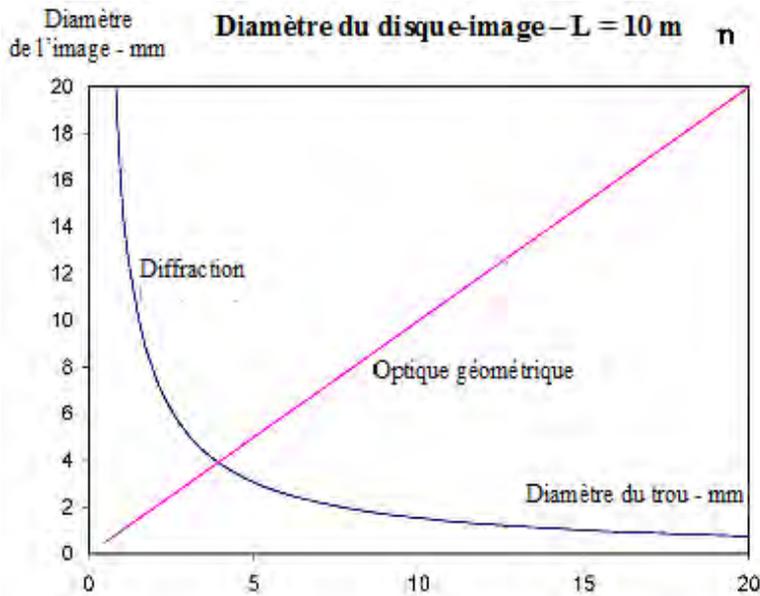
Enfin dans le cas d'une « source non ponctuelle » la diffraction produit un "flou" de l'image car chaque point de l'image produit une figure du type décrit ci-dessus (cercle de confusion).

On n'a pas plus le phénomène de la tache centrale plus lumineuse, mais, si la source est circulaire comme le soleil, peuvent se présenter à la périphérie de faibles franges ou des anneaux de diffraction.

En conclusion, si la source est le Soleil, chaque point de l'image est "flou" d'une quantité égale au diamètre du trou si le trou est "grand", et de la quantité qui vient d'être indiquée si le trou est "petit." **Par conséquent, en diminuant le diamètre du trou, l'image devient de plus en plus nette jusqu'à ce que le phénomène de la diffraction devienne prépondérant.**

Dans le graphique de la Fig. 21 sont reportées les dimensions (calculées en utilisant l'optique géométrique et le phénomène de la diffraction) de l'image centrale produite par une **source monochromatique ponctuelle** suivant la variation du diamètre du trou.

À remarquer que, pour les assez grands diamètres, la tache de diffraction devient négligeable et fidèle à l'image globale.



Pour obtenir l'image la "plus nette" (la moins floue), il convient de diminuer le diamètre du trou jusqu'à ce qu'il devienne égal à celui du disque-image produit par la diffraction (point de rencontre des deux courbes de la Fig. 21). C'est la solution adoptée par les amateurs de la "pin-hole photography" pour diminuer l'effet de flou.

◀ Fig. 21

Cet excellent diamètre est calculé immédiatement avec les formules déjà données:

$$D_{FO} \cong \sqrt{\frac{L}{6500}} \cong \frac{\sqrt{L}}{80} \quad \text{ou} \quad D_{FO} \cong \sqrt{\frac{L}{7450}} \cong \frac{\sqrt{L}}{86} \quad (\text{en cm}).$$

En diminuant le diamètre du trou, l'éclairement de l'image diminue et, en particulier avec le diamètre "excellent", il devient excessivement faible.

Il résulte en effet, en supposant l'écran normal aux rayons que :

$$J_C = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_P}\right)^2 = J_0 \cdot \left(\frac{107.5 \cdot D_F}{L}\right)^2 = J_0 \cdot \frac{1.78}{L} \quad \text{oppure} \quad = J_0 \cdot \frac{1.55}{L} \quad (L \text{ en cm})$$

Par exemple dans S. Maria degli Angeli à Rome, la ligne méridienne, avec $L = 30 \text{ m}$, le diamètre "parfait" serait $D_{FO} = 6,4 - 6,8 \text{ mm}$ et l'éclairement $J_C = J_0/1680$ ou $J_0/1930$ (en réalité le diamètre du trou est de 20,3 mm et l'éclairement de l'image environ 9-10 fois supérieur)⁸.

Le "meilleur" diamètre du trou dans un cadran solaire à chambre obscure

La recherche du "meilleur" diamètre pour un cadran solaire à chambre obscure est l'objet de débats depuis plusieurs siècles par le fait que le phénomène est complexe, plusieurs facteurs de différentes natures étant en jeu (géométriques, optiques, physiologiques), et pour certains peu définissables par des formules mathématiques.

L'aspect de l'image que nous voyons (et que nous mesurons en utilisant notre perception visuelle) ne dépend pas seulement de considérations gnomonique et géométrique, mais également du mécanisme de notre vision, du rapport entre l'éclairement de la zone centrale de l'image (dû aux rayons directs du Soleil) et des zones environnantes (dû à l'éclairement indirect de la chambre) ainsi que du contraste entre les zones différemment illuminées de l'image.

L'illumination de la zone centrale de l'image dépend du diamètre du trou, de l'inclinaison de son plan par rapport au plan horizontal, de sa hauteur et de la distance entre le trou et l'image, de la hauteur méridienne du Soleil, ces derniers critères variant suivant les saisons.

La quantité de lumière indirecte qui arrive au plancher dépend principalement de la surface des fenêtres, de la nature et de la couleur des verres ou vitraux et de leur orientation, des murs qui réfléchissent la lumière, des bâtiments extérieurs, de leur disposition, de leur couleur, et finalement des conditions atmosphériques.

⁸ Les effets de la diffraction s'observent seulement avec les valeurs hautes du rapport L/D_F et encore faut-il que l'éclairage indirect soit presque nul, (parce que le Soleil n'est pas une source monochromatique ni ponctuelle, ou à cause de la basse luminosité des anneaux).

Enfin le contraste entre les zones différemment illuminées que notre vision perçoit change selon les caractéristiques du plancher et de la nature du matériau, opaque ou poli, clair ou obscur, plus ou moins réfléchissant, qui le constitue.

Plus sont élevées la quantité de lumière indirecte qui arrive sur le plancher et la clarté de sa couleur, moins il y aura de contraste apparent de l'image dont l'aspect nous apparaîtra "pauvre".

La multiplicité des facteurs recensés qui entrent en jeu rend difficile l'obtention d'observations répétitives et satisfaisantes pour un même cadran solaire et rend pratiquement impossible une comparaison entre les situations différentes, églises et saisons.

Il faut observer également que le diamètre de l'image, et non seulement son aspect et son contraste, change en fonction de l'éclairage indirect. Sont en cause, les caractéristiques physiologiques mêmes de la vision (loi de Fetchner). Si l'éclairage indirect diminue (par exemple si dans la salle nous fermons les fenêtres ou si le ciel devant celles-ci se couvre), la "limite" de l'image que nous voyons se déplace vers son bord extérieur, alors que c'est le contraire si l'éclairage augmente.

Pour cette raison la limite de l'image que nous observons ne coïncide pas avec la limite "géométrique" de l'ombre ou de la pénombre, mais elle est comprise dans la bande de pénombre et correspond à la limite extérieure de celle-ci diminuée d'environ 30-50% du diamètre du trou.

Vers 1655 Gian Dominique Cassini, lors de la construction du grand cadran solaire de San Petronio à Bologne, a fixé le diamètre du trou exactement à 1/1000 de sa hauteur par rapport au plancher. Probablement en raison de la grande réputation et notoriété de Cassini et de son cadran solaire, ce rapport fut par la suite souvent utilisé dans les grands cadrans solaires⁹ pour la détermination du "meilleur diamètre d'œilleton". De nos jours, cette proportion est presque considérée comme une valeur dogmatique.

À mon avis le rapport entre la hauteur et le diamètre du trou égal à 1000 ne fut pas retenu par Cassini pour quelques raisons gnomoniques ou théoriques, mais certainement à la suite de nombreux tests effectués aux différentes saisons, afin d'obtenir une image lumineuse, bien observable et bien distincte sur le plancher de l'église de S. Petronio dans laquelle aucune variation ne pouvait être imputée aux fenêtres.

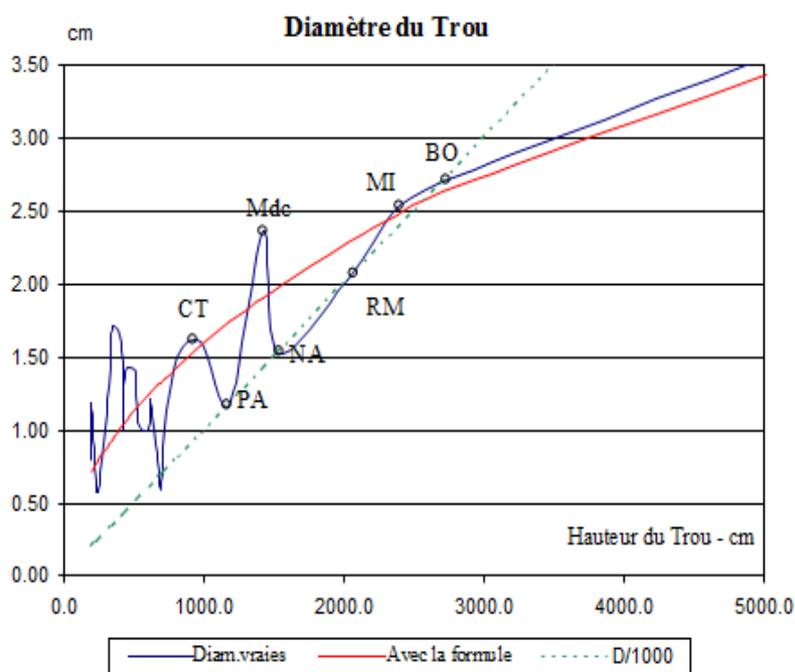


Fig. 22

Des considérations analogues peuvent être faites pour d'autres cadrans solaires de différentes villes italiennes où le rapport 1/1000 aurait produit des trous excessivement petits et des images peu lumineuses.

De l'examen des données disponibles concernant les cadrans solaires à chambre obscure présents en Italie,¹⁰ il ressort que les diamètres existants sont de 2,5 à 5 fois plus grands que le "diamètre excellent" calculé aux Équinoxes et ne prenant

⁹ Rome - S. Maria degli Angeli - Bianchini 1702 - rapport = 1/1000. Milan - Cathédrale - 1786 - rapport = 1/945.

Palerme - Cathédrale - Giuseppe Piazzi 1794 - rapport = 1/1000

¹⁰ Les données suivantes sont extraites de "Le meridiane italiana a camera oscura" par Giorgio Mesturini, présenté au XI^e Séminaire Italien de Gnomonique - Verbania 2002.

en compte que l'effet de la diffraction (Fig. 22). L'éclairement du disque central de l'image résultant est donc de 6 à 25 fois plus grand qu'avec le "diamètre excellent."

A partir de ces considérations on peut définir une formule simple et empirique pour [obtenir](#) une valeur "correcte" du diamètre du trou en fonction de sa hauteur par rapport au plan horizontal:

$$D_F = \sqrt{\frac{H}{390}} \text{ avec H et } D_F \text{ en cm, ou } D_F = \sqrt{25.6 \cdot H} \text{ avec H mètres et } D_F \text{ en mm}$$

On constate immédiatement que cette relation (valide pour nos Latitudes d'environ 38° - 46°) donne des diamètres de trous qui diffèrent seulement de quelques mm par rapport à ceux des cadrans solaires existants. Fait exception, le cadran solaire de la cathédrale de Palerme qui possède un trou excessivement petit (seulement 2,5 fois le diamètre minimum décrit comme "excellent").

Dans le graphique de la Fig. 22 sont reportés les diamètres des trous existants et ceux calculés avec la formule empirique (courbe continue sans ondulations). Le cadran solaire de Palerme se situe au pic négatif correspondant à la valeur 1100.

Dans le tableau suivant sont comparées, pour quelques méridiennes italiennes, les valeurs des diamètres effectifs et celles résultant de la formule ci-dessus.

Il faut observer que les diamètres de trous obtenus avec la formule donnent une valeur du rapport L/D_F toujours > 400 , pour des hauteurs H du trou supérieures à environ 3-4 m et pour des latitudes comprises entre 38° et 46°.

Localité	Hauteur Trou cm	Diamètre Vrai - mm	Diamètre de Formule-mm
Bologna	197	8,0	7,5
Bologna	199	11,8	7,5
Modena	224	8,3	8,0
Bologna	249	6,0	8,4
Bologna	323	12,9	9,6
Padova	342	15,0	9,9
Bologna	423	10,0	11,0
Roma	432	14,0	11,1
Roma – Torre Venti	519	14,0	12,2
Modena	523	10,5	12,2
Bologna	610	12,2	13,2
Bologna	808	15,0	15,2
<i>Palermo–Cattedrale</i>	<i>1178</i>	<i>11,8</i>	<i>18,3</i>
Roma – S.M.Angeli	2030	20,3	24,1
Milano –Duomo	2382	25,2	26,1
Bo-S.Petronio	2707	27,1	27,8
Firenze- S.M.Fiore	9011	50,1	50,7

Dans le cas de petites hauteurs H du trou (inférieures à 3-4 m) il faudrait prendre des diamètres de trous inférieurs à ceux de la formule et plus précisément prendre la valeur: $D_F \leq H/350$.

Disposition du trou

La disposition du trou, c'est-à-dire son positionnement sur le plafond ou sur le mur sud et celle de son plan, par rapport au plan horizontal, est l'objet de discussions anciennes.

Je pense que dans la majorité des cas, le trou a été percé... là où cela était possible, à l'intérieur d'un environnement déjà construit, avec des contraintes structurelles, esthétiques ou autres qui limitaient beaucoup la liberté du concepteur.

Si nous n'avons pas de contrainte dans le positionnement de l'œilleton, le critère à suivre, à mon avis, est celui de "l'illumino-technique" qui consiste à rendre l'image du Soleil en Hiver (quand elle a le plus grand diamètre¹¹) la plus lumineuse possible. Car l'éclairement de l'image doit être important par rapport aux zones du plancher environnant, de façon à présenter un bon contraste et à rendre facile son observation¹².

En indiquant par H la hauteur du centre du trou par rapport au plan horizontal (Ortho-trou), et h la hauteur du Soleil, par γ l'inclinaison du plan du trou par rapport au plan horizontal et par k la valeur 107,5, on peut écrire la relation suivante qui exprime l'intensité d'éclairement dans la zone centrale de l'image:

$$J = J_0 \cdot \left(\frac{k \cdot D_F}{H} \right)^2 \cdot \sin^3(h) \cdot \sin(h + \gamma) = \mathbf{A} \cdot \sin^3(h) \cdot \sin(h + \gamma) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$$

où \mathbf{A} est une quantité constante caractéristique du cadran solaire considéré et \mathbf{R} une fonction de la hauteur du Soleil et de l'angle de positionnement du trou.

Comme il a déjà été montré, les axes de la zone centrale sont donnés par:

$$\text{axe transversal } D_p - D_F; \text{ axe longitudinal } \frac{D_p - D_F \cdot \sin(h + \gamma)}{\sin(h)} \text{ avec } D_p = \frac{H}{k \cdot \sin(h)}$$

J'indiquerai pour simplifier par RS et RW les valeurs de la fonction \mathbf{R} pour les jours du Solstice d'été et d'hiver (Summer, Winter).

En divisant ces deux valeurs on obtient un paramètre $\mathcal{C} = \text{RS}/\text{RW}$, qui donne une idée de l'uniformité d'éclairement de l'image entre les deux cas extrêmes.

Dans les exemples numériques qui suivent les valeurs des rapports RS et RW sont calculées pour deux localités de Latitude 42° et 45°.

Les différents cas qui peuvent se présenter en fonction du positionnement du plan du trou sont:

a) Positionnement astronomique

Axe du trou dans la direction du Soleil à midi aux jours des Équinoxes et ensuite incliné de (90° - Lat) par rapport au plan horizontal. Le plan du trou est le plan polaire incliné sur l'horizontal d'un angle égal à la Latitude du lieu.

Dans ce cas les rayons du Soleil aux Solstices sont d'inclinaisons égales par rapport au plan du trou et la quantité de lumière entrante dans les deux cas est égale.

Valeurs: Lat. = 42°; $\gamma = 42^\circ$; h= RS = 0,78; RW = 0,065; $\mathcal{C} = 12,0$
 Lat. = 45°; $\gamma = 45^\circ$; h= RS = 0,74; RW = 0,045; $\mathcal{C} = 16,4$

b) Positionnement géométrique

L'axe du trou est dirigé exactement vers le point moyen de la ligne méridienne, c'est-à-dire sur le point équidistant de ceux des deux solstices été/hiver.

Valeurs: Lat. = 42°; $\gamma = 51,7^\circ$; RS = 0,71; RW = 0,069; $\mathcal{C} = 10,3$
 Lat. = 45°; $\gamma = 55,7^\circ$; RS = 0,67; RW = 0,048; $\mathcal{C} = 13,9$

c) Positionnement illumino-technique

L'axe du trou est dirigé exactement vers le point du solstice d'hiver.

¹¹ Je considère toujours, dans les raisonnements qui suivent, que la ligne méridienne est horizontale, c'est-à-dire positionnée sur le plancher. Dans le cas où elle est verticale sur un mur, les relations changent légèrement et peuvent être facilement obtenues.

¹² Dans un milieu fermé comme une église ou une cathédrale, l'illumination indirecte est très dépendante des caractéristiques architecturales et saisonnières et peut varier d'environ de 5 à 15 lux ou plus.

À mon avis c'est le meilleur positionnement car la quantité de lumière solaire entrant par le trou est grande en hiver, l'image atteint alors ses dimensions maximales, tandis qu'en été, elle est plus petite.

Valeurs: Lat. = 42°; $\gamma = 65,5^\circ$; RS = 0,58; RW = 0,071; $\mathcal{C} = 8,2$
 Lat. = 45°; $\gamma = 68,5^\circ$; RS = 0,55; RW = 0,049; $\mathcal{C} = 11,2$

d) Trou vertical

Le trou est réalisé souvent sur une plaque métallique verticale soit pour réduire l'entrée de la pluie, soit parce que la chambre est séparée de l'extérieur par une paroi verticale.

Valeurs: Lat. = 42°; $\gamma = 90^\circ$; RS = 0,27; RW = 0,065; $\mathcal{C} = 4,2$
 Lat. = 45°; $\gamma = 90^\circ$; RS = 0,30; RW = 0,046; $\mathcal{C} = 6,4$

Dans ce cas l'éclairage de l'image au Solstice d'été diminue de moitié par rapport au cas précédent.

L'uniformité de l'éclairage augmente, mais au détriment de la luminosité de l'image.

e) Trou horizontal

Ceci est un cas souvent imposé lorsque le plafond de la chambre est horizontal.

Valeurs: Lat. = 42°; $\gamma = 0^\circ$; RS = 0,81; RW = 0,030; $\mathcal{C} = 27,3$
 Lat. = 45°; $\gamma = 0^\circ$; RS = 0,75; RW = 0,018; $\mathcal{C} = 41,5$

L'intensité de l'éclairage de l'image en hiver est très réduite et vaut presque la moitié des précédents cas. L'uniformité de l'éclairage durant l'année est très insuffisante.

Comme on peut le voir, l'éclairage de l'image en hiver est à peu près constant (à l'exclusion du cas e). Il s'améliore légèrement dans le cas c).

Considérons l'exemple du cadran solaire de S. Maria degli Angeli à Rome avec $H=20,3\text{m}$, $D_F=20,3\text{ mm}$, Lat. = 42°.

En prenant comme valeur moyenne de l'éclairage produit par le Soleil sur une surface perpendiculaire à ses rayons la valeur $J_0 = 100000\text{ lumen/mq}$, nous obtenons:

- Rapports distance/diamètre du trou $L_S/D_F = 1055$; $L_E/D_F = 1346$; $L_W/D_F = 2411$
- Valeur de l'éclairage de la zone centrale de l'image $J = 1156 \mathcal{R}$

et ensuite:

- Cas a) JS = 904 lux JE = 474 lux JW = 76 lux
- Cas e) JS = 935 lux JE = 352 lux JW = 34 lux

Gianni Ferrari
 Ottobre 2009
 gfmerid@gmail.com





Ombre et pénombre

Denis Savoie

La plupart des cadrans solaires utilisent comme principe le déplacement de l'ombre d'un objet sur un plan pour déterminer l'heure et la date. Or il est facile de constater que l'ombre d'un style polaire de forme cylindrique par exemple a une certaine épaisseur et que son extrémité est plus ou moins floue.

On admet qu'il est "telle heure" sur le cadran lorsque le "centre" de l'ombre projetée par une tige recouvre une ligne horaire. Par contre, pour lire précisément l'indication de l'extrémité de l'ombre du style sur un arc diurne, on est confronté au problème de la pénombre, qui altère parfois notablement la lecture. Ces inconvénients sont connus depuis l'Antiquité; on les contourne en partie en munissant l'extrémité du style d'une boule, ou mieux, d'un œilleton.

En fait, les problèmes d'ombre et de pénombre sont surtout importants sur les cadrans solaires de grandes dimensions. Examinons de plus près les erreurs induites par ces phénomènes et comment on peut (partiellement) y remédier.

1 – Cadran horizontal

Il n'est pas inutile pour commencer de rappeler deux définitions :

- ombre : zone sombre créée par un corps opaque qui intercepte les rayons d'une source lumineuse; absence de lumière (surtout du Soleil) dans une telle zone.
- pénombre : zone d'ombre partielle créée par un corps opaque qui intercepte une partie des rayons d'une source lumineuse étendue.

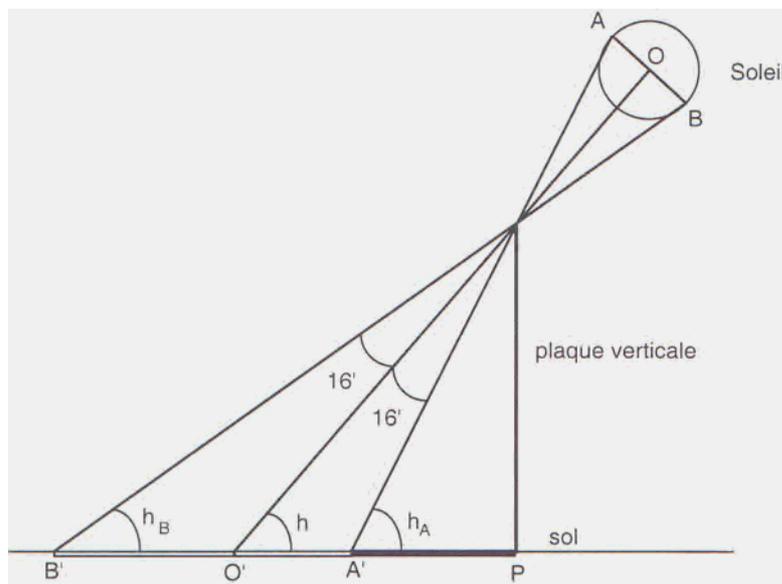


figure 1

A l'œil nu, faire la différence entre l'ombre pure et la pénombre est pratiquement impossible; il suffit d'examiner l'extrémité de l'ombre de l'obélisque de la place de la Concorde à Paris pour s'en rendre compte. Intuitivement, on constate en outre que plus le Soleil est bas sur l'horizon, moins l'ombre d'un style est nette et plus la pénombre prend de l'importance. Il arrive même un moment où on ne distingue plus qu'une vague absence de lumière, de sorte que la lecture de l'heure devient impossible !

Pour fixer les idées, imaginons une plaque métallique mince, verticale, dont l'arête projette au sol un rideau d'ombre (figure 1). En raison du diamètre apparent du Soleil, qui vaut

32' en moyenne¹, la zone PA' est de l'ombre pure et la zone O'B' est de la pénombre. En théorie, on doit lire l'heure lorsque la zone PO' arrive sur une ligne horaire fictive, puisque cette zone PO' correspond au photocentre du Soleil. Mais dans la réalité, comme on ne peut pas trop apprécier la zone O'A', c'est la zone PA' qui est prise en considération.

Si l'on plaçait son oeil au sol, on verrait depuis A' le bord supérieur du Soleil, et donc son premier rayon; en O', on verrait le centre O du Soleil; en B' on verrait le bord inférieur du Soleil.

Ce qui veut donc dire que la hauteur du Soleil issue du calcul se rapporte à O, centre du Soleil; la hauteur h_A est la hauteur du Soleil affectée du demi-diamètre (soit $h_A = h + 16'$) et la hauteur h_B correspond à $(h - 16')$.

Il est donc facile de calculer les valeurs de l'ombre pure et de la pénombre; en prenant une hauteur $a = 100$ cm pour la plaque métallique, on a, pour une latitude de 48° :

$$PA' = a \cotan (h + 16')$$

$$PO' = a \cotan (h)$$

$$PB' = a \cotan (h - 16')$$

Le tableau suivant résume les valeurs (en cm) obtenues :

h	PO'	PA'	PB'
60°	57,74	57,12	58,36
50°	83,91	83,12	84,71
40°	119,18	118,06	120,31
30°	173,21	171,36	175,08
20°	274,75	270,82	278,78
10°	567,13	552,09	582,98

Ce qui nous intéresse ici, c'est la différence entre PO' et PA', c'est-à-dire la différence entre la longueur théorique du rideau d'ombre (PO') qui est située dans la pénombre, et PA' qui constitue l'ombre pure. On remarque par exemple que, pour une hauteur du Soleil de 10° , l'écart atteint 15 cm; pour des hauteurs inférieures, l'écart atteint des valeurs considérables. Appelons Δ la différence $PO' - PA'$; on a :

$$\Delta = a [\cotan h - \cotan (h + 16')]$$

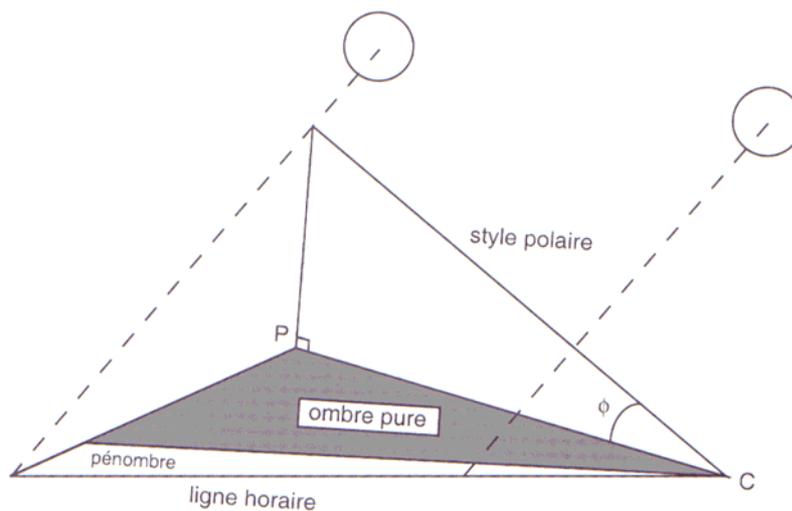


figure 2

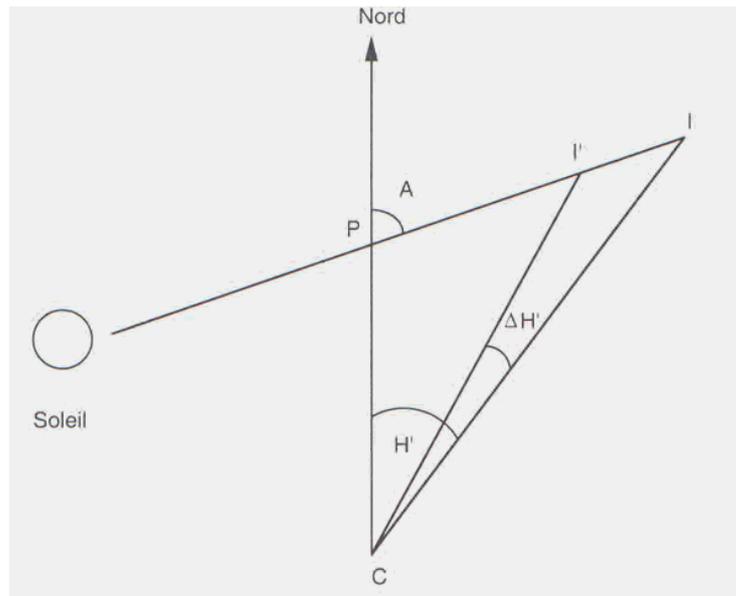
Si l'on considère maintenant le style polaire d'un cadran horizontal (figure 2), le rideau d'ombre triangulaire projeté au sol résulte de la somme des extrémités d'une série de styles droits de hauteurs différentes. Or Δ dépend aussi de la longueur d'un style droit, ce qui signifie que plus on se rapproche du pied du style polaire, plus l'effet de pénombre est atténué; c'est l'inverse lorsqu'on s'en éloigne.

¹Le demi-diamètre apparent du Soleil varie de 16' 16" au périhélie (début janvier) à 15' 44" à l'aphélie (début juillet).

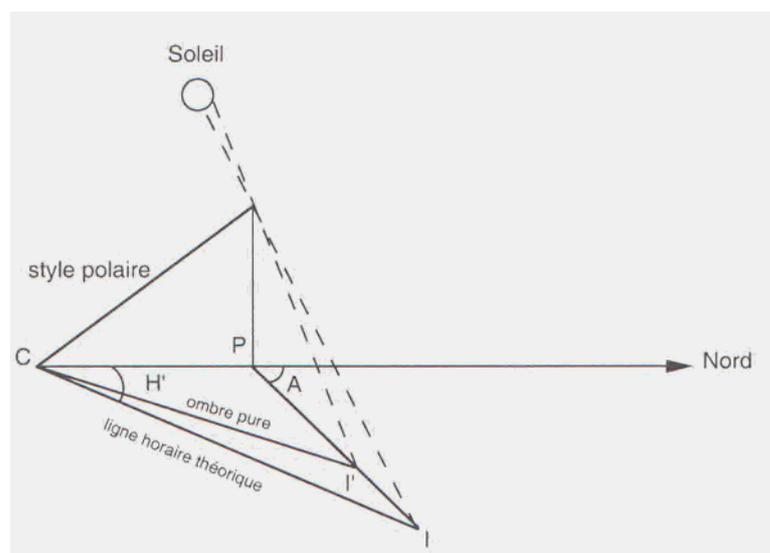
Ce qui signifie que, par rapport à une ligne horaire théorique, la zone de pénombre s'évase depuis le pied du style polaire jusqu'à l'extrémité de l'ombre.

Il en résulte que, dans la lecture de l'heure, on aura tendance à estimer que le cadran est en avance le matin² (puisque c'est l'ombre pure qui coïncide en premier avec la ligne horaire, l'ombre du photocentre arrivant après) et que le cadran retarde l'après-midi (puisque c'est l'ombre du photocentre qui arrive en premier).

Il est intéressant d'estimer, dans le cas d'un cadran horizontal muni d'un style polaire, le temps ΔH que met l'ombre pure à atteindre une ligne horaire lorsque l'ombre du photocentre solaire coïncide avec une ligne. La figure 3 représente un cadran horizontal vu depuis le zénith:



▲ figures 3 ▼



²Il se passe le même phénomène avec un cadran solaire vertical : le matin, plus précisément avant le franchissement de la sous-styloire, on surestime l'heure. On la sous-estime après.

C'est le pied du style polaire, P le pied du style droit de longueur a , H' est l'angle tabulaire d'une ligne horaire avec midi, A l'azimut du Soleil et h sa hauteur. PI est l'ombre du style droit correspondant au photocentre, CI étant la longueur de l'ombre du style polaire sur une ligne horaire, et PI' l'ombre du style droit correspondant au bord supérieur du Soleil, de sorte que CI' est l'ombre pure du style polaire (alors que CI est l'ombre théorique). Il est facile d'obtenir $\Delta H'$, c'est-à-dire l'angle entre l'ombre pure et l'ombre théorique. On a en effet :

$$\sin \Delta H' = II' \sin (A - H') / CI'$$

avec

$$\tan H' = \sin \phi \tan H$$

$$II' = a [\cotan h - \cotan (h + 16')]$$

$$\tan F = \tan \phi / \cos H$$

$$CI = [(a/\sin \phi) \cos \delta] / \cos (F - \delta)$$

$$CI'^2 = II'^2 + CI^2 - 2.CI.II' \cos (A - H')$$

Ayant $\Delta H'$, on déduit ΔH par : $\tan \Delta H = \tan (H' - \Delta H') / \sin \phi$

Sur le cadran, on voit H alors qu'on lit $H + \Delta H$ (l'après-midi, car le matin on lit $H - \Delta H$).

Comme ces formules sont assez lourdes, il est plus aisé de regarder le problème en raisonnant sur la sphère céleste (figure 4). Dans le triangle sphérique PZS (Pôle-Zénith-Soleil), on cherche l'erreur ΔH due au demi-diamètre solaire s . On a :

$$\sin \Delta H = (\sin s \cos \phi \sin H) / (\cos h \cos \delta)$$

Cette formule permet de faire une intéressante remarque : la longueur du style droit – et donc du style polaire – n'intervient pas (en théorie...) dans l'erreur ombre pure-pénombre.

Application numérique : en prenant $\phi = 44^\circ$, on a (ΔH est exprimé en secondes de temps) :

$$\delta = + 23^\circ,433 \quad \delta = 0^\circ \quad \delta = - 23^\circ,433$$

H = 0°	0	0	0
H = 15°	32	17	14
H = 30°	47	29	26
H = 45°	53	38	36
H = 60°	55	43	44
H = 75°	54	45	
H = 90°	52		
H = 105°	49		

On peut donc dire, pour résumer, que sous nos latitudes, l'erreur due à la pénombre est la plus importante en été et vaut *grosso modo* près d'une minute au maximum.

2 – Cas général

Les résultats précédents sont-ils valables pour tous les cadrans solaires? Autrement dit, l'erreur ombre pure-pénombre est-elle la même pour un cadran horizontal et pour un cadran polaire par exemple ? De plus, l'erreur est-elle toujours la plus importante en été? Prenons le cadran polaire classique; le jour de l'équinoxe, l'ombre du style balaye les lignes horaires parallèles; l'erreur devient alors égale à $(0^\circ 16')/15^\circ$, soit 64 secondes, et ceci toute la journée.

L'erreur est donc supérieure à celle qu'on observe le même jour sur un cadran horizontal !

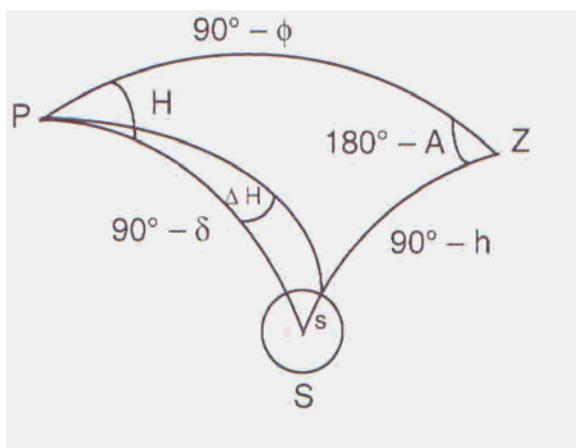


Figure 4

Examinons donc le cas général de l'erreur sur un cadran incliné-déclinant; la figure 4 représente un tel cadran, D étant la déclinaison gnomonique et z la distance zénithale du style droit; en théorie, on doit lire H mais en raison du demi-diamètre solaire, on commet une erreur ΔH . On a:

$$\sin \Delta H = [\sin s \sin (\gamma + \rho)] / \cos \delta$$

avec: $\sin \gamma = \cos \phi \sin H / \cos h$

(l'angle γ est l'angle à l'astre)

$$\sin \rho = \sin z \sin (A - D) / \sin \zeta$$

$$\cos \zeta = \cos z \sin h + \sin z \cos h \cos (A - D)$$

Application numérique :

En prenant $\phi = 44^\circ$, $D = 0^\circ$, $z = 44^\circ$, $\delta = 0^\circ$, on obtient pour $H = 45^\circ$: $\zeta = 45^\circ$, $\rho = 53^\circ,787$,

$\gamma = 36^\circ,213$ d'où $\Delta H = 64$ secondes.

D'ailleurs le jour de l'équinoxe, quel que soit H et quelle que soit ϕ , on a toujours $\Delta H = 64$ secondes pour un cadran polaire. Si maintenant on calcule l'erreur le jour du solstice d'été, on constate qu'elle atteint 70 secondes au maximum, mais qu'elle varie en fonction de l'heure.

Il ne faut pas perdre de vue que ces calculs théoriques ne peuvent donner qu'un ordre de grandeur de l'erreur commise dans la lecture de l'heure. Car la zone délimitant l'ombre pure de la pénombre est difficile à apprécier, et ce d'autant plus que les dimensions du cadran solaire sont grandes. D'autre part, plus le Soleil est bas sur l'horizon, moins la zone d'ombre pure est contrastée.

En ce qui concerne les arcs diurnes, où la lecture s'effectue à partir de l'extrémité de l'ombre, on a souvent une dilution de cette dernière, ce qui rend l'appréciation difficile. Cette remarque s'applique aussi à certains cadrans de hauteur, style montre de berger, qui deviennent moins performants lorsque le Soleil est bas, alors qu'ils sont en théorie les plus précis à ces instants !

La meilleure solution consiste donc à munir le style d'un oeilleton, puisque c'est alors la tache de lumière qui permet de lire l'heure et la date. Mais quel doit être son diamètre ? Lors de la construction des grandes méridiennes aux XVII^e et XVIII^e siècle on appliquait la règle suivante: le diamètre du trou doit être égal à un millièème de la hauteur de la méridienne.



3 On vérifiera que tenir compte de la déclinaison du bord solaire (au lieu du photocentre) ne modifie pas les résultats.



Le Shadow sharpener

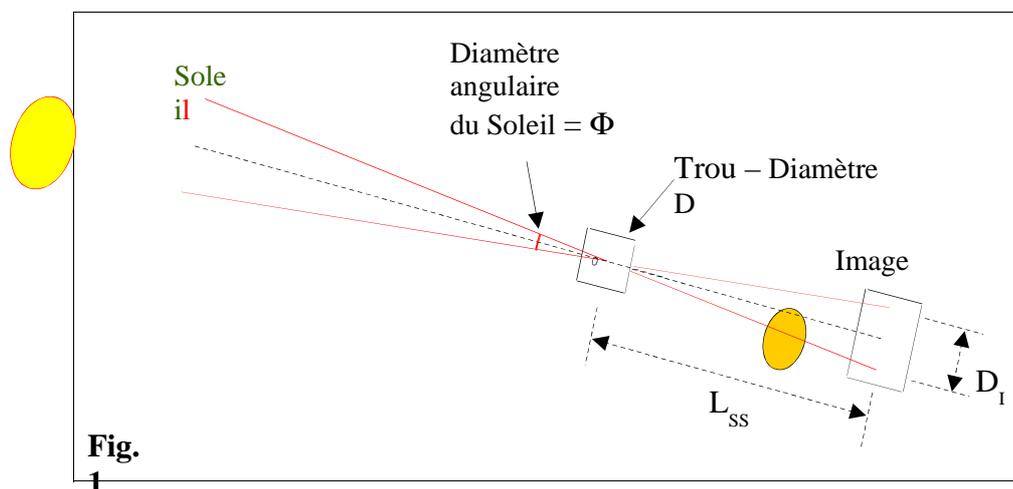
Par Gianni Ferrari

Un "Shadow Sharpener" ou "intensificateur d'ombre"¹ est un instrument qui permet de visualiser la ligne de séparation entre l'ombre et la pénombre produites par un objet lointain éclairé par le Soleil. En d'autres termes, si nous avons un objet éclairé par le Soleil qui produit une ombre, un Shadow Sharpener permettra, avec une bonne approximation, de mettre en évidence la limite de son ombre "géométrique" ou "théorique", c'est-à-dire la ligne d'ombre que l'on obtiendrait si le Soleil avait un diamètre infinitésimal et réduit à son centre.

Nous pouvons construire des Shadow Sharpener (S.S) de différentes manières, éventuellement en recourant à des systèmes optiques plus ou moins complexes. L'appareil le plus simple et le plus ancien se base sur la projection, faite avec un simple trou sténopéique², de l'image du disque solaire et de l'objet qui produit l'ombre.

Les appareils de ce type furent probablement utilisés par les astronomes chinois il y a de nombreux siècles et certainement par des astronomes indiens au début de 1700 pour trouver avec précision la "limite" de l'ombre du gnomon du grand cadran solaire équatorial de Jaipur en Inde.

L'instrument est très simple. Il consiste en un petit écran opaque dans lequel est pratiqué un trou circulaire de petite dimension. "L'écran" est un rectangle de carton, une mince lame de métal ou encore de plastique de quelques cm de côté. Le trou circulaire doit avoir un diamètre d'environ ½ mm à 2 mm. Un trou pratiqué avec une grosse aiguille ou avec un clou dans une carte à jouer ou dans un rectangle coupé dans une feuille d'aluminium alimentaire permet d'obtenir rapidement un excellent S.S.



¹ J'ai utilisé le terme anglais "Shadow Sharpener", abrégé en S.S, car à ma connaissance il n'y a pas en français de terme décrivant correctement ce dispositif universellement connu sous ce nom.

² Le terme sténopéique dérive du mot grec "steinôpos", formé par les deux mots "stenosis et opê" qui, traduits littéralement signifient "étroit" et "ouverture, trou" (les mots ayant la même racine sont par ex. "sténose" et "opercule"). Donc la locution "trou sténopéique " veut dire "trou de petite ouverture" ou "trou de petit diamètre". Le terme trou sténopéique désigné exclusivement aujourd'hui au trou pratiqué dans le mur d'une chambre ou dans la paroi d'une boîte dont l'intérieur est sombre (chambre obscure). Il permet de projeter sur un plan opposé l'image des objets qui se trouvent devant lui. Il est utilisé dans le "pin-hole photography".

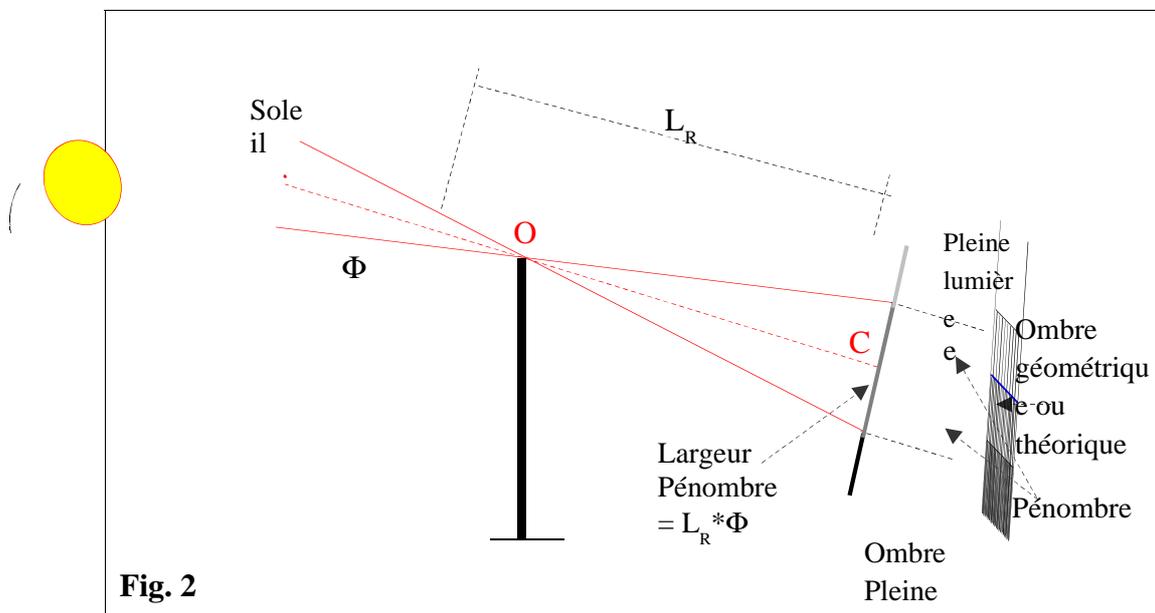
Si nous disposons un S.S de manière à ce que son plan soit perpendiculaire aux rayons solaires, son trou projettera l'image du disque solaire sur un second écran parallèle (Fig. 1). En indiquant par L_{SS} la distance entre le trou et l'écran-image; par D le diamètre du trou et par Φ le diamètre angulaire du Soleil (en radians), nous obtenons immédiatement la valeur du diamètre D_I de l'image produite:

$$D_I = L_{SS} \cdot \Phi_{rad} \approx \frac{L_{SS}}{107} \text{ avec } \Phi_{rad} \approx \frac{32'}{60} \cdot \frac{\pi}{180} \approx \frac{1}{107}$$

Comme simple règle mnémonique on peut dire que le diamètre de l'image est de 1 cm pour chaque mètre de distance. La distance L_{SS} est souvent indiquée comme "longueur" du S.S.

Supposons maintenant avoir un élément à bord rectiligne, interposé entre le Soleil et la petite plaque percée (le S.S), placé à une certaine distance de celle-ci. L'élément peut être un fil ou un câble, le bord supérieur d'un mur ou le bord d'un toit, le coin d'un gnomon incliné ou le style d'un grand cadran solaire, etc.

En raison du diamètre "fini" du Soleil, on obtiendra une zone de "pénombre" entre son ombre et la zone de pleine lumière. Cette zone de pénombre a une largeur $L_R \cdot \Phi_{rad}$, L_R étant la distance entre l'élément rectiligne et le plan ombragé. (Fig. 2)



Si un S.S est disposé de façon à intercepter le bord de l'ombre de cet élément rectiligne ("Objet assombrissant") et si leur distance est grande par rapport à la "longueur" du S.S., alors le trou produit soit l'image du profil de l'élément qui fait ombre, soit celle du disque solaire partiellement couvert (Fig. 3).

Si nous tenons en main le S.S et le déplaçons de la pleine lumière vers la zone en pleine ombre, alors nous verrons d'abord le disque image complètement éclairé, puis, pendant que le trou entre dans la pénombre, l'image du disque qui peu à peu s'assombrit.

Lorsque le disque solaire apparaît partagé exactement en deux parties, (3^e image de la fig. 4), la ligne de séparation entre l'ombre et la lumière coïncide exactement avec la ligne de l'ombre géométrique de l'élément à l'instant de l'observation. En effet, par définition, l'ombre géométrique est celle qui serait produite par le Soleil si son diamètre était nul, c'est-à-dire celle produite par le centre du Soleil.

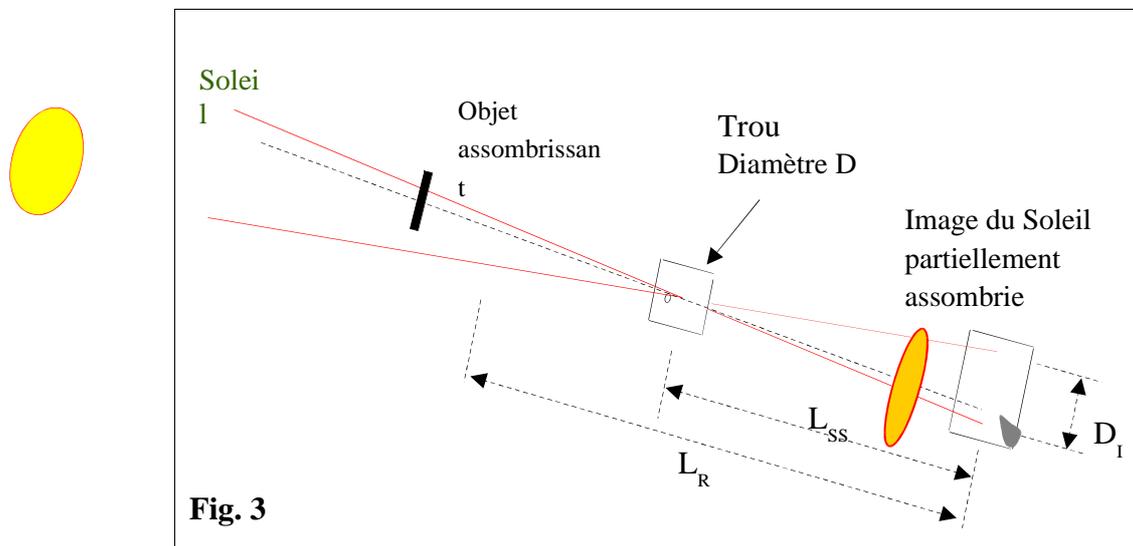


Fig. 4

Recherche de l'ombre théorique

La recherche de l'ombre théorique d'un élément linéaire, en particulier le bord d'un style, est l'application la plus importante du S.S :

- soit pour vérifier l'exactitude des lignes horaires d'un cadran solaire déjà tracé: fonction de vérification,

- soit pour définir le tracé des lignes horaires elles-mêmes: fonction de projet.

Dans le premier cas on peut maintenir un S.S immobile, éventuellement en le fixant à un support, de façon à projeter l'image du Soleil exactement sur une des lignes (par exemple, la ligne horaire de l'heure H) et attendre que l'ombre du bord du style arrive au trou. Alors, on verra le disque solaire s'assombrir lentement et l'on pourra déterminer avec une bonne précision l'instant où le disque même est exactement partagé en deux. C'est l'instant exact pour lequel notre cadran solaire marque l'heure H.

Dans le second cas par contre, si nous déplaçons comme il se doit le S.S., nous pouvons chercher à visualiser en continu le disque solaire partagé en deux et ensuite marquer sur le plan la ligne de séparation entre le disque éclairé et le disque en ombre, exactement au déchocher de l'heure H.

La longueur L_{SS} du S.S est limitée par deux exigences différentes:

- Pour pouvoir déterminer assez confortablement et avec quelque précision l'instant où le disque du Soleil est exactement partagé en deux, il faut que son diamètre soit au moins d'une dizaine de mm.

- Pour obtenir une image assez définie (peu floue) de l'élément qui produit l'ombre, la longueur L_{SS} doit être seulement une fraction de la distance L_R entre l'élément et le plan (Fig. 3).

À la suite de tests effectués par différents amateurs, il se trouve que la longueur L_{SS} optimum doit être comprise entre 70 et 150 cm (environ). Ces valeurs nécessitent une distance

L_R du style d'au moins 3 - 5 m et produisant une image du Soleil d'un diamètre d'environ 7 -14 mm.

Pour ces raisons, un S.S ne peut pas être utilisé pour la lecture de cadrans solaires de dimensions normales pour lesquels la distance entre le gnomon et le plan est toujours inférieure à 2-3 m. Il devrait avoir en effet une longueur inférieure à environ 40 cm pour une image du Soleil de seulement 4 mm de diamètre. Ce qui est peu utilisable pratiquement.

Erreurs - Précision des mesures.

Même si un S.S permet de trouver avec une excellente approximation la ligne de l'ombre théorique d'un gnomon à un instant donné, il est source d'erreurs. Il ne permet pas, comme on pourrait le penser, d'arriver aux précisions extrêmes. Les erreurs que nous pouvons rencontrer sont variables, j'énumérerai seulement les plus importantes.

1. L'image produite par un trou sténopéique est toujours entourée d'une bande floue dite d' "incertitude" ou suivant le terme anglo-saxon, de "fuzzyness". Celle-ci a une largeur à peu près égale aux dimensions plus grandes du trou.

2. La dimension du trou dans un S.S ne peut pas être réduite au-delà d'une certaine limite. Soit parce que l'image perd de sa clarté à cause de phénomènes de diffraction de la lumière, soit à cause de la diminution de la luminosité de l'image du Soleil. L'examen de cette image devient assez difficile si elle est à peine plus lumineuse que la zone environnante. Plusieurs auteurs ont montré qu'il n'est pas utile de diminuer le trou en dessous de la valeur 0.7-1 mm de diamètre.

3. Si le trou du S.S a le bord dentelé, il produit une zone floue d'une largeur avoisinant le diamètre maximum des dents. D'une manière analogue, si le trou

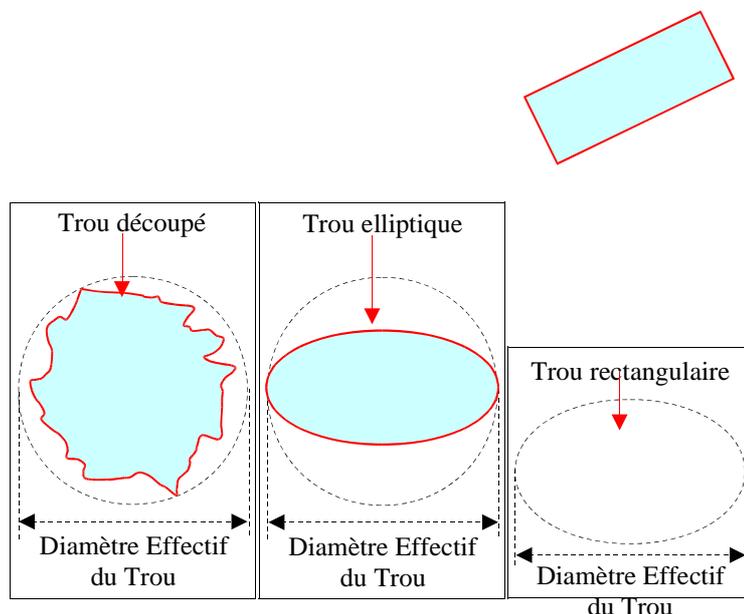


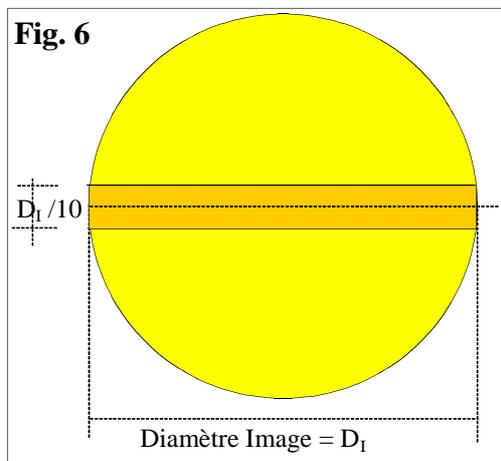
Fig. 5

n'est pas parfaitement circulaire, la bande floue est, en quelques points, large comme la dimension maximale du trou (Fig. 5). Pour cette raison - outre la simplicité d'un tel dispositif - le trou est toujours circulaire, bien que théoriquement sa forme soit sans importance. Dans le "pin-hole photography" on a recourt à des techniques spéciales pour la réalisation des trous, (par exemple au laser), car il est nécessaire que les trous aient une bordure bien régulière avec des diamètres de l'ordre du dixième de millimètre.

Pour déterminer avec précision l'instant auquel l'ombre de "l'élément-gnomon" partage en deux le disque du Soleil, il faudrait que le S.S produisît l'image la plus grande possible et il serait ensuite opportun d'augmenter le plus possible la longueur du S.S, c'est-à-dire la distance L_{SS} entre trou et plan. Mais cela conduit à quelques inconvénients, telle la difficulté d'avoir une image immobile lorsque le S.S est tenu en main et la diminution de l'éclairement du disque-image du Soleil (voir n. 2). Du fait que la distance L_R entre "l'élément-gnomon" et le plan doit être au moins de 5 à 8 fois supérieure à la distance L_{SS} (Fig. 3), cette dernière ne

peut pas souvent être portée à de grandes dimensions. Si le rapport L_R / L_{SS} diminue, il se produit en effet un "flou" de l'image de "l'élément-gnomon" obtenue par le S.S.

4. En tout cas la détermination de l'instant où l'image du disque solaire est divisée par deux



n'est pas facile. Ainsi en supposant une incertitude de 1/10 du diamètre, ce qui est à mon avis déjà optimiste (Fig. 6), l'erreur sur l'instant qu'en résulterait serait de $\pm \frac{1}{20} \cdot 2 \text{ min} = \pm 6 \text{ sec}$, sachant qu'en pratique le Soleil met 2 minutes pour se déplacer d'une quantité égale à son diamètre³.

Pour toutes les raisons énumérées ici, je ne crois pas que l'erreur totale sur l'instant auquel l'image du Soleil est partagé en deux, c'est-à-dire l'instant où l'ombre théorique passe par un point du plan, puisse être inférieure à $\pm 8 \leftrightarrow 10 \text{ sec}$.

Quelques curiosités

Outre l'utilisation précédemment décrite, un trou sténopéique ou un S.S permet par exemple de "voir" sur le terrain l'ombre d'un fil électrique, ou les branches et les feuilles d'un arbre jetant sur un mur une ombre de taches de lumière. Il est suffisant de mettre le trou à une certaine distance du mur, dans la zone d'ombre, et de le déplacer lentement avec patience. (Fig. 7)



Fig. 7

Un S.S peut être obtenu très simplement en formant un trou avec les doigts de la main. Par exemple nous pouvons joindre les pulpes du pouce et de l'index de chaque main, puis les accoler entre eux. Une autre manière est de serrer le poing et de relever l'index en le maintenant plié. Entre lui et le poing se forme un petit trou utilisable comme simple S.S.

Un S.S permet de "voir" le profil d'un obstacle sur le fond du disque du Soleil. Il ne peut pas être utilisé dans les méridiennes à œillette, c'est-à-dire dans les grands cadrans solaires construits en milieu fermé dans lequel un trou projette l'image du Soleil. En effet, pour ce type de cadran solaire, un S.S donnerait seulement une petite image du trou sans fournir l'image du disque du Soleil. Si l'on pouvait mettre l'œil à la place du petit trou du S.S, on ne verrait que le trou de l'œilleton du cadran solaire complètement éclairé par le Soleil, dont le disque, s'il n'était pas couvert, apparaîtrait plus grand.

Méthodes différentes

Un S.S "optique" peut être obtenu très simplement en projetant l'image du Soleil avec de simples jumelles. Dans ce cas l'image est très agrandie, très nette et précise.

³ Sachant que 1° d'angle horaire correspond à 4 min de temps, et que le diamètre moyen du Soleil est d'environ 31', ce déplacement prendra $\approx \frac{31}{60} \cdot 4 \text{ min} = 124 \text{ sec}$

Un système différent permettant d'obtenir les mêmes résultats serait de mettre notre œil "derrière" ou "sur" la ligne horaire ou "derrière" le plan du cadran solaire puis de ce point, tourner le regard vers le Soleil. Si nous pouvions faire cela, (et si notre œil se trouvait "derrière" une zone éclairé), nous verrions le disque plein du Soleil se déplacer lentement jusqu'à atteindre "l'élément-gnomon" et être alors assombri, exactement comme dans un S.S.

Pour pouvoir mettre l'œil "sur" la ligne horaire, il suffit de placer sur celle-ci un miroir, comme l'a proposé pour la première fois en mai 1999 William Maddux, et chercher, au début avec patience, l'image réfléchie du Soleil. Évidemment il faut atténuer la brillance du Soleil en utilisant un verre de soudeur, une paire de "lunettes d'éclipse", un filtre solaire en mylar ou plusieurs couches de pellicule photographique non exposée ni développée.

ATTENTION ! Il ne faut **JAMAIS** regarder directement le Soleil ou son image réfléchie, sans une sûre protection des yeux.



En complément à cet article, vous trouverez ci après l'étude :

Tache solaire et chambre obscure

« Cette brève note fait suite à un précédent article que j'ai rédigé sur le sujet. Elle a été longtemps discutée et complétée grâce aux suggestions du Dr. Frank King (Computing for Natural Scientists, Cambridge University).

C'est seulement après la diffusion du présent écrit que le Dr. Piero Ranfagni de l'Observatoire d'Arcetri a décidé d'organiser l'observation du passage de Vénus dans l'église de S. Maria del Fiore à Florence, le 8 juin 2004 »

Gianni Ferrari

Tache solaire et chambre obscure

Gianni Ferrari

VISUALISATION DES TACHES SOLAIRES avec UNE MÉRIDIENNE À CHAMBRE OBSCURE. Est étudiée ici, de manière qualitative et quantitative, la possibilité qu'une tache solaire ou que le disque d'une planète interposée puissent être observés dans l'image du soleil projetée par le trou d'une méridienne à chambre obscure. Quelques relations mathématiques sont données afin de rechercher les conditions de visibilité suivant les valeurs mises en jeu.

PRÉAMBULE

On dit que Képler en 1607, voulant observer le passage de Mercure devant le Soleil utilisa une "chambre obscure" réalisée avec un trou fait dans le plafond de sa maison. Il ne vit pas Mercure mais il fut abusé par une tache solaire.

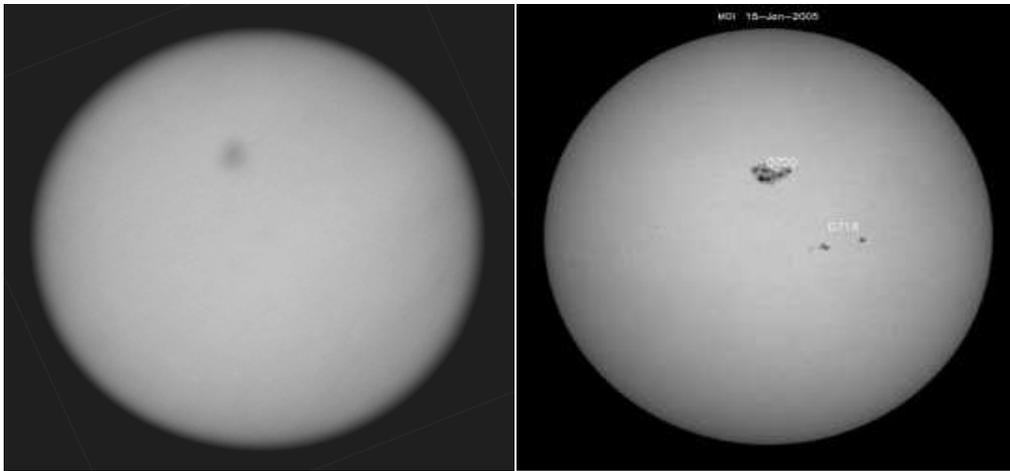


Image du Soleil photographiée le 14 Janvier 2005 par Catamo et Lucarini dans la méridienne de l'église de Formello, près de Rome, et image du Soleil le jour suivant (source NASA).

Le groupe de taches n. 720, avec des dimensions d'environ 2.6×1.3 minutes d'arc, est bien visible dans l'image sténopéique du Soleil.

LE PHÉNOMÈNE - GÉNÉRALITÉS

Considérons une surface opaque sur laquelle a été pratiqué un trou à travers lequel se forme l'image sténopéique du disque solaire sur un écran parallèle et à une certaine distance d'elle.

Pour simplifier supposons le trou de forme circulaire, le plan de l'écran normal à la direction du rayon provenant du centre du disque du Soleil et le rapport de la distance écran et diamètre du trou, assez grand.

Nous supposons en outre que le disque solaire présente soit, une grosse tache soit, qu'un corps s'interpose entre lui et la terre (comme par exemple la planète Vénus).

Soient:

- B_0 : luminance de la surface du disque solaire
- B_m : luminance de la surface de la tache solaire ou du disque de Vénus projeté sur le Soleil.

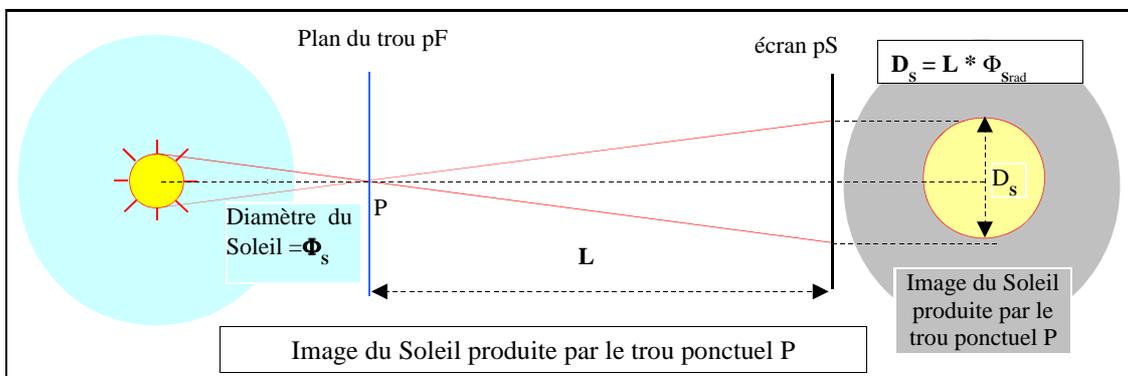
Pour les taches on a: $B_m/B_0 \cong 0.2 - 0.4$, pour Vénus $B_m/B_0 \cong 0.0$

- J_0 : éclairement dû au Soleil sur le plan, perpendiculaire aux rayons, sur lequel se forme l'image (écran), si l'écran même était complètement éclairé (c'est-à-dire en absence de la surface opaque percée ⁴).
- J_{m0} : éclairement dû seulement à la tache solaire sur le plan perpendiculaire aux rayons (s'il y n'avait pas l'éclairement du Soleil)
- Φ_s : diamètre angulaire du disque solaire (en radians) - Valeur moyenne $32' = 1/107.5$ rad
- Φ_m : diamètre angulaire d'une tache solaire, supposée circulaire (en radians) - De $1'$ à $3-4'$
- L : distance entre le trou et l'écran en cm
- D_F : diamètre du trou en cm
- D_S : "diamètre" linéaire ou théorique de l'image du Soleil produit par un trou ponctuel $= L \cdot \Phi_s$
- D_m : "diamètre" linéaire de l'image de la tache produite par un trou ponctuel $= L \cdot \Phi_m$

Si nous connaissons le diamètre angulaire de la tache en minutes d'arc, on a :

$$D_m \cong \frac{\Phi'_m \cdot L}{3440}$$

Nous supposons que le rapport L/D_F est $> 200-300$ environ.



Si le Soleil avait la luminance d'une tache solaire (c'est-à-dire si tout le disque était recouvert de taches) l'éclairement du plan serait $J_{m0} = \frac{B_m}{B_0} \cdot J_0$.

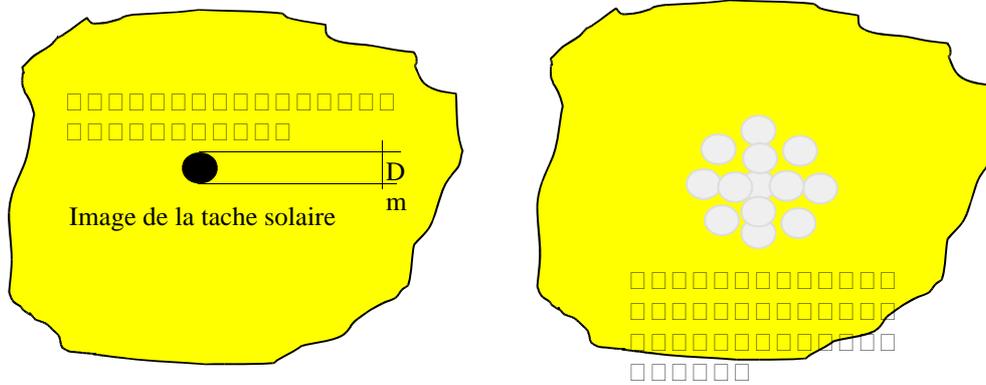
Avec Φ_m le diamètre angulaire de la tache (supposée circulaire par souci de simplicité) et Φ_s le diamètre du Soleil, l'éclairement sur l'écran dû seulement à la tache (c'est-à-dire si la source de lumière était la seule tache solaire, sans lumière du Soleil) est donné par :

$$J_m = J_0 \cdot \frac{B_m}{B_0} \cdot \left(\frac{\Phi_m}{\Phi_s} \right)^2 = J_{m0} \cdot \left(\frac{\Phi_m}{\Phi_s} \right)^2$$

Finalement, en rappelant que les valeurs des diamètres "linéaires" ou théoriques du Soleil et de la tache ont donné $D_s = L \cdot \Phi_s$ et $D_m = L \cdot \Phi_m$, nous avons :

$$J_m = J_{m0} \cdot \left(\frac{D_m}{D_s} \right)^2$$

⁴ La valeur J_0 est due à la lumière qui vient directement du Soleil et dépend de sa hauteur sur l'horizon, d'un éventuel voile dans le ciel, de la présence de poussière et vapeur dans l'atmosphère et finalement de l'angle entre la normale au plan et la direction des rayons solaires. Les valeurs typiques vont de 30000 à 80000-100000 lux. La valeur de 100000 correspond à un ciel serein avec pour le Soleil une hauteur d'environ $50-60^\circ$.



En voulant examiner l'image de la tache produite par un trou de diamètre fini on peut considérer la "surface" d'un tel trou comme constituée d'un nombre infini de trous de taille infinitésimale accolés, chacun produisant une image de type "ponctuel" ayant les caractéristiques décrites précédemment.

Ces images se superposent et le disque sombre de l'image de la tache produite par un trou ponctuel est "recouvert" par une partie du disque du Soleil qui entoure la tache sombre due à un trou voisin.

Nous pouvons avoir différents cas.

CAS AVEC $D_S < D_F$

Si le diamètre du Soleil est plus petit que celui du trou, c'est-à-dire si $D_S \leq D_F$, le trou produit une image du Soleil dont chaque point de la zone centrale, permet de voir le disque solaire entier, entourée par une bande de "pénombre" des points desquelles on voit une partie du Soleil et une partie du ciel environnant.

Ainsi la zone centrale de l'image produite a un diamètre $= (D_F - D_S)$, dans laquelle l'éclairement est constant, entourée par une bande de "pénombre" de largeur D_F .

L'éclairement de la zone centrale vaut $J_{S_Im} = J_0$.

La présence d'éventuelles taches contribue seulement à diminuer l'éclairement moyen.

Si on a une tache avec un diamètre plus petit que celui du diamètre du trou, c'est-à-dire si $D_m \leq D_F$, alors le trou produit une image ayant une zone centrale de chaque point de laquelle se voit la tache entière.

Dans cette zone, avec un diamètre $= (D_F - D_m)$, l'éclairement produit seulement par la tache (si elle est la seule source lumineuse) est constant et vaut $J_{im} = J_m$.

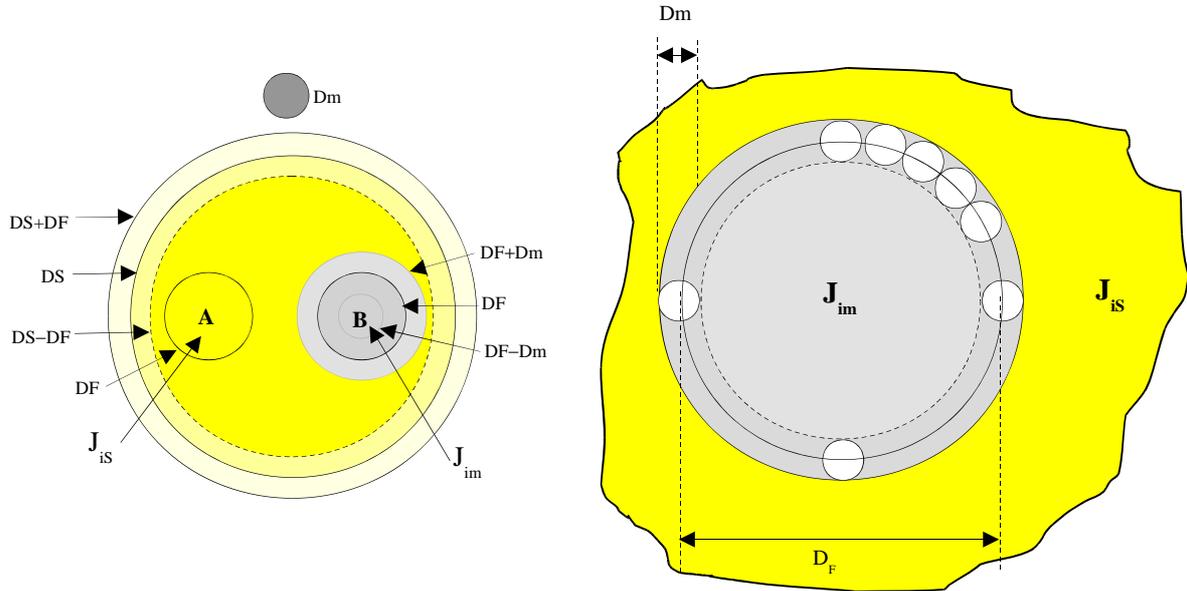
CAS AVEC $D_m < D_F < D_S$

Si le diamètre du trou est plus petit que celui de l'image du Soleil, c'est-à-dire si $D_F \leq D_S$, le trou produit une image du Soleil qui a une zone centrale de chaque point de laquelle se voit **seulement une partie du disque solaire**, entourée par une bande de "pénombre", de laquelle se voit par contre une partie du disque du Soleil et une partie du ciel environnant.

Pour ce motif, l'image produite a une zone centrale de diamètre $= (D_S - D_F)$, dans laquelle l'éclairement est constant, entourée par une bande de "pénombre" de largeur D_F .

Si à travers le trou **se voit une partie de cette zone centrale où il n'y a pas de taches solaires**, (point A de la figure), alors son éclairement vaut $J_{S_Im} = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_S} \right)^2$.

Si par contre à travers le trou se voit une partie de la zone centrale dans laquelle est présente une tache solaire (point B en figure), on a : $J_{S_im} = J_0 \cdot \frac{(D_F^2 - D_m^2)}{D_S^2}$ D_m étant le diamètre "linéaire" de la tache.



En présence d'une tache sur le Soleil dans la zone de l'image centrée sur le centre de la tache de diamètre $= (D_F - D_m)$ (point B en figure), on a un éclairement total donné par la somme de la lumière provenant de la "source" tache et de celle provenant de la "source" disque solaire.

5. Le Soleil produit l'éclairement $= J_0 \cdot \frac{(D_F^2 - D_m^2)}{D_S^2}$
6. La tache produit l'éclairement $= J_{m0} \cdot \left(\frac{D_m}{D_S}\right)^2$ et ensuite

$$J_{im} = J_0 \cdot \frac{(D_F^2 - D_m^2)}{D_S^2} + J_{m0} \cdot \left(\frac{D_m}{D_S}\right)^2 \quad \text{et finalement}$$

$$J_{im} = \frac{J_0 \cdot (D_F^2 - D_m^2) + J_{m0} \cdot D_m^2}{D_S^2} = \frac{J_0 \cdot D_F^2 - (J_0 - J_{m0}) \cdot D_m^2}{D_S^2}$$

(1)

Dans la zone de l'image d'où ne se voit pas la tache (point A en figure) l'éclairement est par contre: $J_{is} = J_0 \cdot \frac{D_F^2}{D_S^2}$

Nous pouvons considérer J_{is} comme l'éclairement des zones lointaines de la tache. En effet la visibilité de la tache dans l'image du Soleil dépend de la différence entre les valeurs de son éclairement et de celui des zones environnantes du disque solaire, il est utile de considérer le paramètre R_{ms} , défini comme le rapport entre ces éclairements:

$$R_{ms} = \frac{J_{im}}{J_{is}} = \frac{J_0 \cdot (D_F^2 - D_m^2) + J_{m0} \cdot D_m^2}{J_0 \cdot D_F^2}$$

Ou le paramètre F_K donné par

$$F_K = R_{mS} \cdot J_0 = \frac{J_0 \cdot (D_F^2 - D_m^2) + J_{m0} \cdot D_m^2}{D_F^2} \quad (2)$$

Les autres paramètres sont le **contraste de Weber** C_W , le contraste simple C_S ⁵ et la quantité V respectivement donné par :

$$C_W = \frac{J_{iS} - J_{im}}{J_{im}} = \frac{D_m^2 \cdot (J_0 - J_{m0})}{D_F^2 \cdot J_0 - D_m^2 \cdot (J_0 - J_{m0})}$$

$$C_S = \frac{J_{iS}}{J_{im}} = \frac{D_F^2 \cdot J_0}{D_F^2 \cdot J_0 - D_m^2 \cdot (J_0 - J_{m0})}$$

$$V = \frac{J_{iS} - J_{im}}{J_{iS}} = \frac{D_m^2 \cdot (J_0 - J_{m0})}{D_F^2 \cdot J_0}$$

A noter que le contraste simple C_S est égal à l'inverse de R_{mS} : $C_S = \frac{1}{R_{mS}}$.

A remarquer aussi que R_{mS} et V sont toujours plus petits ou égaux à 1 pendant que C_W et C_S sont toujours plus grands ou égaux à 1 et que la vision de la tache est également meilleure si R_{mS} , C_W et V sont grands.



Dans le cas où $J_{m0} = 0$, on a :

$$J_{im} = \frac{J_0 \cdot (D_F^2 - D_m^2)}{D_S^2}$$

$$J_{iS} = J_0 \cdot \frac{D_F^2}{D_S^2}$$

$$R_{mS} = \frac{J_{im}}{J_{iS}} = \frac{D_F^2 - D_m^2}{D_F^2}$$

$$F_K = R_{mS} \cdot J_0 = \frac{J_0 \cdot (D_F^2 - D_m^2)}{D_F^2}$$

$$C_W = \frac{J_{iS} - J_{im}}{J_{im}} = \frac{D_m^2}{D_F^2 - D_m^2}$$

$$V = \frac{J_{iS} - J_{im}}{J_{iS}} = \frac{D_m^2}{D_F^2}$$



Si $J_{m0} \rightarrow J_0$, c'est-à-dire si la tache a la même luminosité du Soleil - c'est-à-dire très faible - alors :

$$R_{mS} = 1 ; \quad F_K = J_0 ; \quad C_W = 0 ; \quad C_S = \frac{J_{iS}}{J_{im}} = 1 ; \quad V = 0$$

Si nous avons par contre $J_0 \rightarrow J_{m0}$, la totalité du disque solaire serait couverte de taches avec

$$R_{mS} = 1 ; \quad F_K = J_{m0} ; \quad C_W = 0 ; \quad C_S = \frac{J_{iS}}{J_{im}} = 1 ; \quad V = 0$$

Si nous avons une tache solaire très petite $D_m \rightarrow 0$, alors :

$$R_{mS} = 1 ; \quad F_K = J_0 ; \quad C_W = 0 \text{ et } C_S = \frac{J_{iS}}{J_{im}} = 1 ; \quad V = 0$$

⁵ Le contraste (photométrie/ physiologie) est le rapport entre la *luminance* d'une région plus claire et celle d'une région adjacente plus sombre. Mathématiquement c'est la différence entre les deux luminances divisée par la luminance inférieure. Cette définition aussi appelée *Contraste de Weber*, est plus communément utilisée dans l'éclairage : $C = (L_{max} - L_{min}) / L_{min}$.

CAS AVEC $D_m < D_F < D_S$ - Trou avec dimension théoriquement moindre.

L'image "plus nette" qu'on peut obtenir avec un trou sténopéique est quand le diamètre du trou qui vaut

$$D_{FO} \cong \frac{\sqrt{L}}{86} \text{ avec } L \text{ e } D_{F0} \text{ en cm.}$$

Dans ce cas l'éclairement de l'image de la tache vaut environ:

$$J_{im} \cong J_0 \cdot \left(\frac{40}{32}\right)^2 \cdot \frac{1}{L} \cdot \left[1 - L \cdot \left(\frac{\Phi'_m}{40}\right)^2 \cdot \frac{J_0 - J_{m0}}{J_0}\right]$$

$$J_S = J_0 \cdot \frac{D_F^2}{D_S^2} \cong \left(\frac{40}{32}\right)^2 \cdot \frac{J_0}{L} \cong 1.56 \cdot \frac{J_0}{L} \text{ con } L \text{ in cm}$$

et donc

$$R_{mS} \cong 1 - L \cdot \left(\frac{\Phi'_m}{40}\right)^2 \cdot \frac{J_0 - J_{m0}}{J_0} \quad V \cong L \cdot \left(\frac{\Phi'_m}{40}\right)^2 \cdot \frac{J_0 - J_{m0}}{J_0}$$

Φ'_m : étant le diamètre de la "tache" en minutes d'arc.

C'est le cas dans lequel le contraste entre l'image de la tache et la luminosité due au disque du Soleil, est maximum. Il faut rappeler cependant, que dans ce cas, à cause de la dimension réduite du trou, l'éclairement de l'image du Soleil est très faible.

Pour qu'il y ait $D_F \geq D_m$, il faut que le diamètre de la tache soit $\Phi'_m \leq \frac{40}{\sqrt{L}}$ (avec L en cm). Dans le cas du disque de Vénus (=1'), il faut une valeur de L < 1600 cm.

Toujours dans le cas d'une tache du diamètre de 1', il est en outre nécessaire d'avoir un trou de diamètre : $D_F \geq \frac{L}{3440}$

Par exemple avec $J_0 = 100000$ lux et $L = 30$ m, le diamètre théorique le plus petit serait $D_{F0} = 6.5$ mm, mais le diamètre de Vénus = 0.87 cm : le trou serait trop petit.

CAS AVEC $D_m = D_F < D_S$

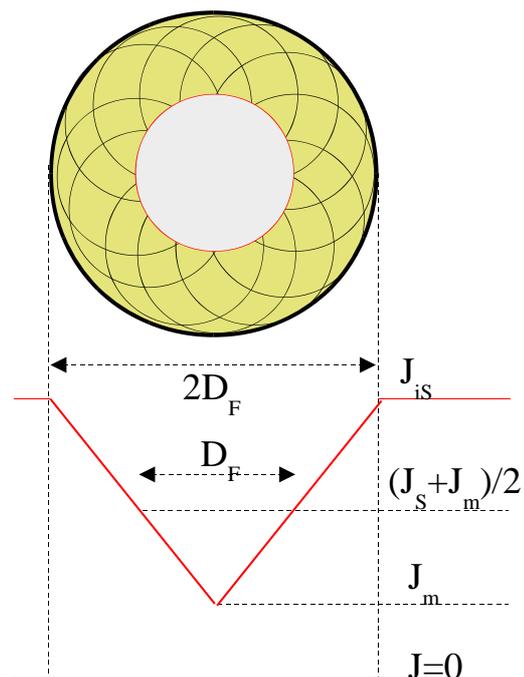
Si $D_m \rightarrow D_F$, c'est-à-dire si on diminuait le trou jusqu'à un diamètre égal à celui de la tache sur le Soleil, la zone centrale de "image" de la tache il se réduirait à un point et nous aurions :

$$R_{mS} = \frac{J_{m0}}{J_0}; \quad F_K = J_{m0};$$

$$C_W = \frac{J_0 - J_{m0}}{J_{m0}}; \quad C_S = \frac{J_0}{J_{m0}};$$

$$V = \frac{J_0 - J_{m0}}{J_0}$$

Dans ce cas l'éclairement de "l'image" de la tache, qui a pour diamètre $2 \cdot D_F$, passe de la valeur J_{iS} à la valeur J_m . En supposant linéaire la variation de l'éclairement dans la zone centrale de diamètre D_F , on a :



$$R_{mS} = \frac{J_0 + 2 \cdot J_{m0}}{3 \cdot J_0} \quad F_K = \frac{J_0 + 2 \cdot J_{m0}}{3}$$

$$C_W = \frac{2 \cdot (J_0 - J_{m0})}{J_0 + 2 \cdot J_{m0}} \quad V = \frac{2 \cdot (J_0 - J_{m0})}{J_0}$$

CAS AVEC $D_F < D_m < D_S$

Si le diamètre du trou est plus petit que celui de la tache, c'est-à-dire si $D_F \leq D_m$, le trou produit une image de la tache dont la zone centrale ne permet de voir, en chaque point, qu'une **partie de la tache** même.

Cette zone centrale est entourée d'une bande de "pénombre", depuis laquelle, par contre, il se voit une partie de la tache et une partie du disque solaire.

Ainsi la zone centrale de l'image, de diamètre $= (D_m - D_F)$, il a un constant et elle est entourée d'une bande de "pénombre" de largeur D_F .

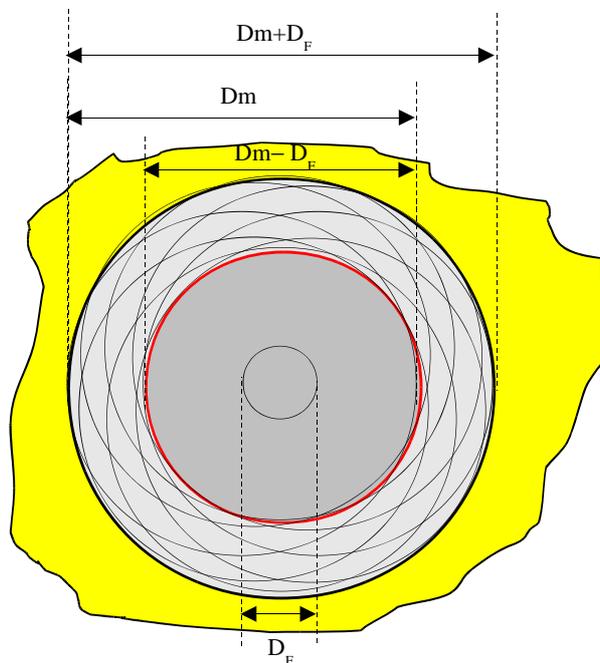
L'éclairement central vaut :

$$J_{im} = J_m \cdot \left(\frac{D_F}{D_m}\right)^2 = J_{m0} \cdot \left(\frac{D_m}{D_S}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_F}{D_m}\right)^2 = J_{m0} \cdot \left(\frac{D_F}{D_S}\right)^2$$

Ce d'une zone plus extérieure:

$$J_{S_im} = J_0 \cdot \left(\frac{D_F}{D_S}\right)^2$$

et enfin: $R_{mS} = \frac{J_{m0}}{J_0}$; $F_K = J_{m0}$; $C_W = \frac{J_0 - J_{m0}}{J_{m0}}$; $V = \frac{J_0 - J_{m0}}{J_0}$



VISIBILITÉ

Quand nous observons l'image d'une tache sur le disque du Soleil, le stimulus qui frappe notre œil est proportionnel à l'éclairement, tandis que la sensation qu'il provoque (c'est-à-dire ce que nous "voyons") dépend du comportement du système œil-cerveau.

Selon la loi de Weber-Fechner le degré de réponse d'un organe de sens, c'est-à-dire la sensation produite, est proportionnel au logarithme de l'intensité du stimulus qui a agi sur l'organe même.

Dans notre cas nous aurons alors $J_p = \log(J_v)$ où j'ai indiqué par J_p l'éclairement *perçu* et par J_v l'éclairement *réel* (vrai).

Si nous dérivons l'expression, on a $dJ_p = \frac{dJ_v}{J_v}$, qui indique que, pour pouvoir percevoir une variation donnée de J_p , il faut avoir une valeur donnée du rapport dJ_v/J_v .

Dans le cas de l'image d'une tache à l'intérieur de celle du Soleil, nous pouvons alors dire que la plus petite sensation perceptible n'est pas provoquée par une différence entre les éclairements de "l'image" plus sombre de la tache et de la zone environnante, mais qu'elle est produite par une valeur donnée du rapport entre cette différence et l'illumination totale.

Donc, pour pouvoir "voir" un certain contraste entre les deux zones, il faut que le rapport que j'ai indiqué par V soit supérieur à une valeur donnée.

Il faut en chaque cas tenir compte du "diffus", J_d , dû à la lumière indirecte qui frappe l'image sur l'écran.⁶ car cet éclairement s'ajoute à celui de l'image de la tache et à celui de l'image du Soleil. Il en résulte que :

$$V_d = \frac{J_{is} - J_{im}}{J_{is} + J_d}$$

Les théories de la vision indiquent environ 1.6% (1/60) comme valeur inférieure du rapport ci-dessus pour pouvoir "percevoir" une différence, en conditions de "laboratoire." À mon avis cette valeur est excessivement optimiste et doit être au moins doublée.



QUELQUES VALEURS

Luminance du Soleil B_0

Éclairement produit par le Soleil J_0

Diamètre du Soleil = 32'

$$B_0 = 160000 \text{ stilb} = 1.6 \cdot 10^9 \text{ cd} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{mt}^{-2}$$

$$\Phi_{\text{Soleil-sr}} = \frac{\pi}{4} \cdot (\Phi_{\text{Soleil-rad}})^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (107.5)^{-2} = 1/14713.9 \text{ sr}$$

$$J_S = B_0 \cdot \Phi_{\text{Soleil-sr}} = 108740 \text{ lux}$$

Luminance de la Lune B_{Lune}

Éclairement produit par la Lune Pleine J_{LunePl}

Diamètre de la Lune = 31'

$$B_{\text{Lune}} = 3450 \text{ cd} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{mt}^{-2} \quad J_{\text{LunePl}} = 0.25 \text{ lux}$$



⁶ L'éclairage indirect J_d vient principalement de la lumière de la partie libre du ciel visible depuis la zone du plan considéré, de par la lumière réfléchiée des nuages, des murs et des éventuels bâtiments environnants, etc.

Sa valeur peut beaucoup changer, car elle dépend soit du voile du ciel, soit de la situation atmosphérique (nuages), soit de la présence de végétation qui empêche une vision directe d'une partie du ciel, soit, finalement, des maisons voisines et des caractéristiques de réflexion et de couleur de leurs surfaces, etc.

Dans les églises, les valeurs de J_d varient de 1/10 à 1/100 des valeurs de J_0 ; dans un local complètement sombre on a évidemment $J_d = 0$

SOURCE DE DIMENSIONS INFINITÉSIMALES

Si nous **supposons la source** (Soleil) **de dimensions infinitésimales**, l'image du disque solaire a les mêmes dimensions et la même forme que le trou dans un plan perpendiculaire aux rayons et son éclairement est égal à celui de la même surface en plein soleil, c'est-à-dire $= J_0$.

L'image est très nette et ne présente aucune bande de pénombre.

Si le Soleil était complètement recouvert par une grande tache, l'effet équivaldrait à assombrir le trou, c'est-à-dire à noircir un verre placé sur lui sans annuler sa transparence. L'éclairement dans ce cas serait $= J_{m0}$.

Enfin, dans le cas où il y a seulement une petite tache sur le Soleil, on a le même effet qu'on aurait en créant une tache de diamètre D_m , sur un verre transparent placé sur le trou. L'image de cette tache serait même nette, parfaitement vive et sans pénombre. Dans ces hypothèses, l'éclairement moyen de l'image de diamètre D_F est:

$$F_K = \frac{J_0 \cdot (D_F^2 - D_m^2) + J_{m0} \cdot D_m^2}{D_F^2} \quad (2)$$

La formule est valide pour $D_m \leq D_F$.

Dans les hypothèses considérées, si on a $D_m \geq D_F$ toute l'image est couverte par la tache et il s'ensuit: $F_K = J_{m0}$



Exemple 1 - Tache solaire - 14 Janvier 2005 (photographie initiale)

- Localité: Formello (Rome) - Latitude = $42^\circ 5'$
- Déclinaison du Soleil = -21.06° ; Diamètre du Soleil = $32.5'$
- Hauteur du trou = 669 cm
- Distance trou-image = 1319.2 cm
- Diamètre du trou $D_F = 0.8$ cm - Diamètre moindre théorique = 0.6 cm
- Diamètre E-O de l'image du Soleil (valeur théorique) = 12.5 cm
- $\Phi_m = 2' = 1/1720$ rad (valeur supposée)
- $J_m = 0.2 J_0$
- Diamètre théorique de l'image de la tache $D_m = L * \Phi_m = 0.77$ cm

- Nous sommes dans le cas pour lequel $D_m = D_F$
- L' "image" de la tache est formée par une zone centrale, avec diamètre négligeable, entourée par une bande de "pénombre" de largeur 0.8cm. En complément le "diamètre" de l'image de la tache est 1.6 cm environ (1/8 du diamètre solaire)
- Les éclairements sont : $J_s = 410$ lux; $J_m = 82$ lux
- Le rapport (éclairement de la tache/ éclairement du Soleil) vaut $R = 0.20$
- $V = 0.80$: le contraste est très bon tant pour la petite dimension du trou tant pour la grande dimension de la tache.



Exemple 2 - Passage de Vénus - 8 Juin 2004

- Localité: Florence , église de S. Maria del Fiore - Latitude = 44° ; Decl. du Soleil = 23°
- Hauteur du Soleil = 69°
- Hauteur du trou = 90.1 m
- Distance trou-image $L = 9650$ cm
- Diamètre du trou $D_F = 5$ cm - Diamètre moindre théorique = 1.1 cm
- **Diamètre E-O de l'image du Soleil (valeur théorique) = 90 cm**
- $\Phi_m = 1' = 1/3440$ rad ; $J_m = 0$
- Diamètre théorique de l'image de Vénus $D_m = L * \Phi_m = 2.8$ cm



Le Transit de Vénus, Église de S. Maria del Fiore – Florence, Photographie G.Ferrari

- Nous sommes dans le cas pour lequel $D_m < D_F$, même si leur rapport est seulement égal à 1.8
- "L'image" de Vénus a la forme du trou: elle est formée par une zone centrale de dimensions $(D_F - D_m) = 2.2$ cm , entouré par une bande de "pénombre" de largeur égal à 2.8 cm
- La dimension totale = 7.8 cm , équivalant à un diamètre de 2.8' (environ)
- Les éclairements sont : $J_S = 310$ lux; $J_m = 212$ lux
- Le rapport (éclairage de l'image de Venus/ éclairement du Soleil) vaut $R = 0.86$
- $V = 0.32$: le contraste est bon.

Gianni Ferrari
gfmerid@gmail.com





Utilisation du sténopé

Roland Trotignon

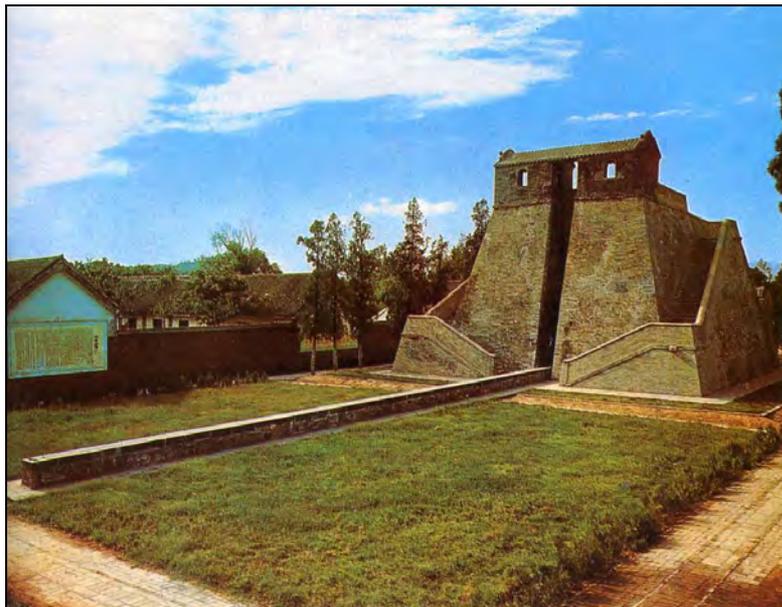
Contexte de l'utilisation du sténopé, instrument remarquable de la dynastie chinoise des Yuan (1271-1368), pour les gnomons de grande taille.

Le contexte historique

En l'an 1272 de notre ère, la brillante dynastie chinoise des Song du Sud s'effondre sous les coups de boutoir des envahisseurs mongols. Ces derniers comprennent très vite que le seul moyen d'asseoir leur domination sur cet immense empire est de s'inscrire dans les traditions chinoises et en particulier d'établir un calendrier plus exact que celui qui était alors en vigueur. Dès 1276, le projet de réforme du calendrier est adopté sous le nom de « Calendrier qui garantit l'exactitude des saisons » (*Shou shi li* – 授时历). Il est soumis au Trône Impérial en 1280 et adopté en 1281. Ce nouveau calendrier n'est finalisé qu'en 1280, après la construction de nouveaux instruments et la prise en compte des mesures qu'ils permettent de faire. De nombreux astronomes participent au projet ; la figure la plus marquante est celle de Guo Shoujing (1231-1316).

L'approche de Guo Shoujing

Guo Shoujing comprend que seule une refonte complète de l'instrumentation et des méthodes de calcul permettra de réaliser un calendrier qui puisse surpasser les calendriers précédents. Rappelons que le calendrier chinois est un ensemble complexe prenant en compte le mouvement moyen du Soleil et le mouvement vrai de la Lune. Les mois lunaires de longueur variable doivent être calés par rapport à un mouvement solaire moyen calculé à partir du solstice d'hiver. La recherche de l'instant précis du solstice d'hiver est donc l'élément crucial de l'établissement du calendrier.



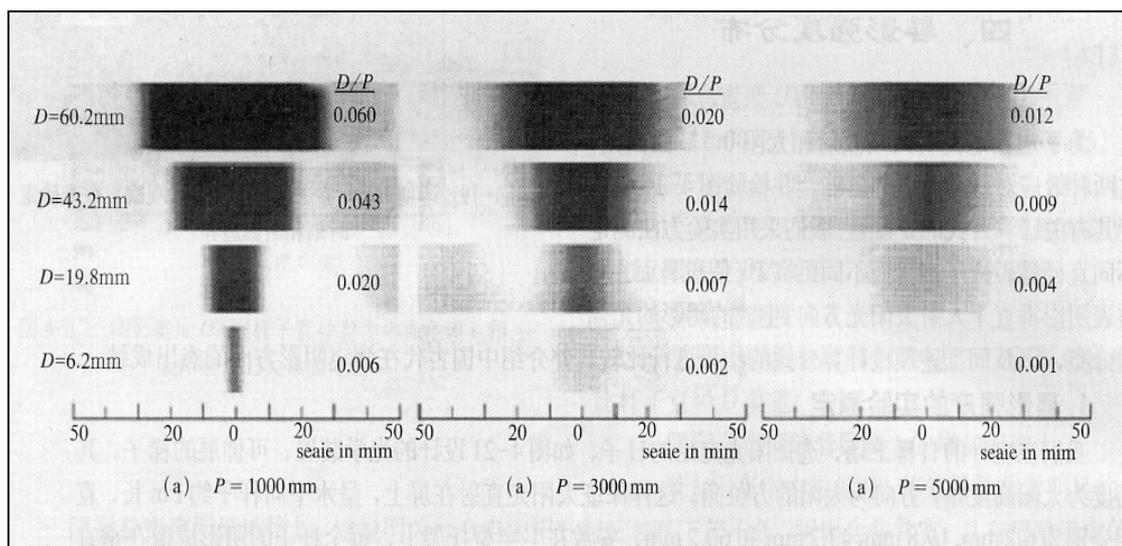
Le grand gnomon de Gaocheng (province du Henan)

La recherche de la plus grande précision possible pour cette détermination a conduit Guo Shoujing à concevoir des gnomons de très grande taille. Alors que le gnomon traditionnel avait une longueur de 8 pieds, Guo Shoujing entreprit la construction de cinq gnomons de 40 pieds. Deux furent effectivement construits. Le gnomon de Gaocheng (aussi nommé gnomon de Dengfeng, du nom d'une autre ville proche) est le seul qui subsiste, d'ailleurs largement restauré au cours du 20^e siècle. *L'Histoire des Yuan* donne une description assez précise de ce gnomon et des appareils auxiliaires nécessaires à sa mise en œuvre.

Les difficultés de la mise en œuvre d'un grand gnomon

Un procédé couramment utilisé à l'époque de Guo Shoujing consistait à repérer sur la table de mesure l'ombre d'une petite barre horizontale placée au sommet du gnomon. Si le procédé était satisfaisant pour des gnomons de 8 pieds, la distance 5 fois plus grande interdisait l'obtention d'une ombre nette.

Wang Dechang (observatoire Zijinshan) et Zhang Jianwei (observatoire de Shanghai) ont étudié l'ombre de barres de différents diamètres placées à des distances variables. Voici les résultats obtenus (8)



D est le diamètre de la barre horizontale, P la distance entre la barre et son ombre

L'invention de Guo Shoujing, l'aligneur d'ombre (*yingfu* – 景符)

Afin de surmonter cette difficulté inhérente aux gnomons de grande taille, Guo Shoujing a mis au point un dispositif ingénieux utilisant le principe du sténopé. Si aucun exemplaire de cet instrument ne subsiste, la description qu'en donne *L'histoire des Yuan* a permis de le reconstituer.

« *Le yingfu comprend une plaque de bronze, large de 2 pouces et longue de 6 pouces, percée en son centre d'un trou de la dimension d'un trou d'épingle ou d'un grain de moutarde. Elle est fixée sur un socle carré. Une des extrémités est munie de charnière qui lui*

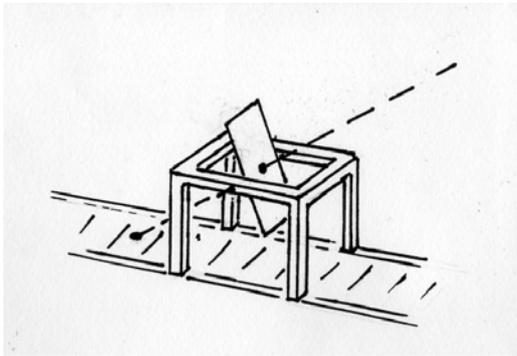
permet d'être ouverte ou fermée. L'extrémité nord est maintenue plus haut que l'extrémité sud. L'appareil peut être déplacé de sorte que la lumière du soleil fasse apparaître une image du soleil de la taille d'un grain de riz, image au milieu de laquelle apparaît l'image floue de la tige horizontale. L'ancienne méthode consistait à observer l'ombre du gnomon ; on observait en fait l'ombre causée par le limbe supérieur du soleil. La méthode actuelle qui repère la tige horizontale permet de repérer exactement l'ombre centrale ce qui élimine tout risque d'erreur. Ainsi, une mesure de longueur effectuée aux environs du solstice d'été le 19^e jour du 4^e mois de la 16^e année de l'ère Zhiyuan* donnait une ombre de 12,3695 pieds, une autre effectuée aux environs du solstice d'hiver le 24^e jour du 10^e mois de la 16^e année de l'ère Zhiyuan** donne 76,74 pieds. » (Histoire des Yuan – Traité d'astronomie-1^{re} partie)

* 30 mai 1279 - Nathan Sivin (7)

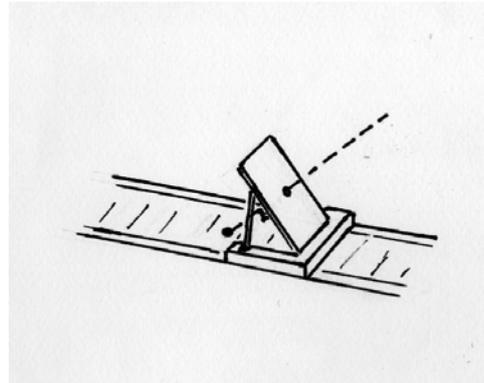
**29 novembre 1279 - Nathan Sivin (7)

La précision indiquée dans *l'Histoire des Yuan* semble quelque peu illusoire et probablement le résultat d'un calcul poussé jusqu'à la 4^{ème} décimale (1).

Deux modèles ont été proposés :



Modèle proposé par Needham (1)



Modèle proposé par Pan Nai (4)

Réalisation d'un modèle de yingfu

L'auteur de cet article a construit un modèle de yingfu.



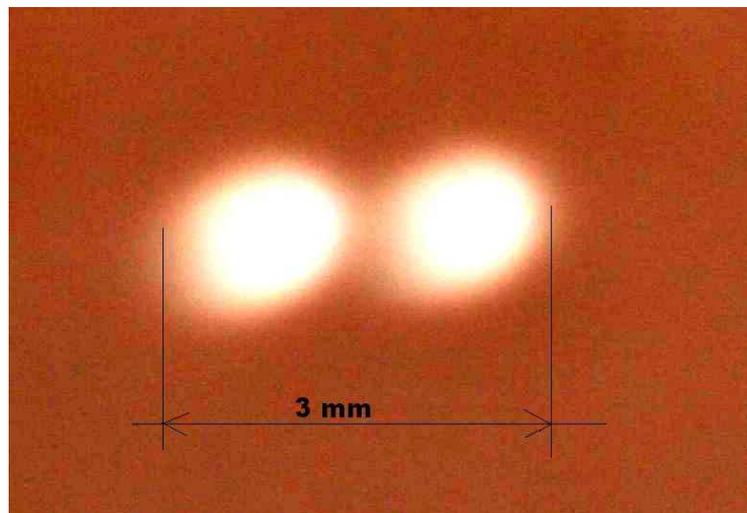
La plaque métallique de 6cm par 13,5cm est percée d'un trou de 1mm. Le soleil donne une petite image nette sur le sol horizontal au milieu de l'ombre de la plaque. La position de la tache dépend de l'inclinaison de la plaque et a son extremum lorsque la plaque est perpendiculaire aux rayons du soleil.

On voit clairement apparaître au milieu de la tache-image du soleil l'image de branches d'arbres éloignées.

Nous avons installé une barre horizontale de diamètre 8mm à environ 1,8m de l'orifice du sténopé, reproduisant ainsi à l'échelle de 1/10^e le phénomène tel qu'il devait se produire dans le gnomon de Gaocheng. Nous avons photographié l'image donnée par le sténopé grâce au dispositif ci-contre. La pénombre provoquée par la barre horizontale sur la plaque métallique du *yingfu* permet de placer immédiatement ce dernier près de sa position correcte.



On peut alors ajuster son inclinaison de façon à rendre la plaque perpendiculaire aux rayons du soleil. Un déplacement doux de l'appareil le long de la table de mesure provoque le déplacement de l'image de la barre horizontale. L'image du soleil, rendue oblongue par l'inclinaison des rayons par rapport à la table de lecture est traversée par l'image de la barre horizontale. En faisant glisser le *yingfu*, l'œil de



l'observateur évalue très bien le moment où l'ombre de la barre passe précisément par le centre de l'image.

Des estimations de la précision dans le positionnement du *yingfu* réalisées avec les dimensions du gnomon de Guo Shoujing ont été réalisées par Frans et Margaret Bruin (1). L'expérience montre que la positionnement se fait avec une précision de $\pm 2\text{mm}$ ce qui permet d'atteindre la précision d'une minute d'arc pour la hauteur du soleil.

La barre horizontale du grand gnomon a été rajoutée récemment à l'initiative d'un expert local (4). Sur les photographies de Robert Grasset (ci-après), on voit bien la barre horizontale du petit gnomon et celle du grand gnomon à Gaocheng.



L'utilisation de l'observatoire de Gaocheng pour la mesure des hauteurs lunaires et stellaires

Parmi les 12 appareils inventés ou perfectionnés par Guo Shoujing et cités dans *l'Histoire des Yuan*, il convient de citer ici un autre équipement destiné à mesurer les hauteurs des astres ne permettant pas l'utilisation du sténopé à cause de leur faible luminosité. Un observateur devait se glisser sous l'appareil afin de repérer le moment où la barre horizontale du gnomon masquait l'astre observé. L'appareil était muni de plaques horizontales mobiles qui pouvaient être déplacées de façon à réaliser l'alignement astre-barre horizontale du gnomon-plaque mobile.

LES UNITES DE LONGUEUR DANS LA CHINE ANCIENNE

D'après *A Concise History of Ancient Chinese Measures and Weights* – Hefei, 2005

Depuis la plus haute antiquité, la Chine a mis en place un système décimal de mesure des longueurs. Le gouvernement impérial s'est toujours efforcé d'assurer l'uniformisation des mesures de longueur sur la totalité du territoire. La longueur des unités de base a cependant varié selon les dynasties. La longueur du pied a varié de 23 à 33cm.

La toise (*zhang* 丈) = 10 pieds (*chi* 尺) = 100 pouces (*cun* 寸) = 1000 fen (分) = 10000 li (厘) = 100000 hao (毫)

QUELQUES ELEMENTS SUR LA VIE DE GUO SHOUJING (郭守敬)

Guo Shoujing (1231-1314) a vécu durant la dynastie mongole des Yuan (1271 – 1368). Inventeur, mathématicien et astronome, il a amélioré la précision des instruments astronomiques. On lui doit en particulier une sphère armillaire mue par l'eau. La réalisation du calendrier Shoushili (授时历) l'a amené à développer des outils mathématiques élaborés afin de procéder aux interpolations nécessaires pour atteindre la précision demandée. En tant qu'ingénieur, il est connu pour avoir conçu le réservoir du Kunminghu dans les environs de Pékin, là où devait être construit plus tard le Palais d'Été.

Sources :

En plus de la source primaire *l'Histoire des yuan*, rééditée en Chine sous différentes formes et avec une traduction en chinois moderne (Shanghai, 2004), le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages suivants :

- (1) **Bruin Frans et Margaret** – The limit of accuracy of aperture-gnomons (in ΠΙΣΙΜΑΤΑ, Naturwissenschaftsgeschichtliche Studien, Festschrift für Willy Hartner, Wiesbaden 1977) – *en anglais*
- (2) **Chen Meidong** – 中国科学技术史-天文学卷 (Histoire des sciences et techniques chinoises – Astronomie) pp527 and suiv. – *en chinois*
- (3) **Cui Shizu** – Verifica della misurazione delle ombre compiuta secundo metodi usati in antichità, in Dall'Europa alla Cina: contributi per una storia dell'Astronomia, Napoli 1990 – *en italien*
- (4) **Krupp E.C.** Shadows cast for the Son of Heaven, Griffith Observer, august 1982, Vol.46, N°8 – *en anglais*
- (5) **Needham et autres.** The Hall of Heavenly Records, pp 70 and suiv. Cambridge University Press – *en anglais*
- (6) **Pan Nai** – 中国古天文仪器式样 (Histoire des anciens instruments astronomiques chinois - pp.54 et suiv. - *en chinois*
- (7) **Sivin Nathan** – Granting the seasons – Springer – *Ouvrage fondamental qui donne la traduction en anglais des chapitres astronomiques de « L'Histoire des Yuan »*
- (8) **Wang Dechang, Zhang Jianwei** – 时间雕塑-日晷 (Cadrans solaires-Sculptures du temps) – *en chinois*

Et enfin signalons aux voyageurs virtuels de *Google Earth* qu'ils pourront admirer le grand gnomon de Gaocheng aux coordonnées 34°24'08''N, 113°08'26''E.





Quel œilleton ?

Gérard Baillet

Le premier chapitre présente les éléments permettant de définir concrètement quel rayon fait-il donner à un œilleton. Par souci d'exhaustivité, il est repris dans les chapitres suivants les recherches plus théoriques de l'auteur, telles que parues dans Cadran Info n°24.

1- QUEL RAYON POUR UN ŒILLETON ?

Détail des points abordés :

Quel rayon pour un œilleton ?

- 1 Présentation
- 2 Principe de la présentation graphique
- 3 Projections des grandeurs
 - 3.1 Projection orthographique de l'œilleton
 - 3.2 Image du soleil
 - 3.3 La diffraction
- 4 Association des trois grandeurs
- 5 Utilisation du graphique
 - 5.1 Exemple
 - 5.2 Exemple
- 6 Analyse des des différente zones
 - 6.1 Zone tr
 - 6.2 Zone s1
 - 6.3 Zone s2
 - 6.4 Zone df
- 7 Éclairement de la tache
 - 7.1 Éclairement dans la « zone tr »
 - 7.2 Éclairement dans la zone s1
 - 7.3 Éclairement dans la « zone s2 »
- 8 Les cadrans et méridiennes en plein air
- 9 Les méridiennes à l'intérieur des bâtiments
- 10 étude de cas particuliers
 - 10.1 Généralités
 - 10.1.1 Le plan de l'œilleton
 - 10.1.2 Le plan de la tache de lumière
 - 10.2 La méridienne de Villers-sur-Mer
 - 10.3 Méridienne fictive
- 11 Conclusion

1 Présentation

Que ce soit pour une méridienne ou un cadran solaire, en intérieur ou en extérieur, l'usage d'un œillette pose toujours comme problème le choix de sa dimension. Voici les principaux éléments du choix.

La tache de lumière comporte deux zones :

1. Une intérieure à éclairage uniforme
2. Une extérieure (la pénombre) à éclairage décroissant de l'intérieur vers l'extérieur

Les deux cas principaux sont :

1. Zone intérieure image du soleil, pénombre causée par la dimension de l'œillette
2. Zone intérieure définie par la projection de l'œillette, pénombre causée par la dimension du soleil

A ces éléments vient se greffer de manière incontournable la diffraction de la lumière.

D'autre part trois grandeurs doivent être prises en compte :

1. La dimension de l'œillette
2. La distance œillette - tache de lumière
3. La dimension de la tache de lumière

Pour simplifier le problème nous étudierons le dispositif avec le plan de l'œillette et le plan de la tache de lumière perpendiculaire aux rayons du soleil. On verra ensuite comment adapter l'analyse aux dispositifs réels.

Il faut savoir que la détermination de la dimension d'un œillette n'est pas calculée avec précision. Cependant si l'on admet une estimation dans un rapport de 1 à 2 dans la dimension. Il faut quand même situer la dimension par rapport aux phénomènes à prendre en compte et une analyse graphique me semble suffisante.

2 Principe de la présentation graphique

Les trois grandeurs, définies plus haut, seront représentées sur un graphique en 3D. Compte tenu des rapports entre les dimensions minimum et maximum une représentation logarithmique sur les trois axes s'impose. Un autre avantage de cette représentation pour les grandeurs étudiées est de n'avoir que des surfaces planes pour les fonctions à représenter.

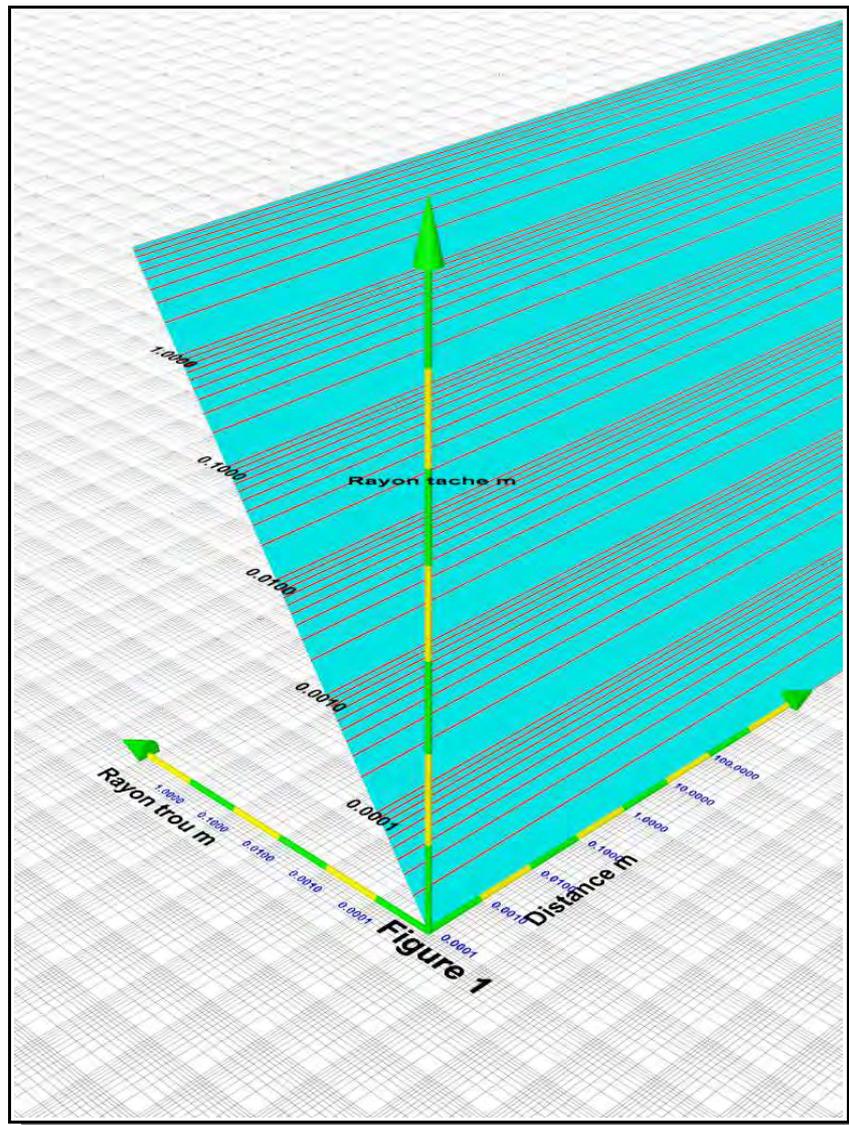
3 Projections des grandeurs

3-1 Projection orthographique de l'œillette

Les coordonnées sont les suivantes :

- Dans le plan horizontal le rayon de l'œillette et la distance œillette tache de lumière.
- En vertical le rayon de la tache de lumière.

Dans cette présentation on supposera le soleil ponctuel et à l'infini. Dans ce cas le rayon de la tache de lumière est égale au rayon de l'œillette est indépendant de la distance œillette tache de lumière. La représentation sera un plan, voir la figure 1



La surface plane colorée (cyan) représente le rayon de la tache de lumière, elle est elle même graduée en rayon de la tache de lumière.

Rayon trou m

rayon du trou en mètre

Distance m

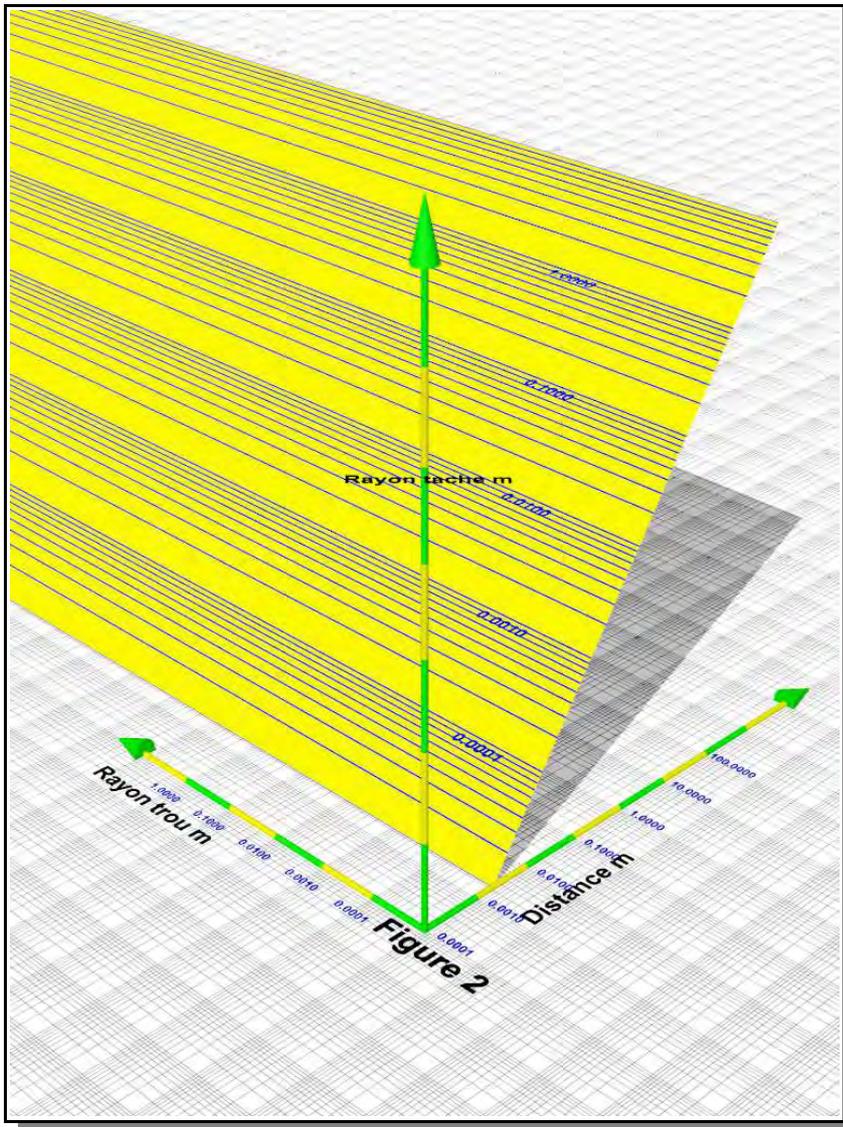
distance en mètre

Rayon de tache m

rayon de la tache en mètre

3-2 Image du soleil

Dans ce graphique on représente le rayon de la tache de lumière qui serait obtenue par un dispositif du genre sténopé (l'œilleton serait un petit trou), voir figure 2



La surface plane jaune représente le rayon du soleil dans ce système de coordonnées.

Le rayon angulaire du soleil est de 16' d'angle. Cette surface est graduée en rayon de la tache de lumière.

On voit croître le rayon avec la distance, tandis qu'il est indépendant du rayon de l'œilleton.

3-3 La diffraction¹

Rappel : la diffraction est le phénomène par lequel les rayons lumineux issus d'une source ponctuelle sont déviés de leur trajectoire rectiligne lorsqu'ils rasant les bords d'un obstacle opaque (notre trou d'œilleton) .

Dans ce système de coordonnées la représentation de la diffraction est un plan (si les coordonnées étaient linéaires la surface ne serait pas plane). Voir figure 3

La loi utilisée est :

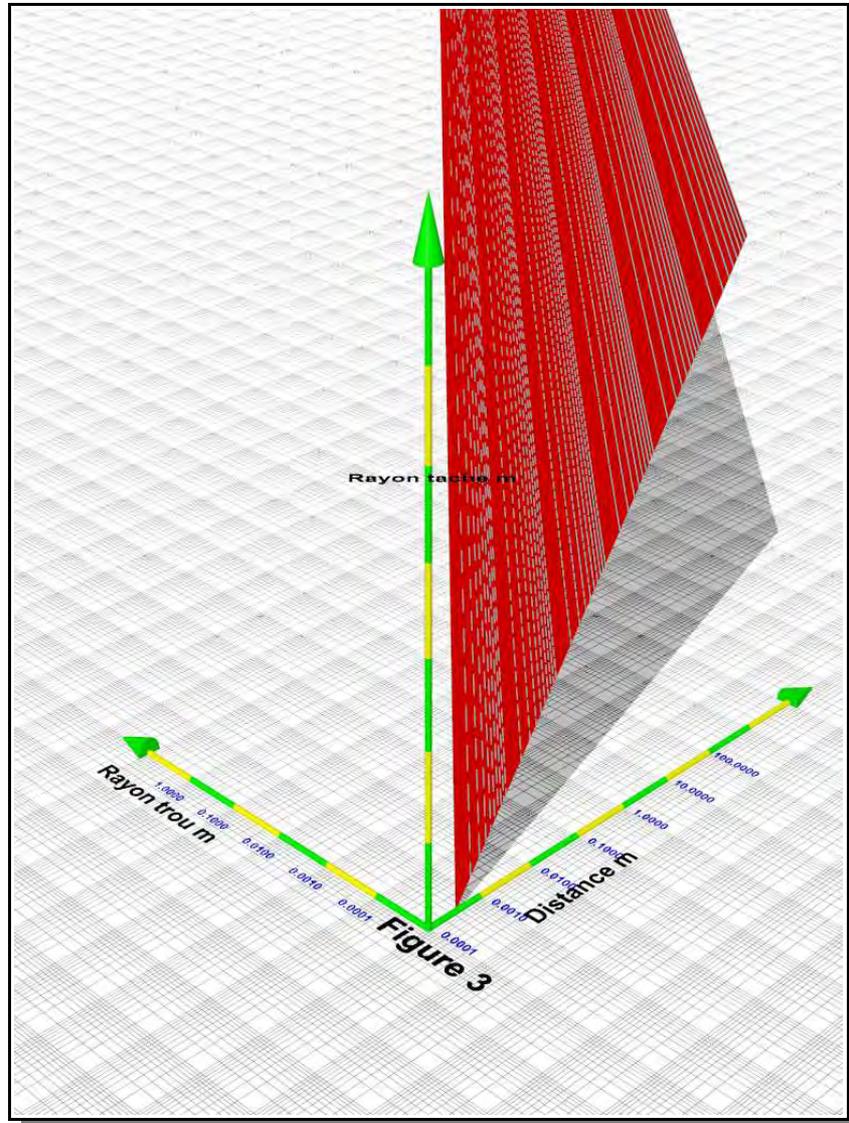
$$R_{ta} = \frac{D \times 1,22 \times \lambda}{2 \times R_{oe}}$$

¹ La nature ondulatoire de la lumière fait que celle-ci est diffractée après le passage à travers un trou. Plus la taille du trou diminue, plus l'effet de la diffraction est visible.

Le cas particulier d'un trou parfaitement circulaire donne une figure de diffraction, appelée **tache d'Airy** (du nom de George Biddell Airy) , présentant un disque central, et des cercles concentriques de plus en plus atténués.

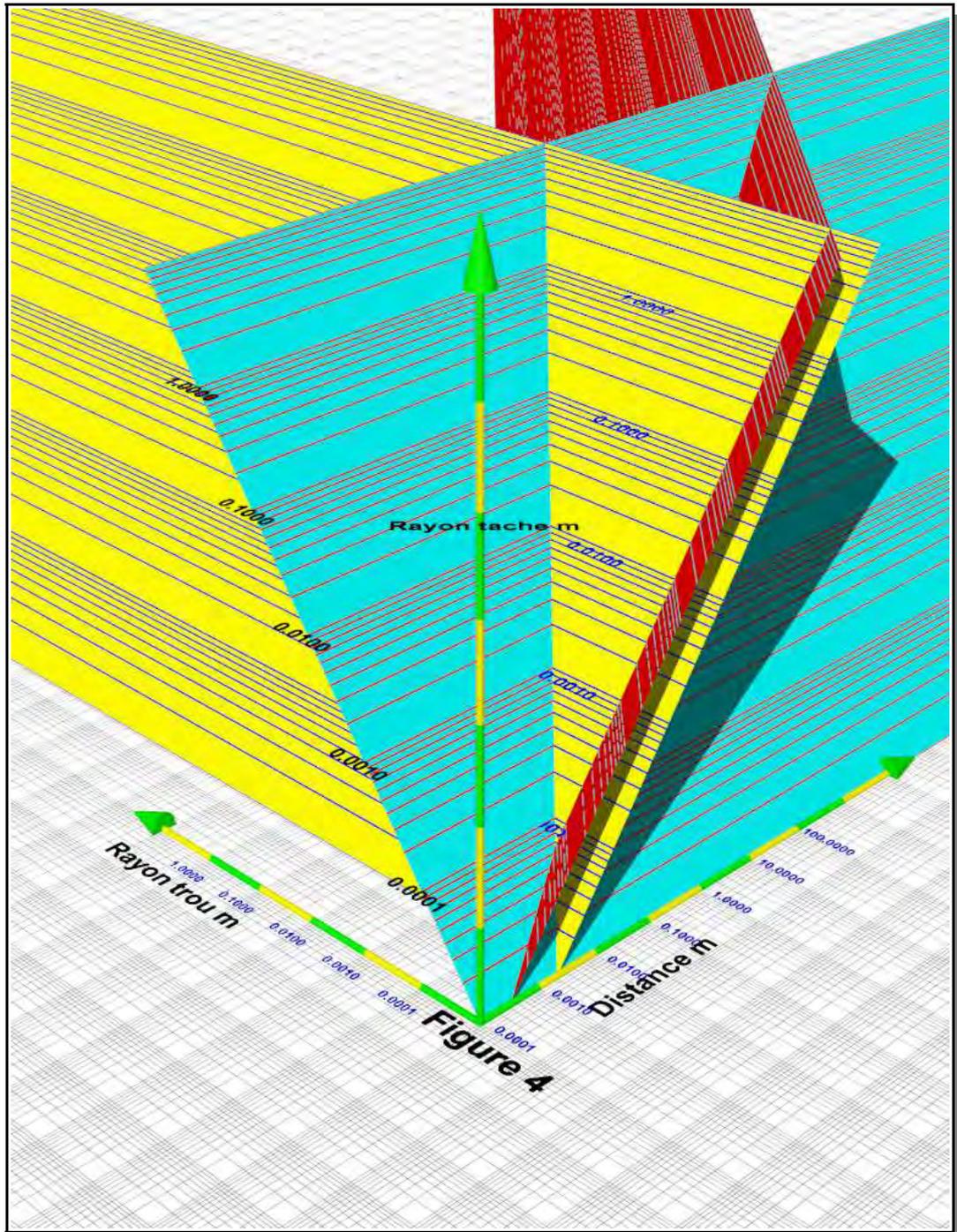
avec :

- R_{ta} Rayon du premier cercle noir du disque d'Airy
- D Distance trou – tache de lumière
- λ Longueur d'onde
- R_{oe} Rayon de l'ocillon

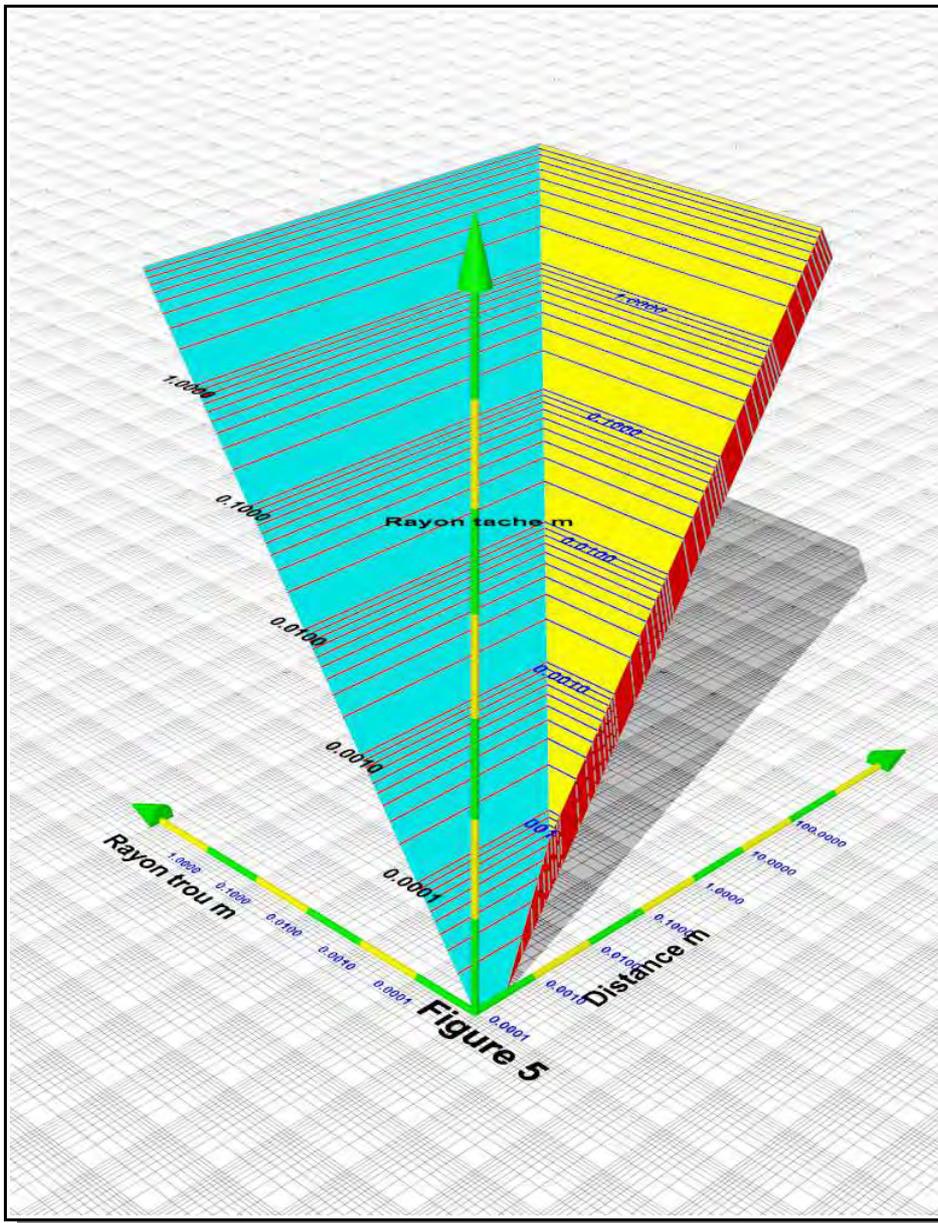


4 Association des trois grandeurs

Ces trois grandeurs : projection de l'ocillon, image du soleil et diffraction existent simultanément il est donc indispensable de les traiter ensemble. La représentation de cet ensemble est sur la figure 4. Pour une valeur du rayon de l'ocillon et une distance on obtient trois points (un pour chaque grandeur), mais comme vous le voyez l'utilisation n'est pas évidente. En tenant compte du fait que chaque grandeur a une taille très différente. Par exemple si la tache de diffraction a un rayon de 0,1 mm et que le rayon de l'image du soleil vaut 10cm il est inutile de s'occuper de la diffraction.



Pour chacun des plans on conservera la partie qui donne un rayon de tache supérieur aux deux autres plans. Voir le résultat sur la figure 5



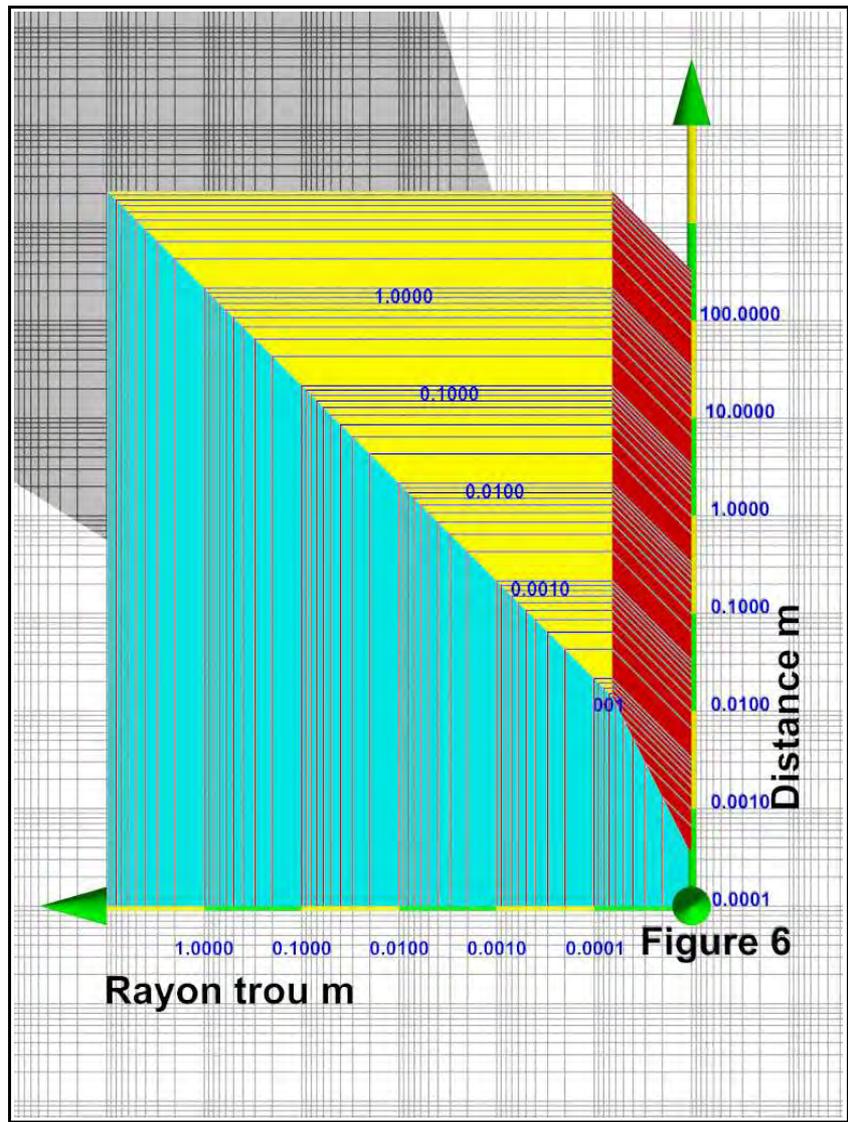
L'usage de ce diagramme n'est pas toujours facile à cause de la représentation en 3 dimensions, aussi une vue verticale permettra une utilisation presque évidente. Mais pour bien en comprendre l'usage il faudra garder en mémoire qu'il s'agit d'une projection d'un graphique en 3 dimensions.

Voir la figure 6.

Sur cette figure les zones colorées sont parcourues par un réseau de graduation logarithmiques qui donne le rayon de la tache pour chaque grandeur :

- la zone cyan le rayon du trou de l'ocillon
- la zone jaune le rayon de l'image du soleil
- la zone rouge le rayon de la tache de diffraction.

L'échelle des valeurs se poursuit dans chaque zone, les graduation de la zone jaune se poursuivent ainsi sur les zones rouge et cyan.



5 Utilisation du graphique

5-1 Exemple 1

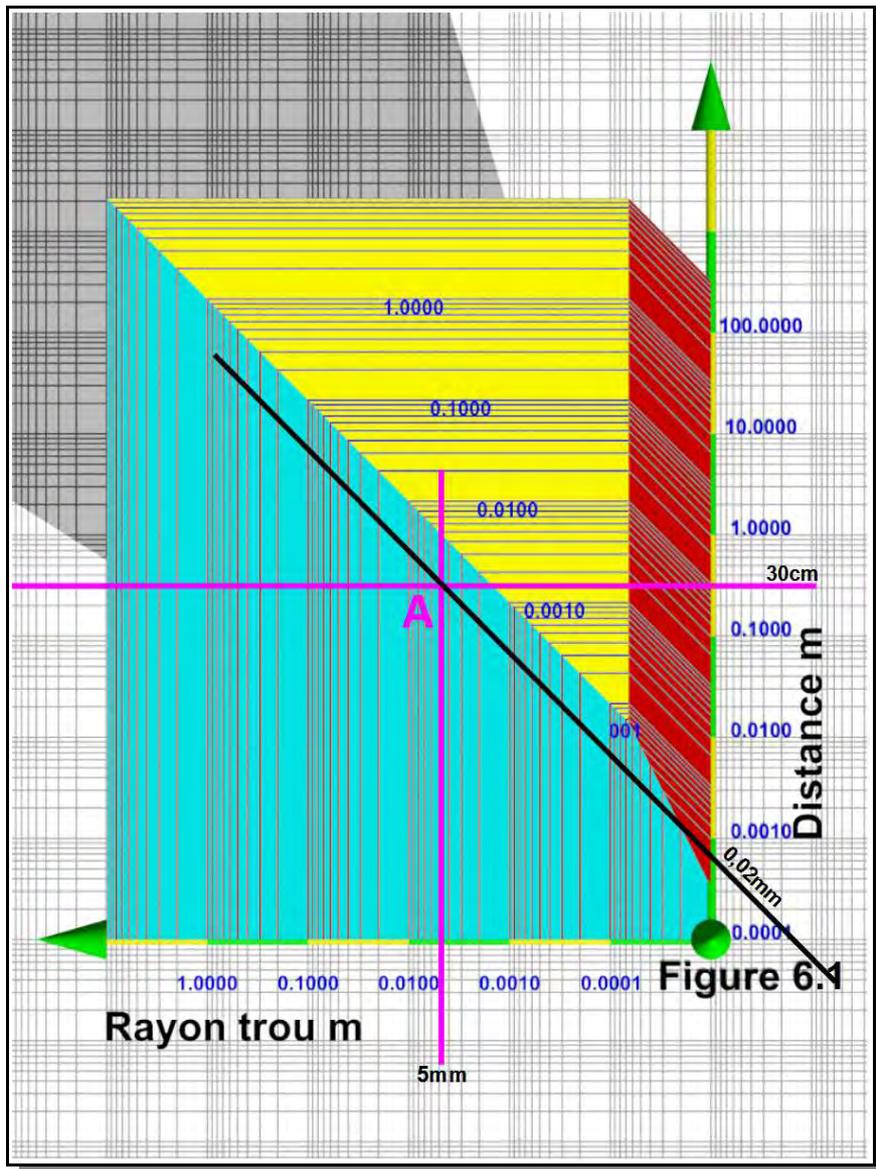
Dans un premier temps nous allons montrer comment lire le graphique. Soit un œilleton de 5mm de rayon a une distance de la tache de 30cm telle que sur la figure 6.1.

On peut en déduire que le rayon de l'image du soleil est d'environ 1,5 mm et le rayon de la tache de diffraction 0,02 mm. Le point A étant représentatif du dispositif.

Le trait noir passant par A est tracé parallèlement au graduation de la zone rouge et il passe sur la graduation 0,02 mm qui donne le rayon de la tache de diffraction

Le trait horizontal passant par la distance 30cm passe par la graduation 1,5mm dans la zone jaune qui correspond au rayon de l'image du soleil.

Dans ce cas on aura une tache de lumière de 5mm de rayon avec de part et d'autre de ce cercle une zone de pénombre de 1,5mm liée à l'image du soleil, la diffraction étant négligeable.



5-2 Exemple 2

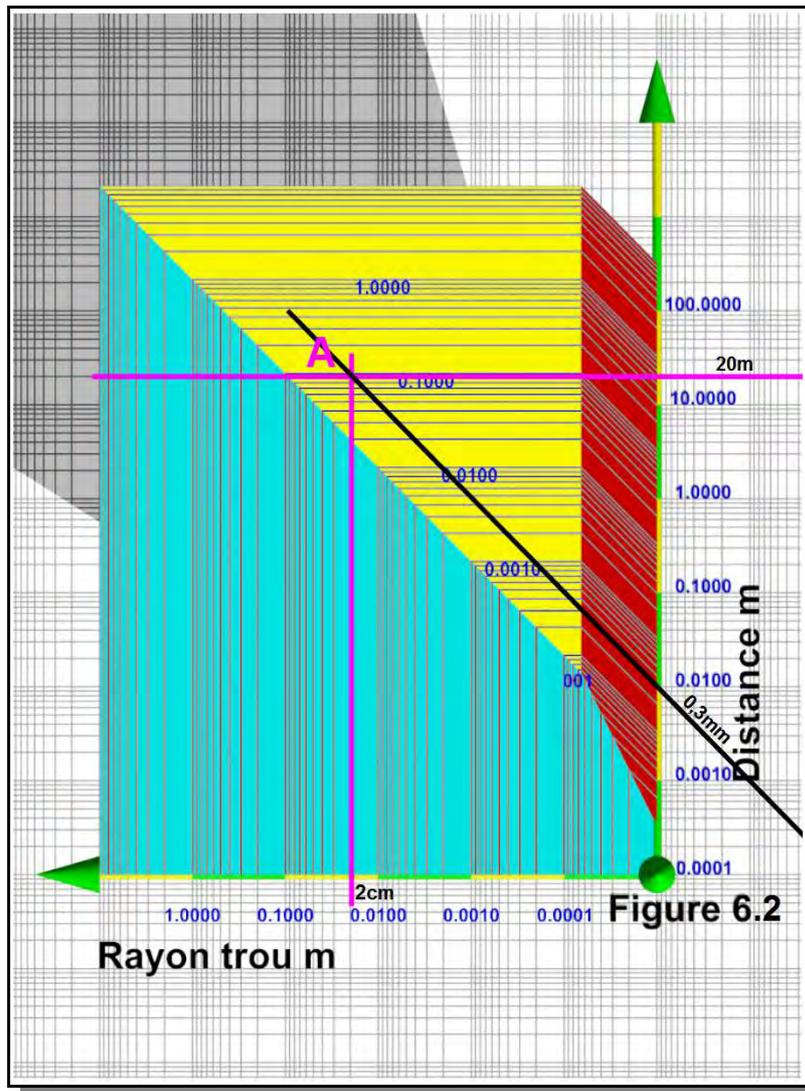
Soit un œilleton de 2cm de rayon a une distance de la tache de 20m telle que sur la figure 6.2.

On peut en déduire que le rayon de l'image du soleil est d'environ 10cm et le rayon de la tache de diffraction 0,3 mm. Le point A étant représentatif du dispositif.

Le trait noir passant par A est tracé parallèlement au graduation de la zone rouge et il passe sur la graduation 0,3 mm qui donne le rayon de la tache de diffraction

Le trait horizontal passant par la distance 20m passe par la graduation 10cm dans la zone jaune qui correspond au rayon de l'image du soleil.

Dans ce cas on aura une tache de lumière de 10cm de rayon (l'image du soleil) avec de part et d'autre de ce cercle une zone de pénombre de 2cm liée à la projection du trou, la diffraction étant négligeable.



6 Analyse des différentes zones

Voir la figure 6.z

Chaque zone est limitée par des droites noires pointillées.

6-1 Zone tr

La « zone tr » est caractérisée par l'ordre des dimensions des taches suivantes (en ordre décroissant)

1. La projection du trou
2. La projection du soleil
3. La diffraction

Cette zone est utilisée pour des cadrans ou méridiennes en plein air.

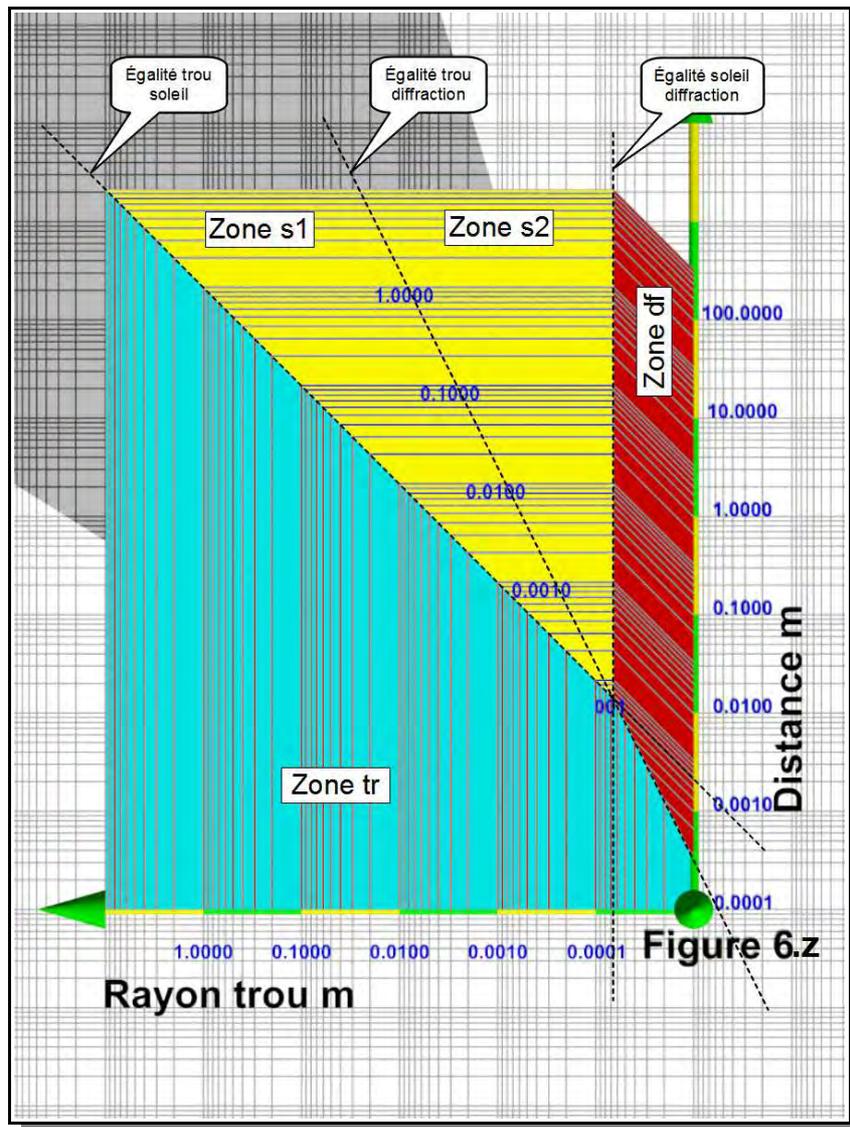
6-2 Zone s1

La « zone s1 » est caractérisée par l'ordre des dimensions de tache suivantes (en ordre décroissant)

1. La projection du soleil
2. La projection du trou
3. La diffraction

Cette zone est utilisée principalement pour les méridiennes en intérieur.

Nota : la droite limite « égalité trou diffraction » est la continuité de l'intersection de la « zone tr » et de la « zone df ».



6-3 Zone s2

La « zone s2 » est caractérisée par l'ordre des dimensions de taches suivantes (en ordre décroissant)

1. La projection du soleil
2. La diffraction
3. La projection du trou

Cette zone ne présente pas d'intérêt particulier.

6-4 Zone df

La « zone df » est caractérisée par l'ordre des dimensions de taches suivantes (en ordre décroissant)

1. La diffraction
2. La projection du soleil
3. La projection du trou

Cette zone n'est pas utilisée

7 Éclairage de la tache

7-1 Éclairage dans la « zone tr »

Depuis un point au centre de la tache de lumière dans la « zone tr » on voit le soleil en

entier, l'éclairement (en Watt par m², par exemple) est alors maximum. Par la suite on normalisera cette valeur à 1.

7-2 Éclairement dans la zone s1

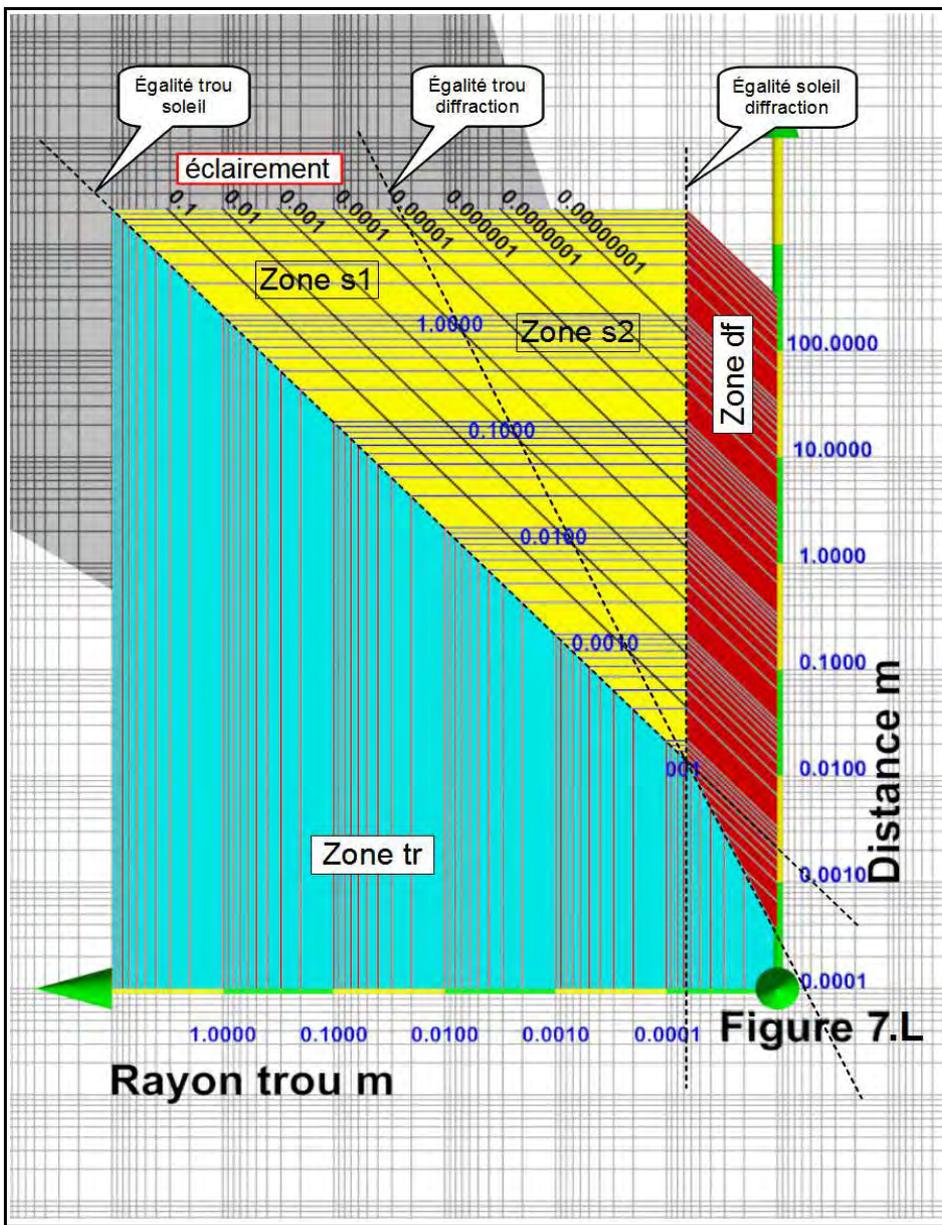
Depuis un point au centre de la tache de lumière on voit une partie du soleil limitée par les dimensions du trou de l'ocilleton. L'éclairement vaut alors :

$$E = \frac{R_{tr}^2}{R_{so}^2} \quad \text{avec :}$$

E éclairement normalisé à 1 en plein soleil (rayon perpendiculaire à la surface)

R_{tr} rayon du trou de l'ocilleton

R_{so} rayon de l'image du soleil projeté



Sur la « figure 7.L » on a représenté par un réseau de droite noire, chaque droite porte la valeur de E .

Nota : La détermination de l'éclairement est optimiste, elle ne tient pas compte de l'effet de la diffraction qui élargit la tache.

Cette détermination est valable dans la partie droite de la « zone s1 », elle devient ensuite plus grande que la réalité et elle est invalide dans la « zone s2 ».

7-3 Éclairage dans la « zone s2 »

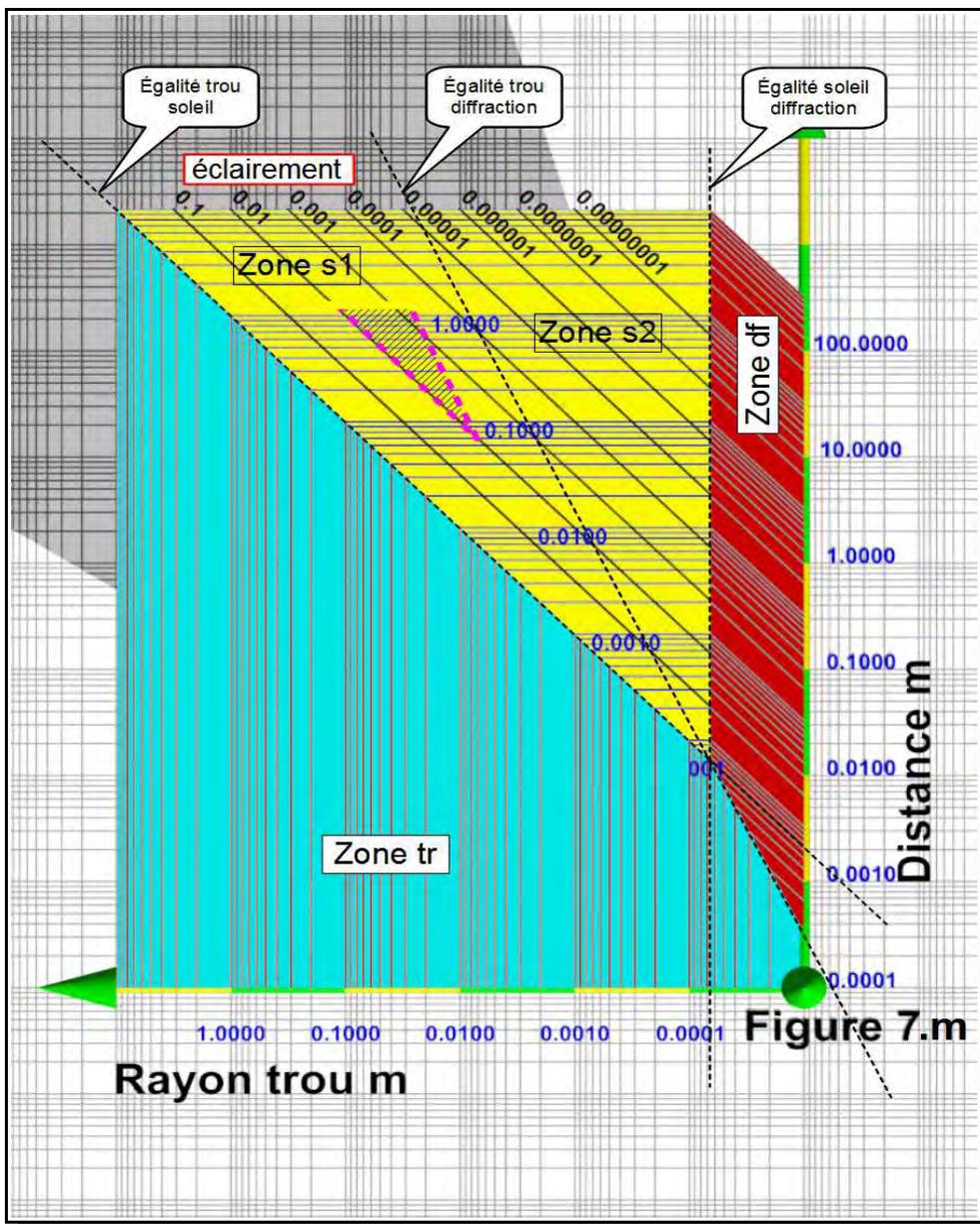
La « zone s2 » qui présente une projection du trou plus petite que la diffraction et d'autre part un éclairage très faible ne présente pas d'intérêt.

8 Les cadrans et méridiennes en plein air

La dimension des œilletons des cadrans en plein air est donnée par la « zone tr » dans ce cas l'éclairage au centre de la tache sera maximum et identique aux endroits éclairés directement par le soleil.

Il faudra cependant tenir compte de la résolution angulaire de l'œil : environ 1 minute d'angle. Pour donner un ordre de grandeur 2,9 mm est vu à 10 m sous un angle de 1 minute. Pour être bien visible la tache de lumière devra donc être vue sous un angle supérieur à 1 minute à la distance d'observation du cadran.

9 Les méridiennes à l'intérieur des bâtiments



Les constructeurs de méridiennes à l'intérieur des bâtiments (années 1600...1800) ont tous souligné l'importance d'avoir une grande méridienne pour obtenir des mesures précises, sans expliquer clairement pourquoi. Voir l'excellent ouvrage : *Astronomie et églises* par John L. Heilbron Belin pour la science. Nous avons vu plus haut que la représentation de ces méridiennes se place dans la « zone s1 ».

Ces méridiennes ont plusieurs usages :

- Mesurer l'inclinaison de

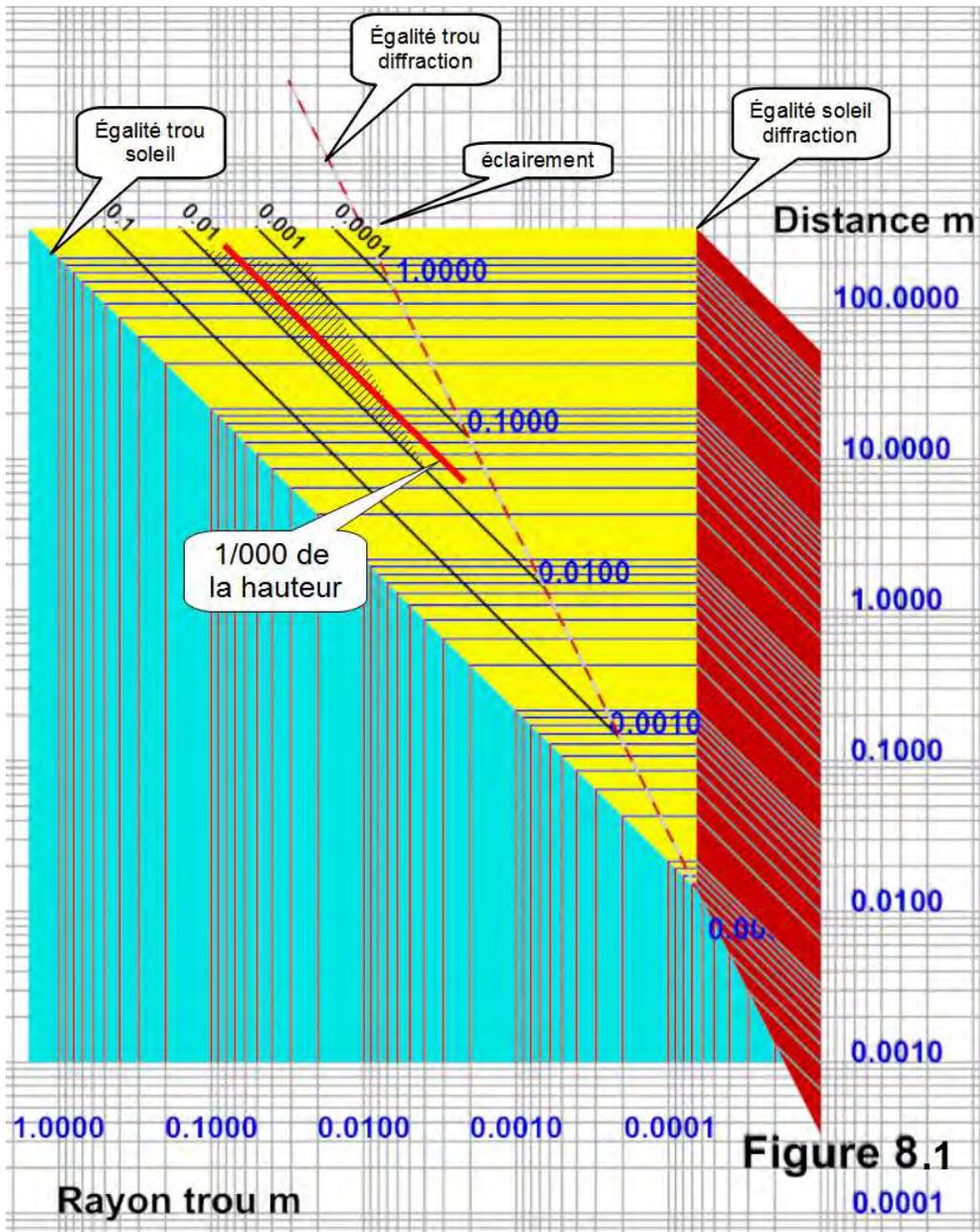
l'écliptique pour connaître sa variation.

- Trouver la date de l'équinoxe de printemps.
- Mesurer la durée de l'année.
- Mesurer les variations de la dimension du soleil.

De manière à obtenir une image la moins « flou » possible on peut s'imposer les propriétés suivantes :

- une projection du trou 10 fois plus petite que celle du soleil
- une tache de diffraction 10 fois plus petite que la projection du trou

On obtient alors la zone définie sur la figure 7.m par des hachures entourées de pointillé magenta.



La distance minimum pour respecter ces critères est d'environ 10 m.

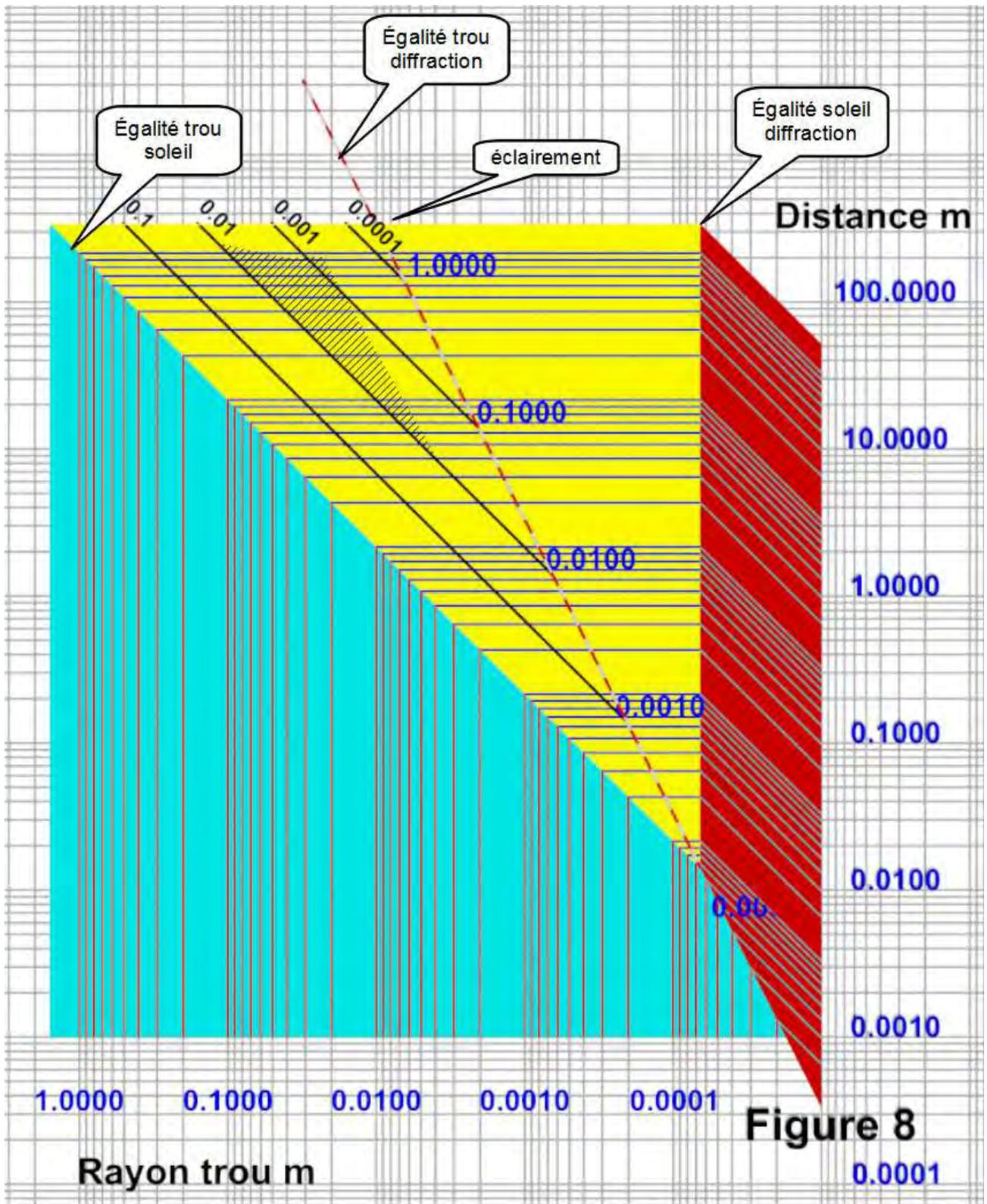
On constate bien que pour les distances plus grandes on a une plus grande marge pour choisir un compromis entre le flou de la tache lié à la dimension du trou et l'éclairement dans la zone centrale de la tache.

La règle empirique que l'on trouve chez les anciens (1600 – 1800) donne un diamètre de trou égal au 1/1000 de la hauteur pour une grand méridienne. En supposant une inclinaison moyenne de 45° du soleil on trouve la droite

rouge sur la figure 8.1.

Il faut noter la remarquable coïncidence avec la zone hachurée déterminée précédemment.

Figure à imprimer



10 Etude de cas particuliers

10-1 Généralités

Dans la partie précédente nous avons travaillé en conservant comme principe que le plan de l'œilleton et de la surface recevant la tache de lumière étaient perpendiculaire au rayon du soleil, ce n'est généralement pas le cas.

10-1.1 Le plan de l'œilleton

Comme on ne cherche qu'un ordre de grandeur pour la dimension de l'œilleton je préconise de prendre comme dimension la plus petite des dimensions de l'œilleton projetée sur le plan perpendiculaire au rayon du soleil.

Dans le cas d'une méridienne, si l'on dispose l'œilleton perpendiculairement aux rayons du soleil à midi le jour de l'équinoxe, la correction à effectuer aux solstices d'été ou d'hiver sera de : $\cos(23^{\circ}26') = 0,917$ ce qui pourra être négligé sans conséquence. Ce choix d'orientation présente aussi l'avantage d'avoir le meilleur éclairage ou la plus grande dimension de la tache en moyenne suivant que l'on a une méridienne intérieure ou extérieure.

10-1.2 Le plan de la tache de lumière

Si ce plan n'est pas perpendiculaire aux rayons du soleil la tache de lumière est projetée sur ce plan et le rapport entre les rayons des trois taches reste identique.

Nota : Mathématiquement c'est inexact pour les taches liées au soleil et à la diffraction mais la variation est tellement faible qu'on ne la prendra pas en compte.

10-2 La méridienne de Villers-sur-Mer

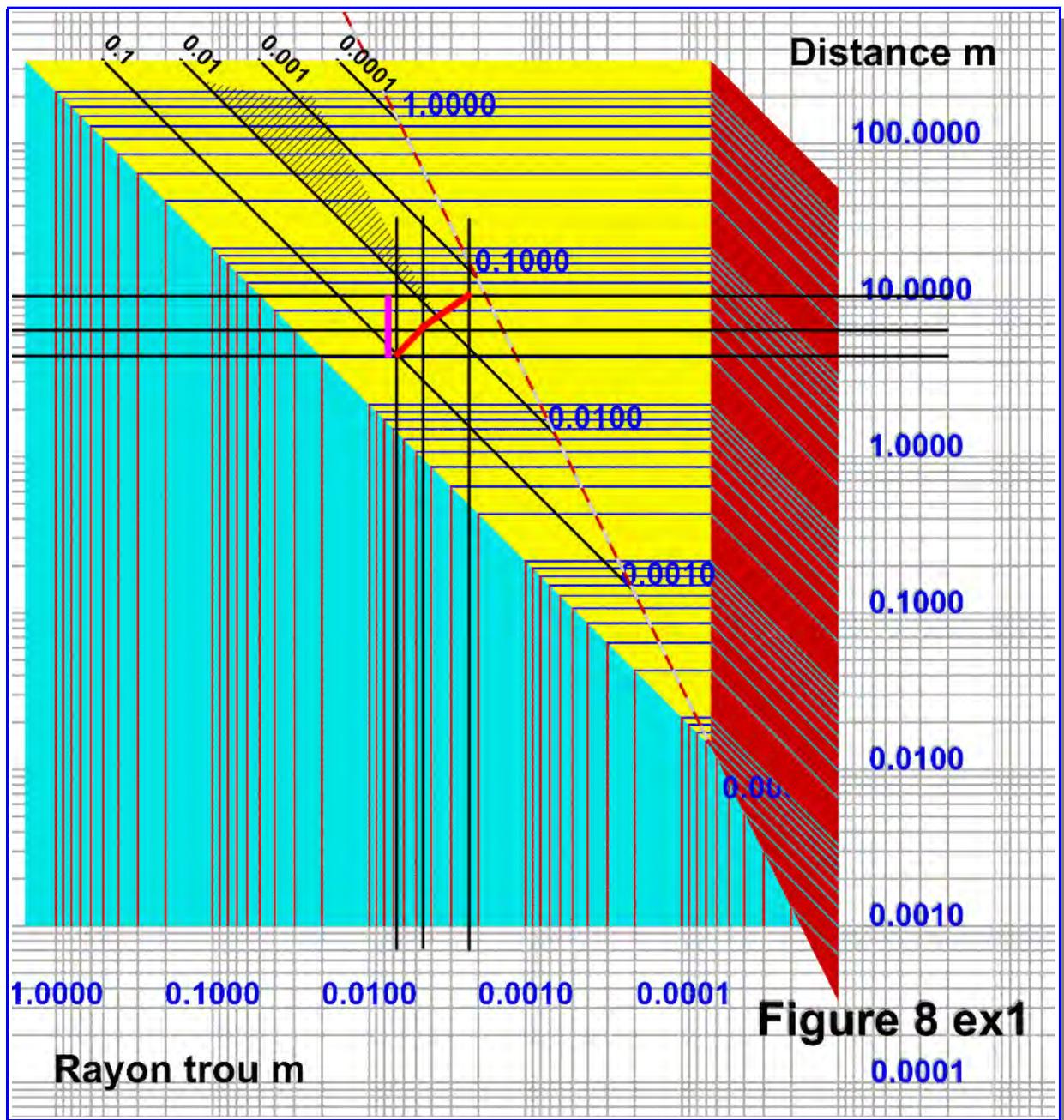
Cette méridienne est construite à l'intérieur du musée le Paléoscope, elle a été calculée par Denis Savoie. Voici ses principales caractéristiques :

- Hauteur du trou au dessus du sol 4,066 mètre
- Diamètre du trou 0,015 mètre
- Plan du trou horizontal
- Distance du mur au trou (horizontalement) 9,975 mètre
- Latitude du lieu $49^{\circ} 19' 41''$

Le tracé de la méridienne, en partant du solstice d'été, est horizontal puis il devient vertical sur le mur pour finir au solstice d'hiver.

En prenant comme inclinaison de l'écliptique sur l'équateur $23^{\circ}26'$

Dimension en mètre	Solstice d'été	Équinoxe	Solstice d'hiver
Rayon mini du trou projeté	0,0067	0,0048	0,0022
Distance	4,52	6,23	10,44



On porte ces trois couples de valeurs (distances et rayons projetés) sur le graphique, puis on les réunit par deux droites rouges (voir figure 8 ex1).

Ce trait rouge qui représente la plage de fonctionnement de la méridienne se situe au milieu de la zone S1. Comme les distances sont imposées par les dimensions du local le seul degré de liberté qui reste est le diamètre du trou, qui dans ce cas, est convenablement choisi.

Si le plan du trou avait été choisi perpendiculaire au rayon du soleil à midi le jour de l'équinoxe on obtiendrait alors le trait vertical de couleur magenta proche du trait rouge. Dans ce cas un trou de diamètre 0,01m (0,005m de rayon) aurait suffi.

10-3 Méridienne fictive

Soit à déterminer la dimension de l'œilleton d'une méridienne fictive déterminée de la manière suivante :

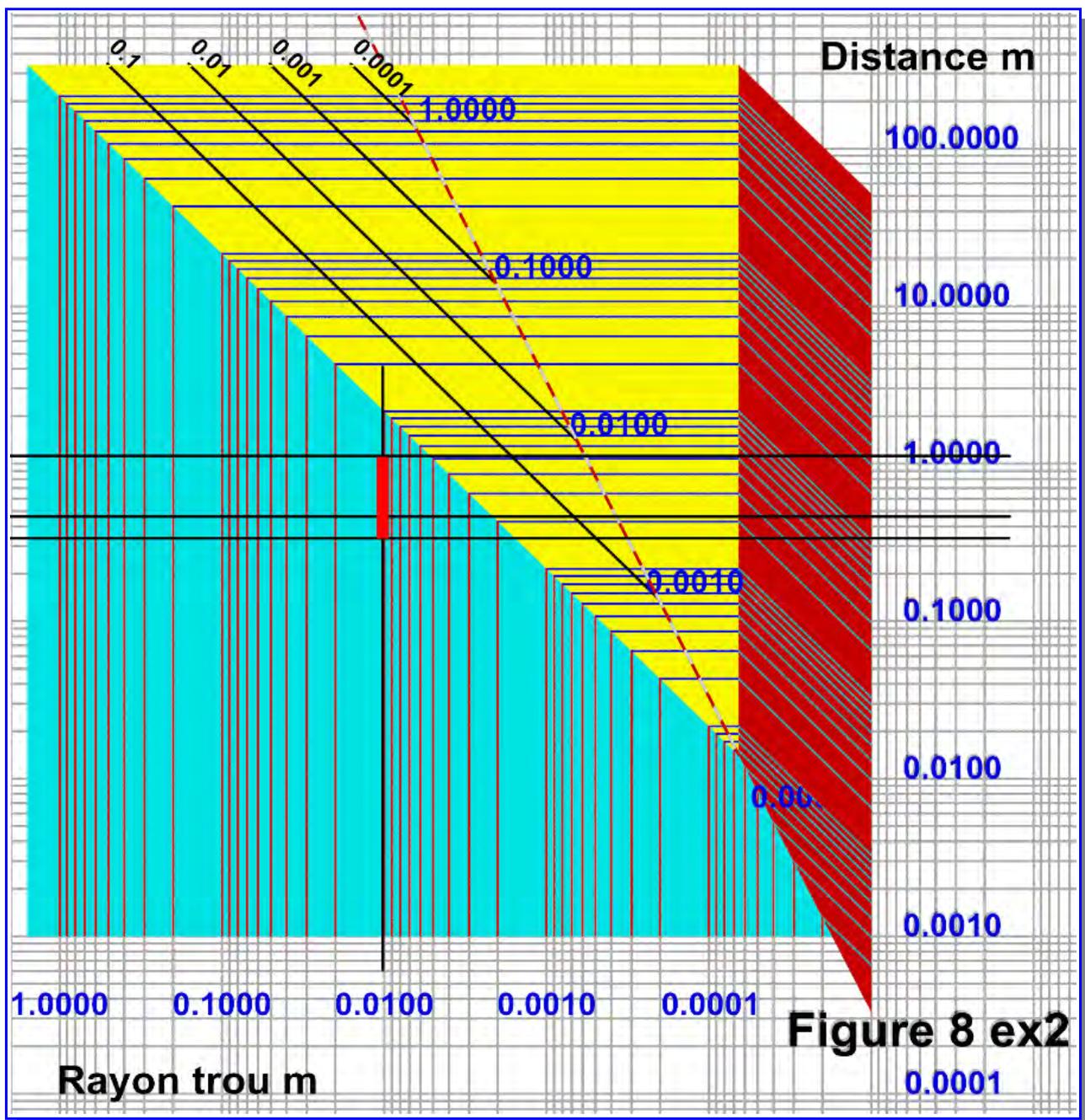
- latitude : 40°

- image du trou sur mur vertical
- distance horizontale trou – mur : 0,3m
- trou perpendiculaire au rayon du soleil à midi à l'Équinoxe

On détermine les trois distances trou image du trou sur le mur

Dimension en mètre	Solstice d'été	Équinoxe	Solstice d'hiver
Distance	1,05	0,47	0,34

On porte ces trois distances sur le graphique



Les trois trait noir horizontaux représente ces trois distances. Pour une méridienne en extérieur il faut être dans la zone [tr] de couleur cyan afin d'obtenir une image du trou avec une pénombre autour qui dépend de la dimension du soleil et l'éclairage maximum de la zone centrale de la tache de lumière. On voit qu'un trou de 0,01m de rayon convient, le trait rouge sur la figure 8 ex2 représente la zone de fonctionnement de la méridienne.

Le rayon de l'image projetée du soleil vaudra, pour ces distances, entre 0,0015 et 0,005(lu dans la zone jaune) ce qui est nettement plus petit que l'image du trou

Une tache de 0,02m de diamètre est vue à 30m sous un angle de $0^{\circ} 02' 17''$ ce qui est plus grand que la résolution angulaire de l'œil, la méridienne sera donc lisible à cette distance.

10 Conclusion

Le graphique proposé permet de choisir la dimension d'un œilleton facilement. Une fois ce choix effectué on pourra alors, par diverses méthodes, déterminer si nécessaire la forme exacte de la tache de lumière.



RECHERCHES THÉORIQUES : 2 - ŒILLETON, OMBRE, PÉNOMBRE

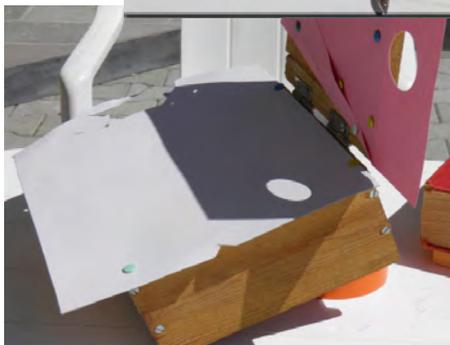
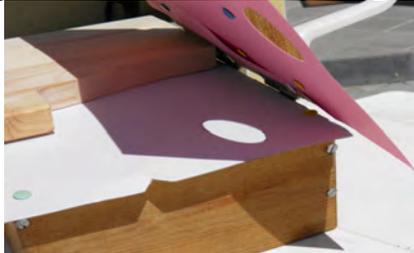
Gérard Baillet

L'étude porte sur la forme de la tache de lumière et sa visibilité.



Photos d'un montage rapidement bricolé permettant l'étude de la tache projetée

par un trou sous différents angles.



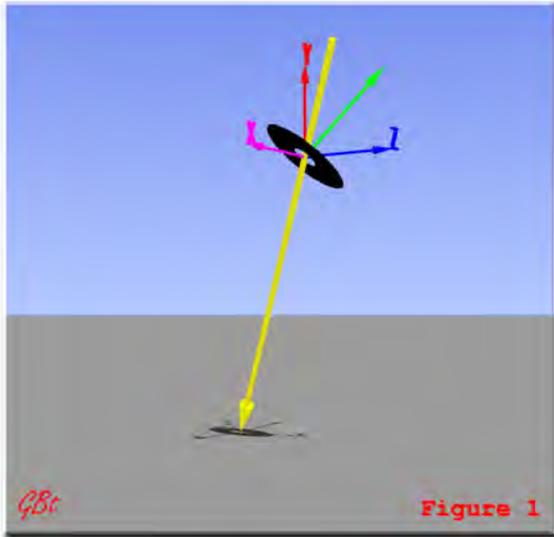
<<A chaque changement d'angle on déplace la boîte pour superposer l'ellipse. Pas très facile car le carton se tortille et la charnière n'est pas exactement à l'intersection des plan.... mais ça fonctionne>>.

Détail des points abordés:

- 1 Définition du problème traité
- 2 Forme de la tache (approche sommaire)
 - 2.1 Première méthode
 - 2.1.1 Cas 1
 - 2.1.2 Cas 2
 - 2.1.3 Cas 3
 - 2.2 Deuxième méthode
 - 2.2.1 Cas 1
 - 2.2.2 Cas 2
 - 2.2.3 Cas 3
 - 2.3 Première conclusion
- 3 Forme de la tache avec un gros trou
 - 3.1 Écran perpendiculaire
 - 3.2 Inclinaison $56,6^\circ$
 - 3.3 Première inclinaison caractéristique ($23,2^\circ$)
 - 3.4 inclinaison 16,1
 - 3.5 Deuxième inclinaison caractéristique ($8,9^\circ$)
 - 3.6 dernière inclinaison ($4,5^\circ$)
- 4 Forme de la tache avec un petit trou
 - 4.1 Écran perpendiculaire
 - 4.2 Inclinaison intermédiaire ($57,7^\circ$)
 - 4.3 Inclinaison caractéristique ($25,4^\circ$)
 - 4.4 autre inclinaison
- 5 Éclairement de la tache
 - 5.1 Éclairement avec un gros trou
 - 5.1.1 Écran perpendiculaire
 - 5.1.2 Première inclinaison caractéristique
 - 5.1.3 Deuxième inclinaison caractéristique
 - 5.1.4 Inclinaison importante
 - 5.2 Éclairement avec un petit trou
 - 5.2.1 Écran perpendiculaire
 - 5.2.2 Inclinaison caractéristique
 - 5.3 éclairement avec une position quelconque du soleil.

1 Définition du problème traité

Les trois objets utilisés sont :



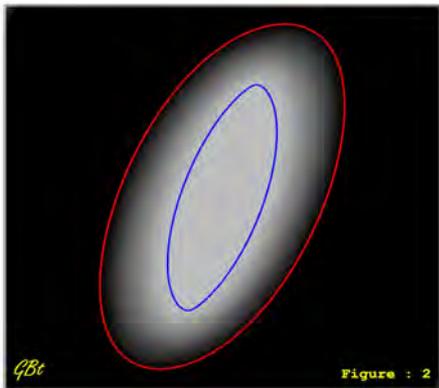
- La source de lumière : Le soleil
- Un écran percé d'un trou circulaire : l'œilleton
- Une surface plane où se forme une tache de lumière engendrée par le trou éclairé par le soleil

L'étude porte sur la forme de la tache de lumière et sa visibilité.

La figure 1 représente le dispositif utilisé.

La flèche jaune désigne le trajet d'un rayon du soleil, la flèche verte la normale à l'écran et les trois coordonnées x, y, z

2 Forme de la tache (approche sommaire) voir figure 2



Les expériences montrent que la tache étudiée comprend 3 zones :

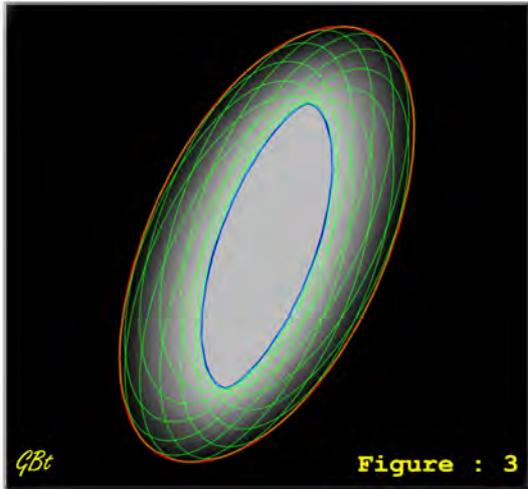
1. à l'intérieur de la limite bleu deux cas se présentent :
 - une zone à éclairage uniforme
 - une zone à éclairage variable
2. entre la limite bleu et rouge une zone de pénombre à éclairage variable.
3. à l'extérieur de la limite rouge une zone dans l'ombre de l'écran.

La définition de la forme porte sur l'étude des limites telles que définies plus haut. Dans la suite nous nous limiterons à donner les méthodes utilisables en informatique pour établir la forme de ces limites.

.....2.1 Première méthode

Elle consiste à disposer à la périphérie du soleil des sources ponctuelles. Chaque source éclaire le récepteur avec une tache lumineuse, définie par le trou. La source ponctuelle donne une tache elliptique à bord net, on néglige la diffraction.

.....2.1.1 Cas 1



Voir figure 3

Si une zone est recouverte par toutes les taches on peut dire que depuis cette zone on voit le soleil en entier, la zone aura alors un éclairage uniforme.

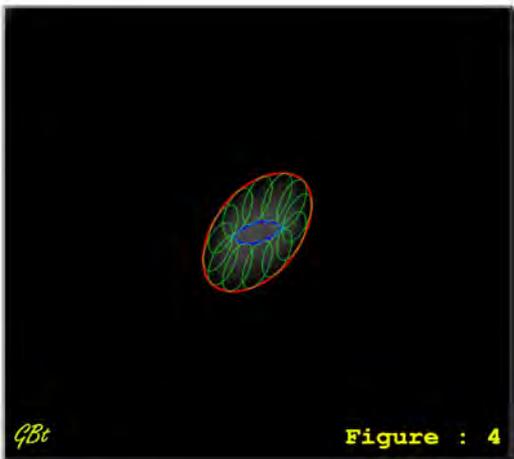
La zone couverte par une partie des taches sera la pénombre à éclairage variable.

la zone où il n'y a pas de tache est dans l'obscurité.

Les limites de quelques taches de lumières sont représentées par des ellipses vertes.

Sur la figure 3 il s'agit d'un trou de grande dimension.

.....2.1.2 Cas 2



Voir figure 4

Il s'agit du cas où le trou est plus petit.

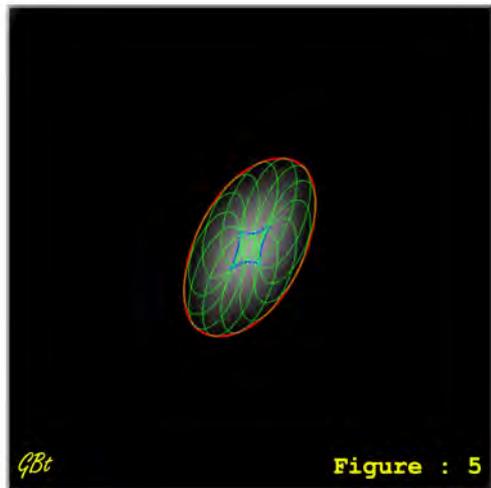
Un observateur dans la zone limitée par la ligne bleue voit une partie du soleil limitée par le trou, mais il ne voit pas les bords du soleil. Comme la surface du soleil est (au premier ordre) fixe l'éclairement est constant

Dans la zone entre la ligne bleue et la ligne rouge l'observateur voit une partie du bord du soleil, le soleil n'est pas vu en entier la vue est limitée par les bords du trou. Il s'agit d'une zone de pénombre variable

.....2.1.3 Cas 3

Voir figure 5

Pour un trou de dimension intermédiaire toute la zone à l'intérieur de la ligne rouge est parcourue par les tache. L'observateur voit une partie du bord du soleil, le soleil n'est pas vu en entier la vue est limitée par les bords du trou. Il s'agit d'une zone de pénombre variable



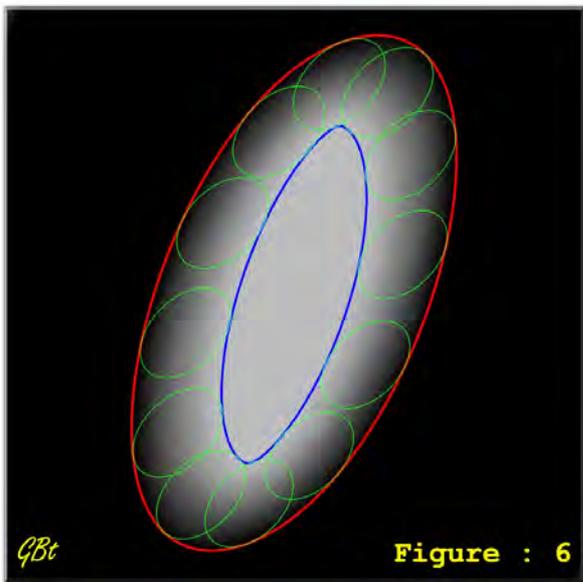
.....2.2 **Deuxième méthode**

Elle consiste à disposer au bord du trou une suite de sténopés.(Sténopé : dispositif formé par un petit trou qui forme une image, un peu à la manière d'une lentille convergente).

Cette suite de sténopés donne sur le récepteur une suite d'images du soleil.

Ces images peuvent former trois zones différentes.

.....2.2.1 **Cas 1**



Voir figure 6

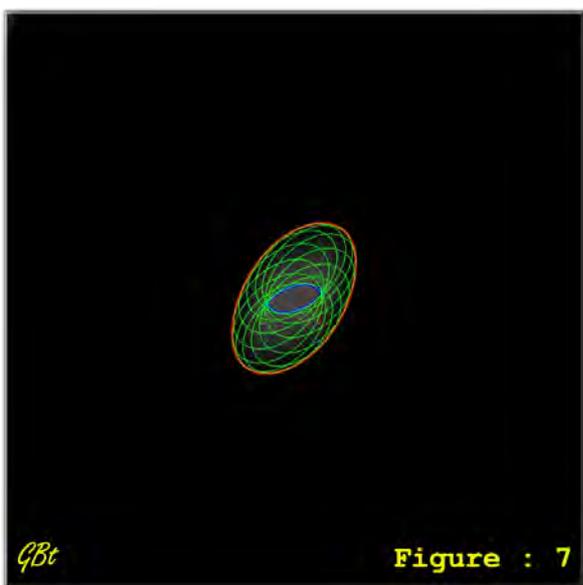
Trou de grande dimension identique à celui décrit dans le paragraphe 2.1.1.

la zone à l'intérieur de la ligne bleue voit le soleil en entier

la zone entre la ligne bleue et la ligne rouge voit le bord du trou devant le soleil, il se forme alors la pénombre de luminosité variable.

La zone externe à la ligne rouge ne voit pas le soleil.

.....2.2.2 **Cas 2**



Voir figure 7

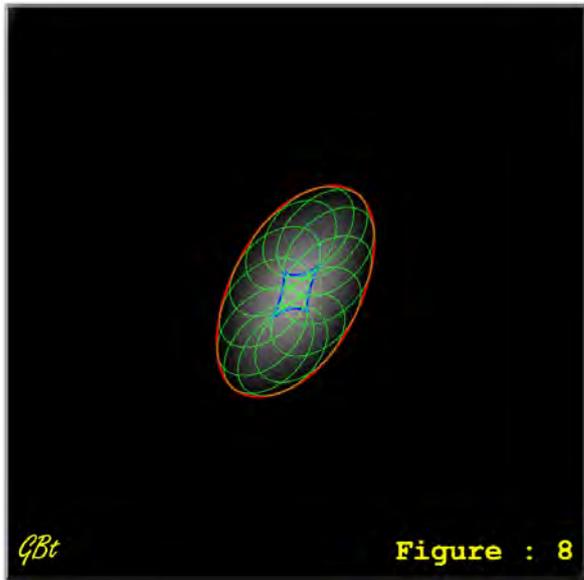
Trou de grande dimension identique à celui décrit dans le paragraphe 2.1.2

La zone centrale limitée par la ligne bleue est couverte par toutes les images données par les sténopés, voit une portion du soleil de dimension fixe, limitée par les bords du trou (le soleil est apparemment plus grand que le trou)

La zone entre la ligne bleue et la ligne rouge voit une partie variable du soleil elle donne une pénombre d'éclairement variable.

La zone externe à la ligne rouge ne voit pas le soleil.

.....2.2.3 **Cas 3**



Voir figure 8

Il s'agit d'un trou de taille intermédiaire et les remarques sont identiques à celle du paragraphe 2.1.3

.....2.3 **Première conclusion**

A partir du paragraphe 2.2.1 on peut dire que pour un gros trou la pénombre est définie par la dimension angulaire du soleil.

Alors que pour un petit trou on peut dire que la pénombre est définie par la dimension du trou voir paragraphe 2.1.2

3 Forme de la tache avec un gros trou

Dans l'étude qui suit on utilise les valeurs suivantes

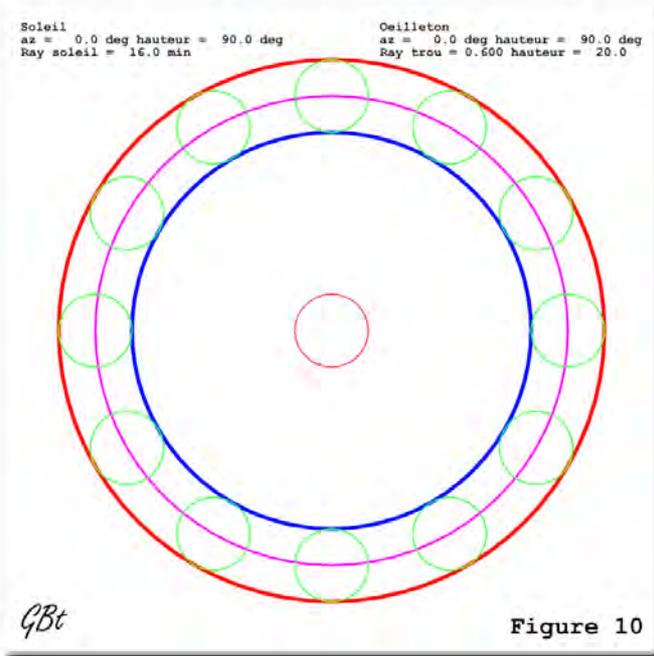
- La droite qui passe par le centre de l'écran et le centre du soleil est perpendiculaire au plan du récepteur,
- Si un observateur se place au centre de la tache sur le récepteur, si l'écran est perpendiculaire à la ligne écran-soleil, et regarde le soleil il voit le soleil en entier, (la dimension angulaire du trou est plus grande que celle du soleil)

L'étude portera sur la forme de la limite interne en bleu sur les figure précédentes.

Les limites sont les enveloppes de famille de courbes . Ces famille de courbes sont définies de deux manières différentes voir les paragraphes Erreur : source de la référence non trouvée et Erreur : source de la référence non trouvée, elles donnent naturellement le même résultat.

Dans la suites l'angle entre la direction écran-soleil et la normale à l'écran variera progressivement et nous indiqueront les éléments qui définissent certaines formes caractéristiques.

.....3.1 **Écran perpendiculaire.**



Quelques définitions des éléments de l'image (voir figure 10)

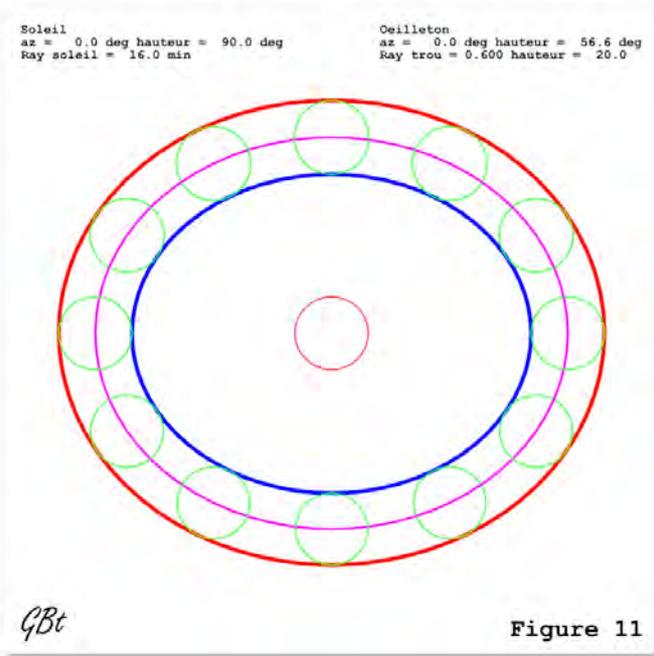
Le petit cercle rouge au centre est l'image du soleil fourni par un sténopé au centre de l'écran.

Le cercle magenta (entre les cercles rouge et bleu) est l'image de l'écran donnée par une source ponctuelle au centre du soleil.

Les petit cercles verts sont les images du soleil par des sténopés à la périphérie du trou de l'écran. Le grand cercle rouge est l'enveloppe de cette famille de courbes à l'extérieur, alors que le cercle bleu est l'enveloppe interne de cette famille de courbes.

Sur l'image en haut à droite dans la rubrique « Oeilleton » [az] est l'azimut de la normale à l'écran et [hauteur] la hauteur de la normale à l'écran au dessus de l'horizon, (le récepteur est horizontale).

.....3.2 **Inclinaison 56,6°**

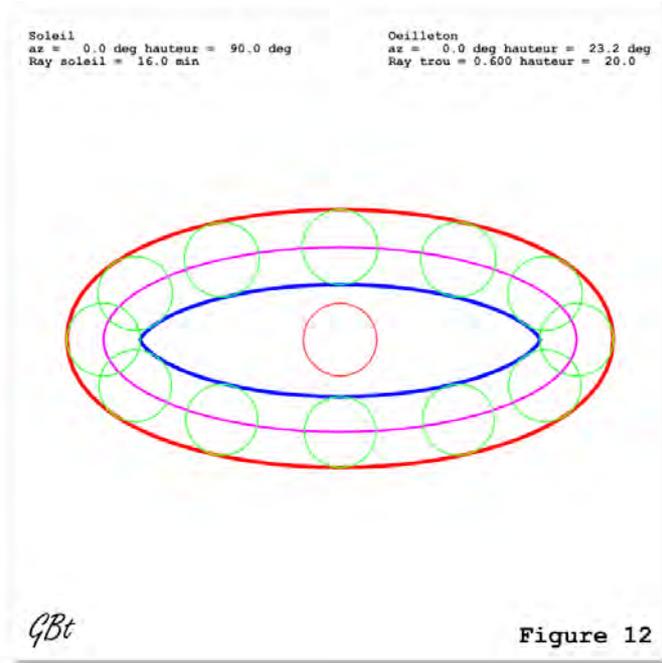


Voir figure 11

Pour l'inclinaison donnée on voit la déformation en ellipse des cercle.

.....3.3 Première inclinaison caractéristique (23,2°)

Voir figure 12



L'élément caractéristique de cette inclinaison est l'apparition de deux angles vifs aux extrémités horizontales de la courbe bleue.

Cause de la présence de ces angle vifs :

Egalité des rayons de courbures aux deux points placés aux extrémités horizontales du cercle magenta (voir Erreur : source de la référence non trouvée) sont égaux au rayon du petit cercle rouge au centre.

Le rayon de courbure de l'ellipse est donné par :

<http://www.mathcurve.com/courbes2d/ellipse/ellipse.shtml>

$$R = \left(\frac{a^2}{b}\right) \times [1 - (e^2 \times \cos(t)^2)]^{3/2}$$

R = rayon de courbure; a = demi grand axe; b = demi petit axe;

e = excentricité; t = angle entre l'axe horizontal et le point de l'ellipse

avec :

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

dans le cas qui nous intéresse on pose ;

t = 0; a = 1; b = cos(i) avec i angle entre la normale à l'écran et la droite écran-soleil (la hauteur affichée sur les images vaut : [90 - i])

$$e = \sin(i)$$

On obtient alors pour $0 \leq i \leq 90$:

On obtient le rayon de courbure : $R = \cos(i)^2$

Et pour une ellipse de même excentricité et de demi grand axe : [a]

$$R = a \times \cos(i)^2$$

Formule 1

Soit :

a = 0,6; d = distance récepteur écran (20); rs = le rayon angulaire du soleil (16/60 en degrés); rsol = le rayon du soleil image dans le plan du récepteur

On a alors :

$$rsol = d \times \tan(rs)$$

Formule 2

Pour remplir la condition il faut $R = rsol$ à partir des formules 1 & 2 on trouve i il faut :

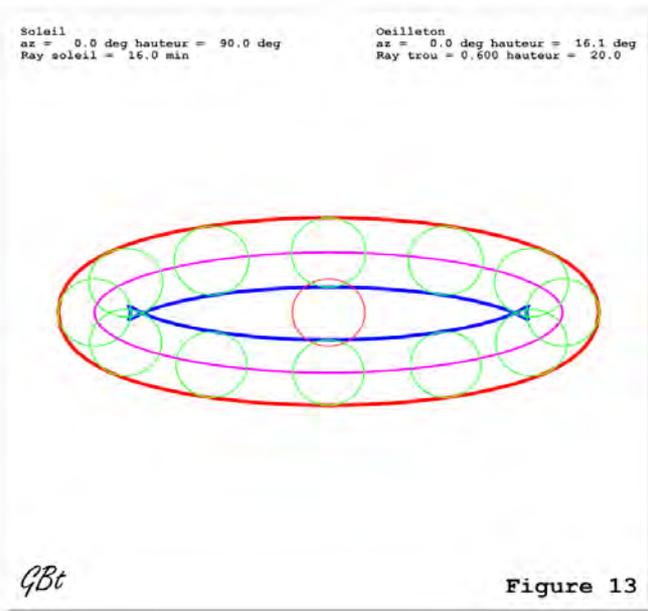
$$i = \arccos\left(\sqrt{\frac{d \times \tan(rs)}{a}}\right)$$

soit :

h hauteur angulaire de la normale à l'écran sur l'horizon

$$h = 90 - i$$

.....3.4 inclinaison 16,1

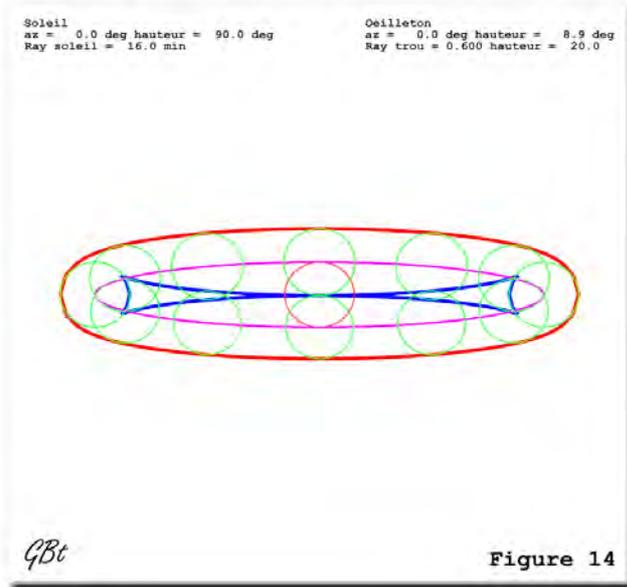


Voir figure 13

Pour une inclinaison plus faible la courbe bleue présente deux croisement et quatre points de rebroussement.

Les petites zones comprises entre un croisement et deux points de rebroussement proche sont traversées par les limites (vertes) des projection du soleil. Elles sont donc des zones de pénombre à luminosité variable.

.....3.5 Deuxième inclinaison caractéristique (8,9°)



Voir figure 14

A partir de cette inclinaison il n'y a plus de zone à éclairage constant.

Dans ce cas le petit cercle rouge image du soleil au centre est tangent à l'ellipse magenta image du trou.

Avec les notations du paragraphe Erreur : source de la référence non trouvée on a :

$$b = r_{sol}$$

ou avec :

$$b = a \times \cos(i)$$

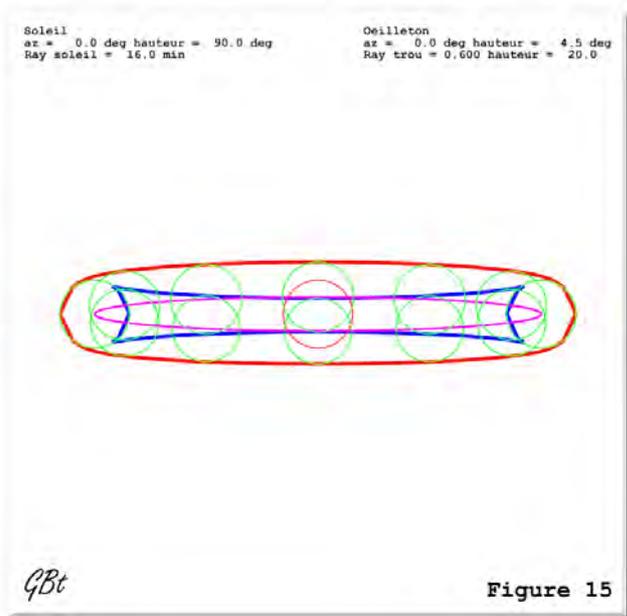
$$r_{sol} = d \times \tan(rs)$$

d'où :

$$i = \arccos\left(\frac{d \times \tan(rs)}{a}\right)$$

h = hauteur angulaire de la normale à l'écran sur l'horizon $h = 90 - i$

.....3.6 dernière inclinaison (4,5°)



Voir figure 15

Dans ce cas il n'y a que de la pénombre à luminosité variable.

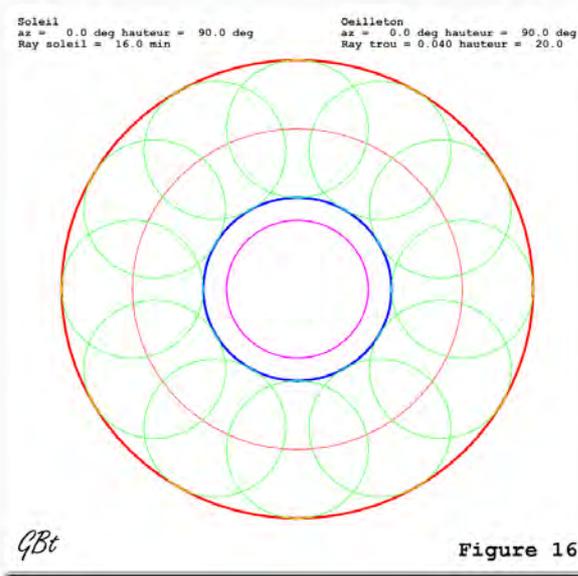
4 Forme de la tache avec un petit trou

Dans l'étude qui suit on utilise les valeurs suivantes

- La droite qui passe par le centre de l'écran et le centre du soleil est perpendiculaire au plan du récepteur,
- Si un observateur se place au centre de la tache sur le récepteur, si l'écran est perpendiculaire à la ligne écran-soleil, et regarde le soleil il ne voit pas le soleil en entier, (la dimension angulaire du trou est plus petite que celle du soleil)

Autres remarques comme au paragraphe 3.

.....4.1 Écran perpendiculaire



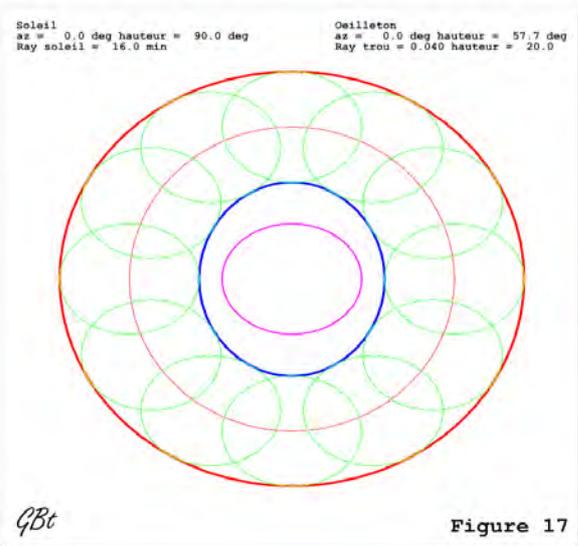
Quelques définitions des éléments de l'image (voir figure 16)

Le cercle rouge entre les cercles bleu et rouge externe est l'image du soleil fourni par un sténopé au centre de l'écran.

Le petit cercle magenta au centre est l'image de l'écran donnée par une source ponctuelle au centre du soleil.

Les petit cercles verts sont les images du trou par des sténopés à la périphérie du soleil. Le grand cercle rouge est l'enveloppe de cette famille de courbes à l'extérieur, alors que le cercle bleu est l'enveloppe interne de cette famille de courbes.

Sur l'image en haut à droite dans la rubrique « Œilleton » [az] est l'azimut de la normale à l'écran et [hauteur] la hauteur de la normale à l'écran au dessus de l'horizon, (le récepteur est horizontale).



.....4.2 Inclinaison intermédiaire (57,7°)

Voir figure 17

.....4.3 **Inclinaison caractéristique (25,4°)**

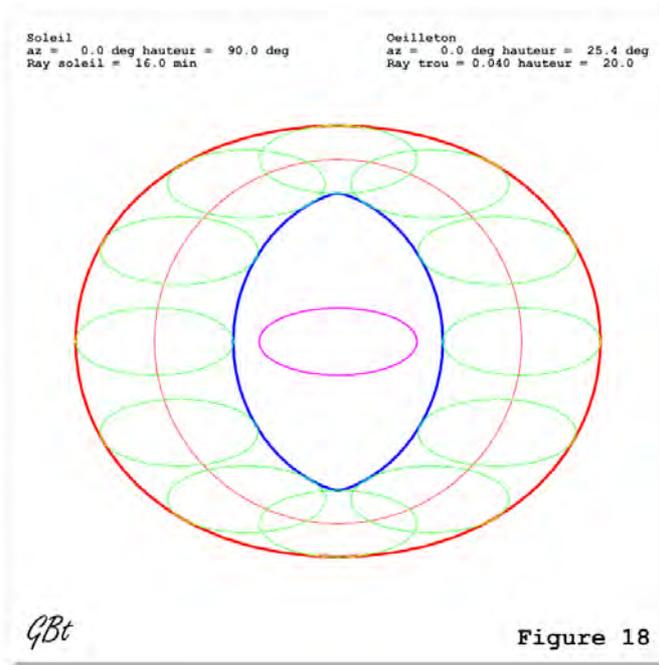


Figure 18

Pour cette inclinaison la courbe bleue présente deux angles vifs en haut et en bas. Ce phénomène est causé par l'égalité des rayons de courbures de la courbe magenta à l'intersection avec l'axe verticale et du rayon de courbure du cercle rouge du soleil.

Voir les symboles au paragraphe Erreur : source de la référence non trouvée
rappel de la formule qui donne le rayon de courbure d'une ellipse :

$$R = \left(\frac{a^2}{b}\right) \times [1 - (e^2 \times \cos(t)^2)]^{3/2}$$

dans notre cas $t = 90^\circ$ la formule devient alors :

$$R = \frac{a^2}{b}$$

en remplaçant b par sa valeur

$$R = \frac{a}{\cos(i)}$$

le rayon de courbure du soleil vaut : $rsol = d \times \tan(rs)$

Valeur de l'inclinaison:

il faut :

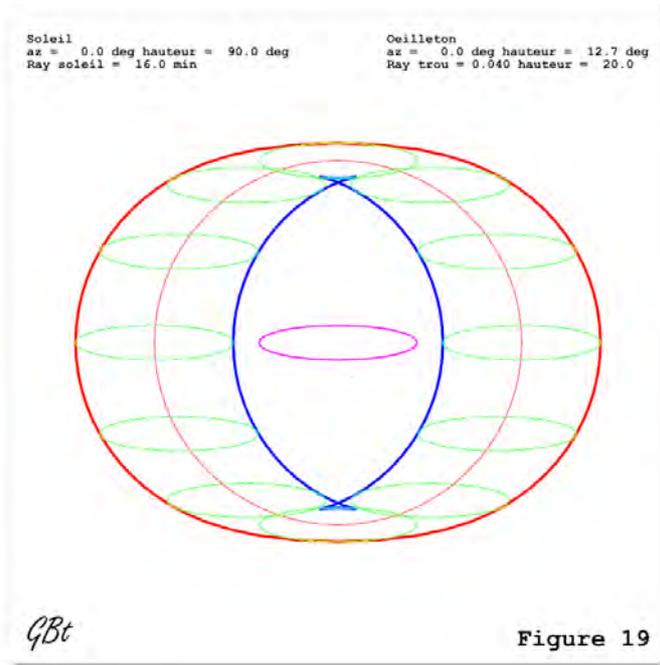
$$a < d \times \tan(rs)$$

$$i = \arccos\left(\frac{a}{d \times \tan(rs)}\right)$$

et $h =$ hauteur angulaire de la normale à l'écran sur l'horizon $h = 90 - i$

Il semble qu'il n'y a que cette inclinaison caractéristique

.....4.4 **Autre inclinaison**



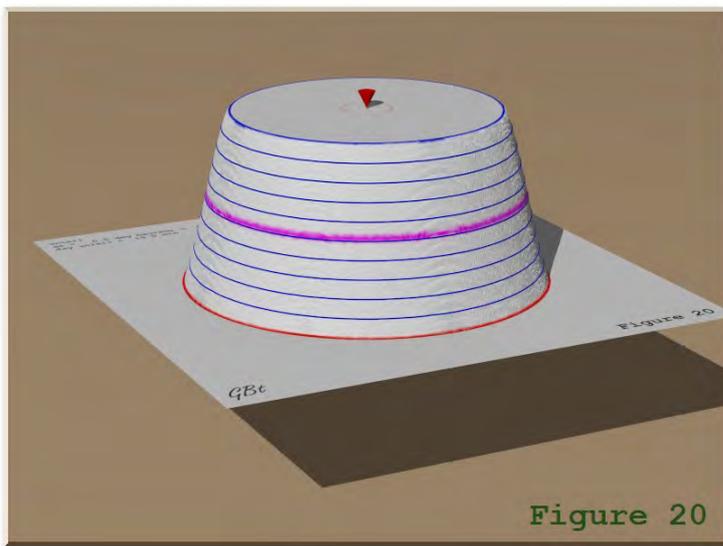
Pour des hauteur plus faible on retrouve le croisement de la courbe bleue et les points de rebroussement avec les même caractéristique que celles définies au paragraphe 3.4.

5 Éclairement de la tache

L'étude de l'éclairement de la tache utilise des fonctions du logiciel POV-RAY, mais elle pourrait être conduite par intégration numérique.

.....5.1 **Éclairement avec un gros trou**

.....5.1.1 **Écran perpendiculaire**



La figure 20 représente l'éclairement de la tache dans les conditions du paragraphe :

[Erreur : source de la référence non trouvée Erreur : source de la référence non trouvée Ecran perpendiculaire Erreur : source de la référence non trouvée]

Les coordonnées horizontales sont identiques, la coordonnée verticale représente l'éclairement de la tache.

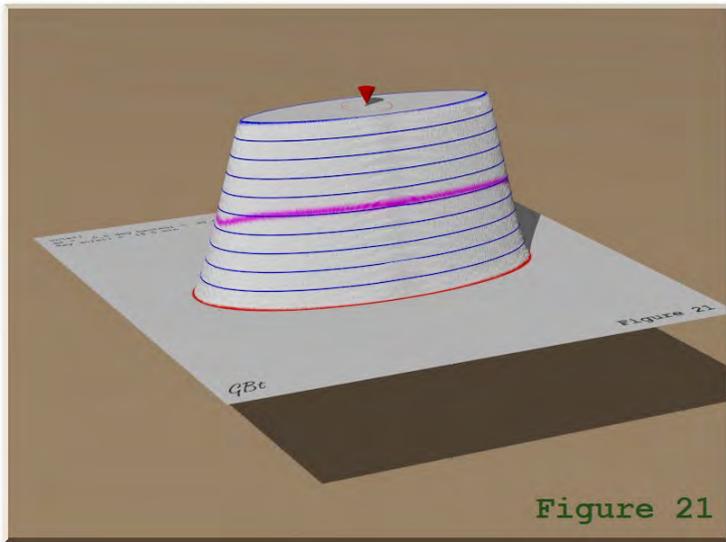
Les courbes de la figure 10 du paragraphe Erreur : source de la référence non trouvée sont

représentées sur la figure 20 . elle définissent de la même manière les zone à éclairage constant et la pénombre.

Les courbes de « niveaux » bleues représente les niveau constant d'éclairement. Le niveau maximum possible d'éclairement est divisé de manière régulière en 10 parties.

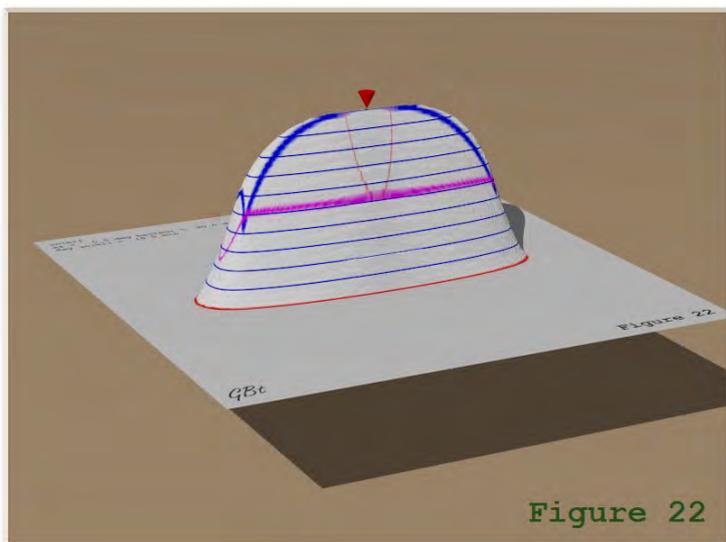
.....5.1.2 **Première inclinaison caractéristique**

Sur la figure 21 on retrouve l'éclairement avec les paramètres du paragraphe :
[3.3 Première inclinaison caractéristique (23,2°)]

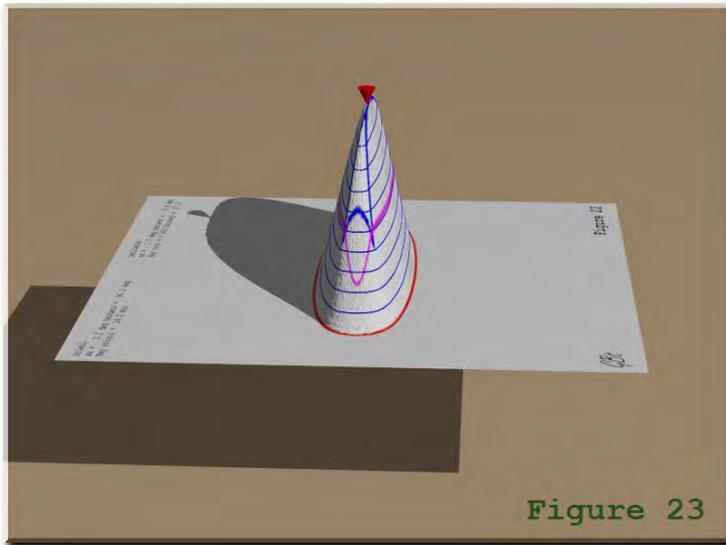


.....5.1.3 **Deuxième inclinaison caractéristique**

Sur les figure 22 et 23 (ci dessous deux vues sous des angles différents) on retrouve l'éclairement avec les paramètres du paragraphe :
[3.5 Deuxième inclinaison caractéristique (8,9°)]

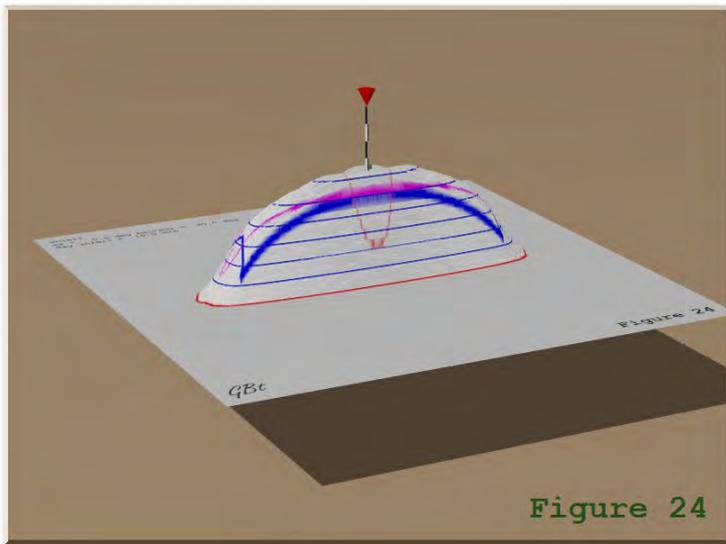


Pour cette inclinaison on obtient un point, au centre de l'image, avec un éclairage maximum.



.....5.1.4 **Inclinaison importante**

Sur la figure 21 on retrouve l'éclairement avec les paramètres du paragraphe :
[3.6 Dernière inclinaison (4,5°)]

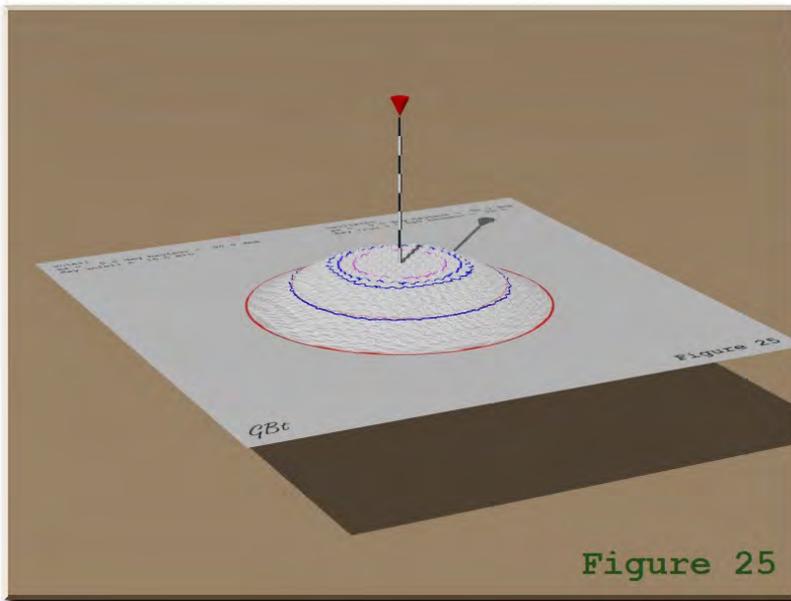


La « tige » qui dépasse au milieu et vers le haut est aussi gradué en dixième de l'éclairement maximum possible par des alternances noires et blanches.

.....5.2 **Éclairement avec un petit trou**

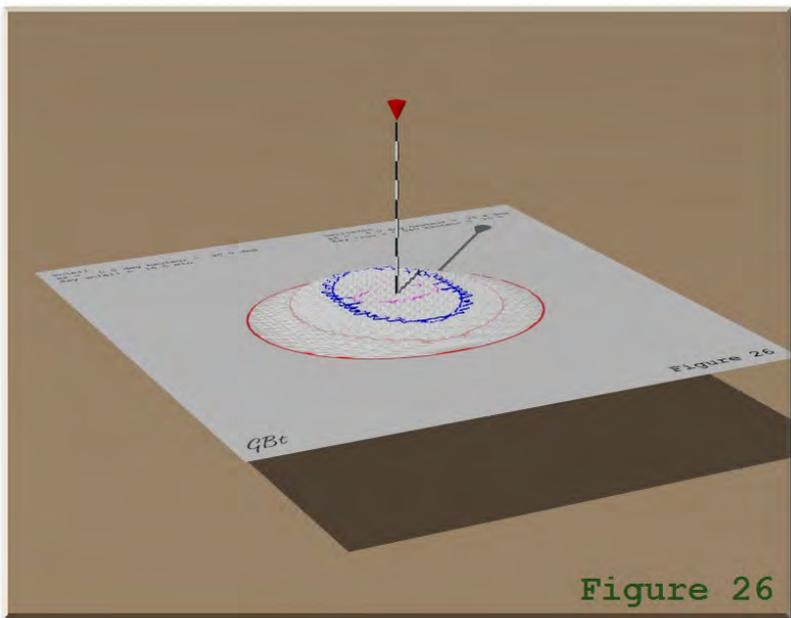
.....5.2.1 **Écran perpendiculaire**

La figure 25 est réalisée dans les conditions du paragraphe [4.1]



La « rugosité » de la surface vient du la fonction du logiciel qui simule le soleil, une surface plus « lisse » nécessite un temps de calcul prohibitif.

.....5.2.2 **Inclinaison caractéristique**

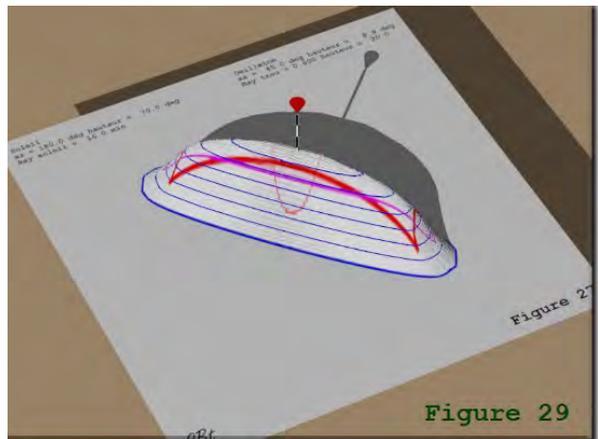
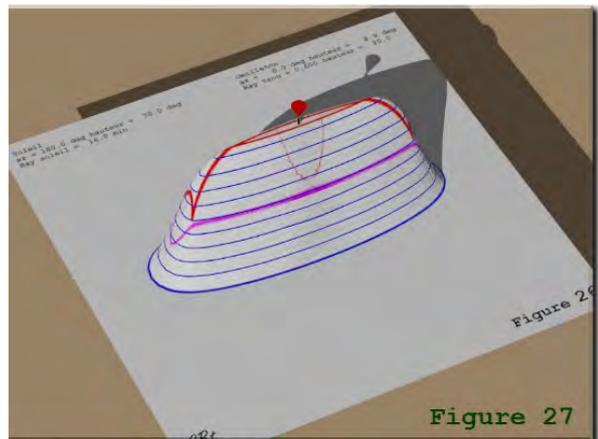
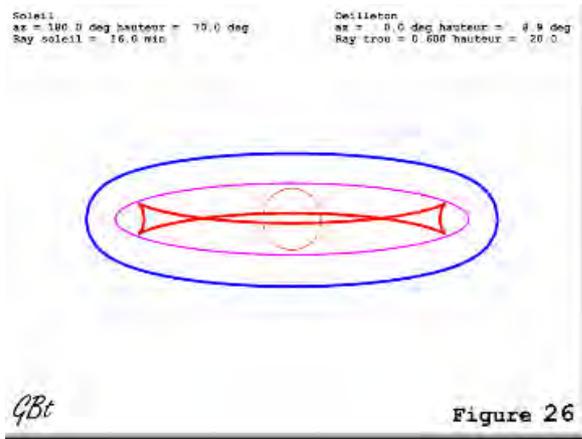


L'inclinaison de l'écran est identique à celle définie au paragraphe :
[4.3 Inclinaison caractéristique (25,4°)]

.....5.3 **Eclairage avec une position quelconque du soleil.**

Voir les page suivante:

Figures 26, 27,28,29.



ATTENTION: Des problèmes de lecture des formules mathématiques peuvent survenir à l'écran:

- a) Cliquez sur la formule, ou
- b) Reportez vous à la version sous pdf, ou
- b) reportez vous aux versions originales dans l'annexe



RECHERCHES THÉORIQUES : 3 - OEILLETON ET FAMILLES DE COURBES

Gérard Baillet

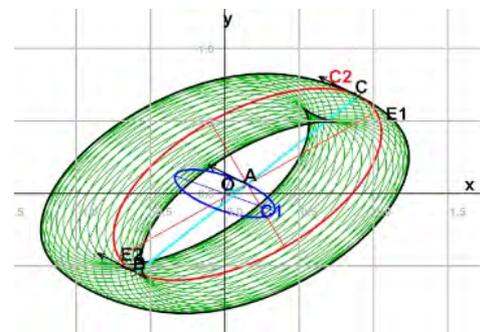
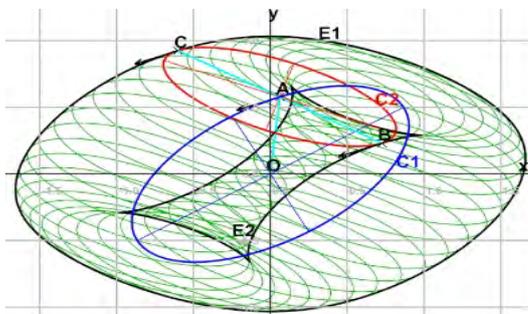
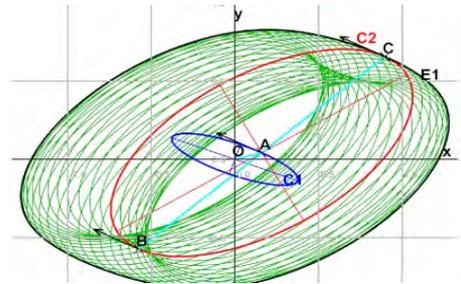
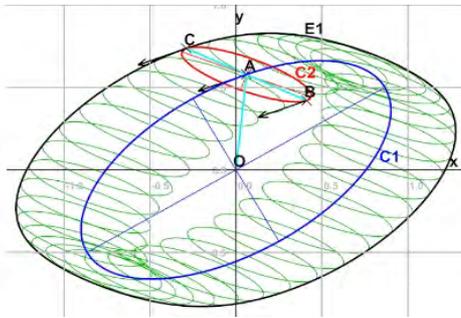
Le problème de l'enveloppe de familles de courbes part de l'étude de la forme de la tache de lumière donnée par une source de lumière étendue au travers d'un trou circulaire percé dans un écran.



Détail des points abordés:

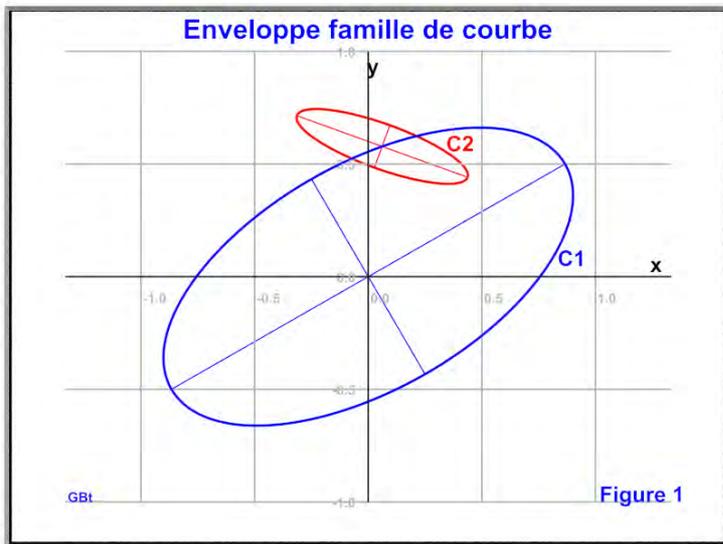
Enveloppe de famille de courbes

- 1 Définition du problème traité
- 2 Les formules utilisées
 - 2.1 L'ellipse
 - 2.2 La tangente à l'ellipse
 - 2.3 Exemple d'utilisation des formules
- 3 Enveloppe de la famille de courbes
 - 3.1 Principe
 - 3.2 Courbes enveloppes
 - 3.3 Point remarquable
- 4 Quelques exemples de forme



6 Définition du problème traité

Le problème traité part de l'étude de la forme de la tache de lumière donnée par une source de lumière étendue au travers d'un trou circulaire percé dans un écran.



Éléments de départ :

une ellipse fixe c1 avec :

demi grand axe : a

demi petit axe : b

centre : $x=0$ et $y=0$

inclinaison du grand axe

sur l'axe x : ar

une ellipse mobile c2 avec :

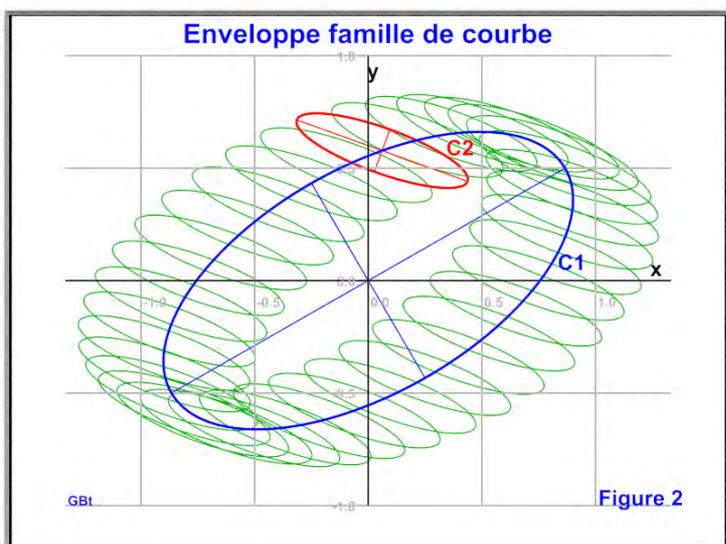
demi grand axe : a1

demi petit axe : b1

centre : se déplace sur le contour de l'ellipse c1

inclinaison du grand axe

sur l'axe x : ar1



Nous chercherons la ou les enveloppes de la familles des courbes c2. La figure 2 donne un aspect "limité" de la famille des courbes c2 (en vert sur la figure).

7 Les formules utilisées

.....7.1 L'ellipse

Avec :

a = demi grand axe

b = demi petit axe

t = angle variant de 0° à 360°

ar = inclinaison du grand axe sur l'axe x

xd = abscisse du centre de l'ellipse

yd = ordonnée du centre de l'ellipse

On calcul successivement :

$$xe = a \times \cos(t)$$

Formule 1/a

$$ye = b \times \sin(t)$$

Formule 1/b

xt et yt coordonnées d'un point du périmètre de l'ellipse

$$xt = xe \times \cos(ar) - ye \times \sin(ar) + xd$$

Formule 1/c

$$yt = ye \times \cos(ar) + xe \times \sin(ar) + yd$$

Formule 1/d

.....7.2 La tangente à l'ellipse

At= Angle entre la tangente à l'ellipse et l'axe des abscisses pour une valeur de t.

$$at = \text{atan2}(b \times \cos(t), -a \times \sin(t)) + ar$$

Formule 2

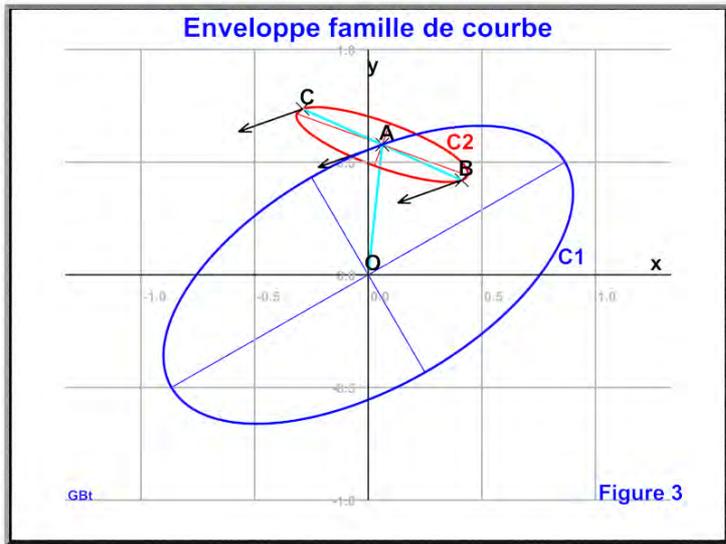
Nota : **atan2(u,v)** donne l'arc tangente de u/v avec un résultat compris entre 0° et 360°

Calcul de la valeur de t pour une valeur connue de l'angle de la tangente at.

$$t = \text{atan2}\left(\frac{b}{a}, \tan(at - ar)\right)$$

Formule 3

.....7.3 Exemple d'utilisation des formules.



Voici (figure 3) un exemple d'utilisation des formules précédentes. Et ci dessous le fichier de données créé par le logiciel qui donne la figure 3.

Début du fichier *****

Enveloppe de famille de courbes

ELLIPSES

L1/ ellipse 1 a = 1.0 b = 0.5 ar = 30.0 deg

L2/ ellipse 2 a1 = 0.4 b1 = 0.1 ar1 = -20.0 deg t (ellipse1) du centre 70 deg

L3/ Centre ellipse 2 (A) x = 0.061275 y = 0.577909

L4/ Angle tangente ellipse 1 en A 199.686 deg

L5/ t de ellipse 2 pour même tangente t = -16.7664 deg

L6/ Verif angle tangente en B = 19.6859 deg ou avec +180 = 199.686deg

L7/ position du point B x = 0.411307 y = 0.419809

L8/ t de ellipse 2 pour même tangente t = 163.234 deg

L9/ Verif angle tangente en C = 199.686 deg ou avec -180 = 19.6859deg

L10/ position du point C x = -0.288757 y = 0.736008

Fin du fichier *****

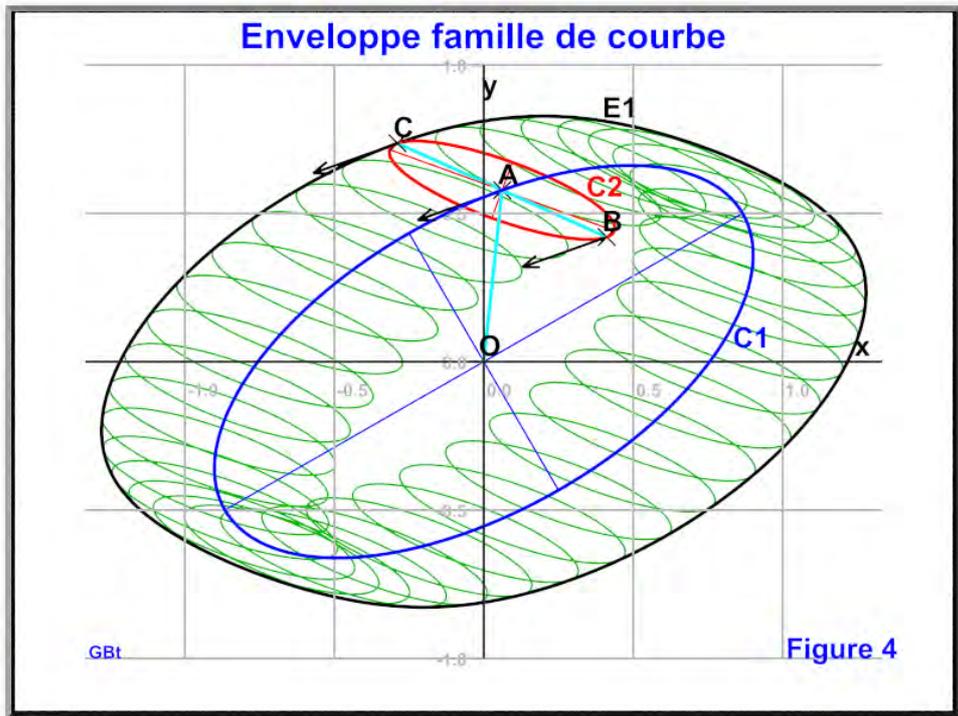
démarche utilisée :

en L3 application des formules 1 avec l'ellipse 1 et t défini en L2

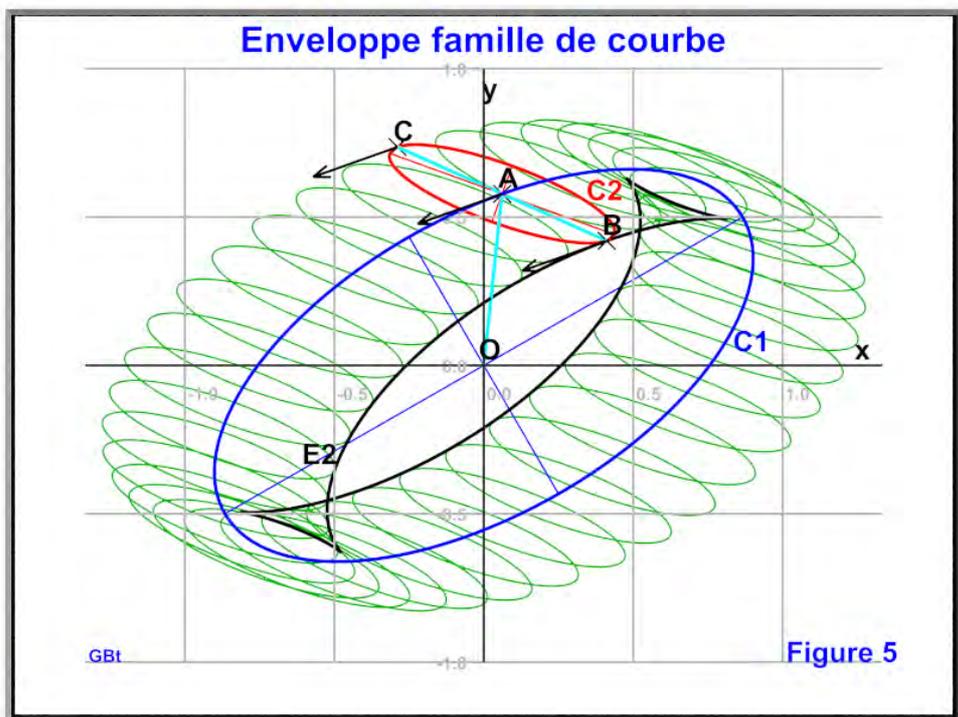
en L4 application de la formule 2 avec l'ellipse 1 et t défini en L2

en L5 application de la formule 3 avec l'ellipse 2 et at défini en L4

en L6 application de la formule 2 avec l'ellipse 2 et t défini en L5 (vérification égalité



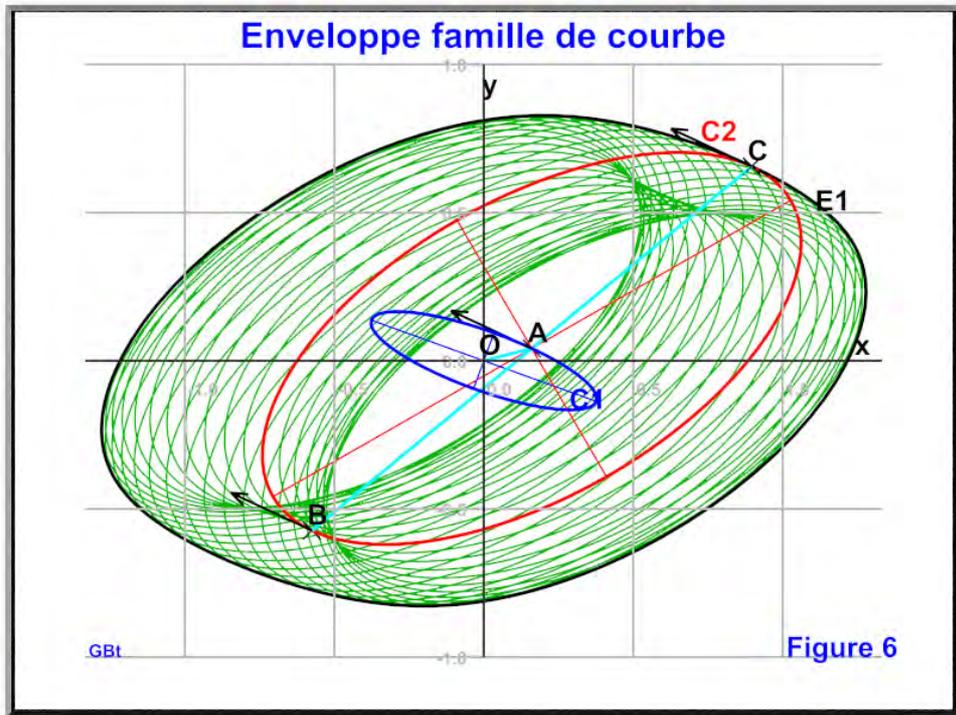
E1 enveloppe externe



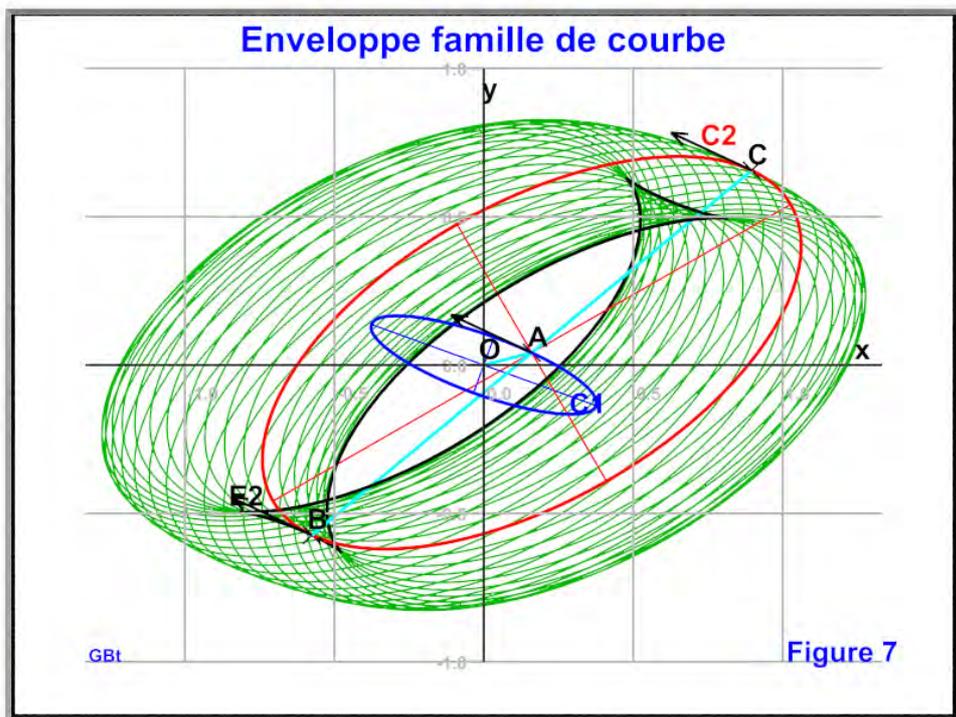
E2 enveloppe interne

.....8.3 Point remarquable

En inversant les rôles des ellipse 1 et 2 on trouve exactement les mêmes enveloppes, voir les figure 5 et 7 ci dessous.

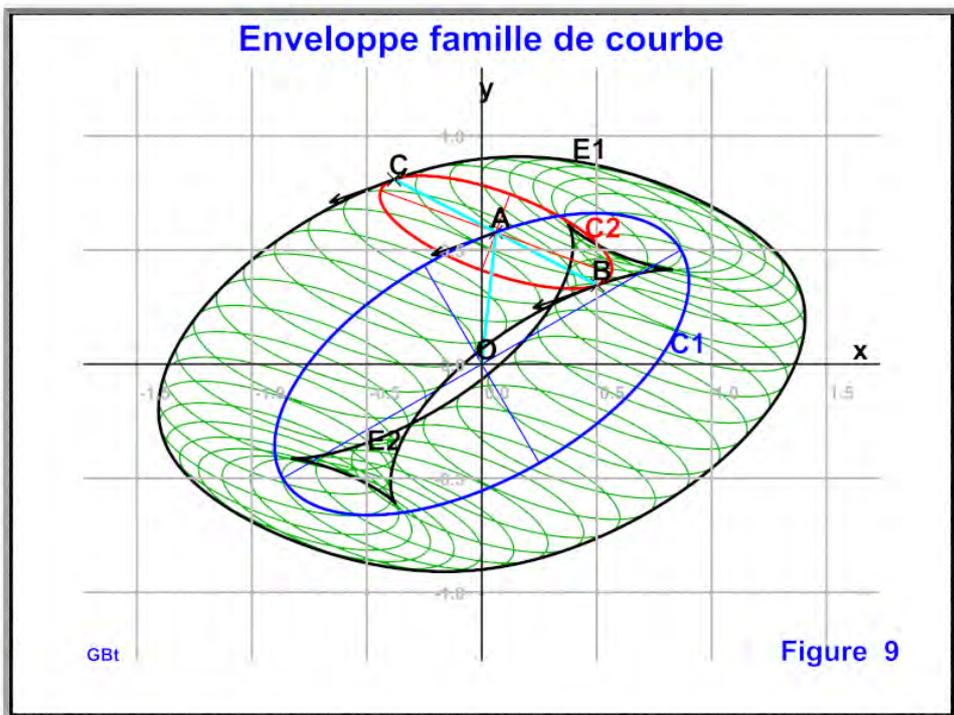
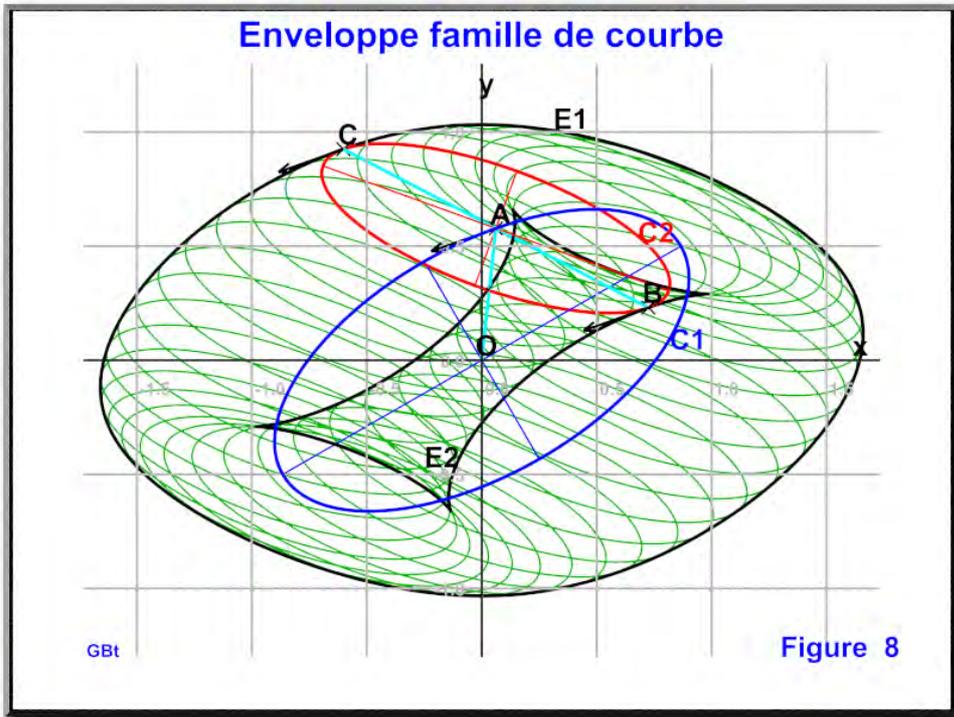


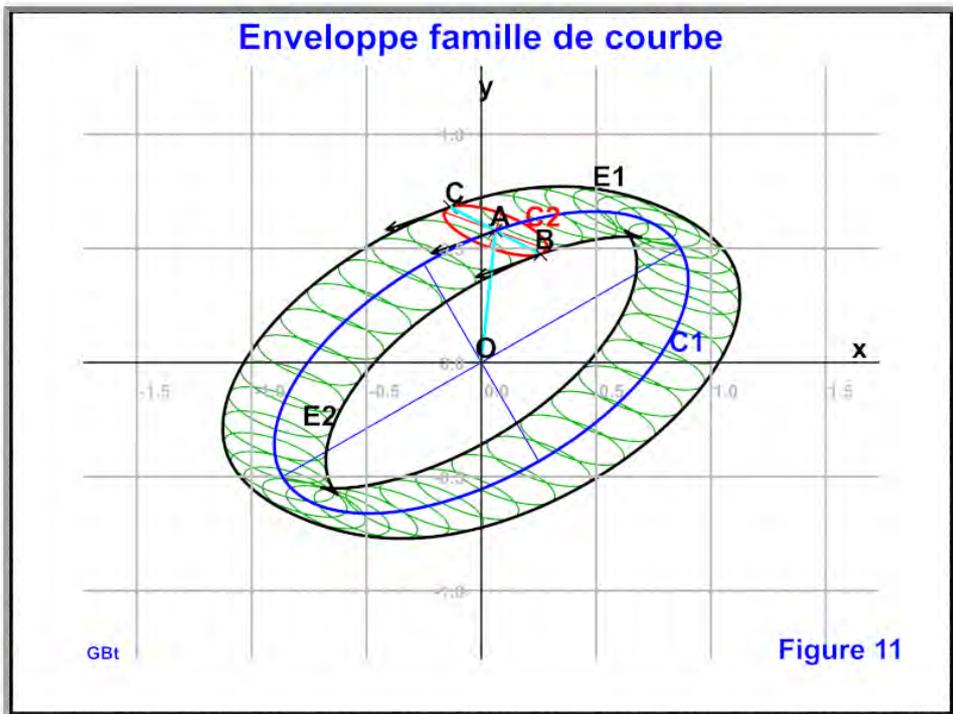
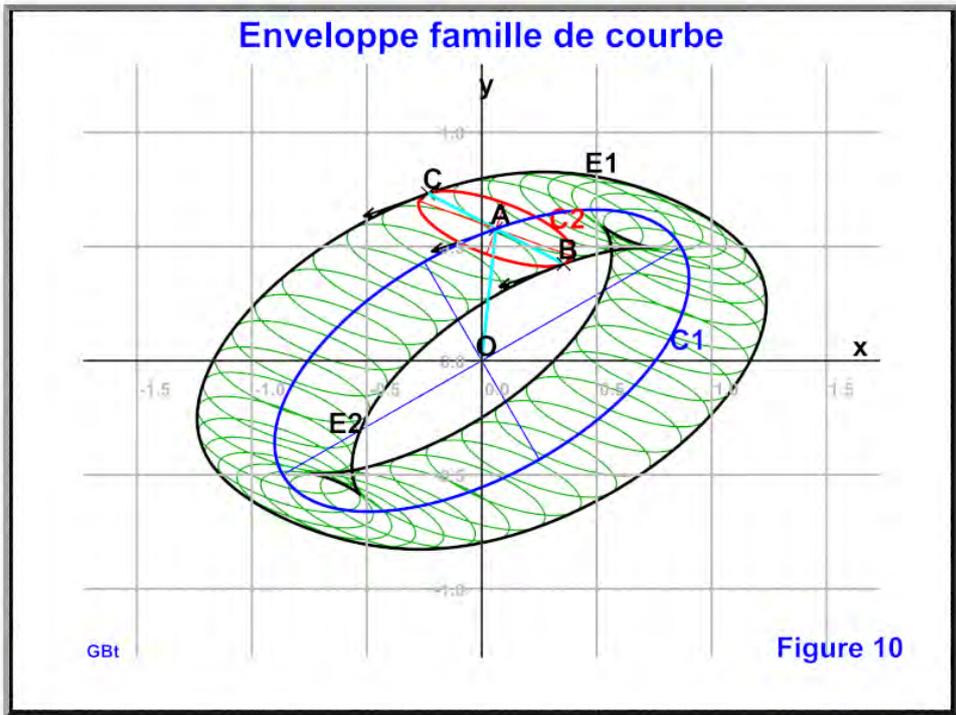
Enveloppe externe

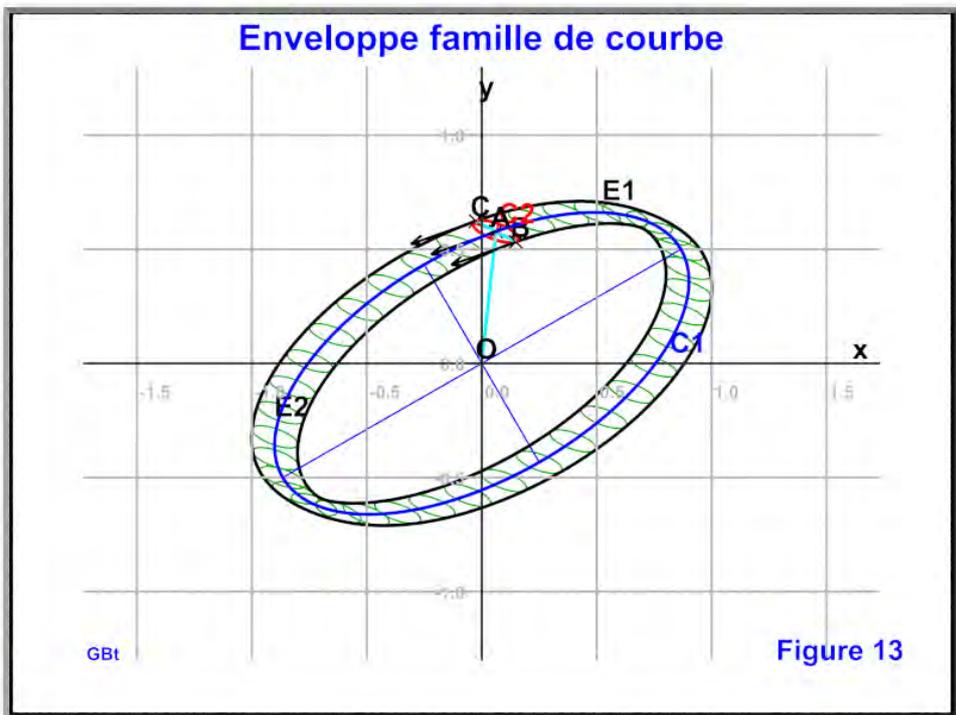
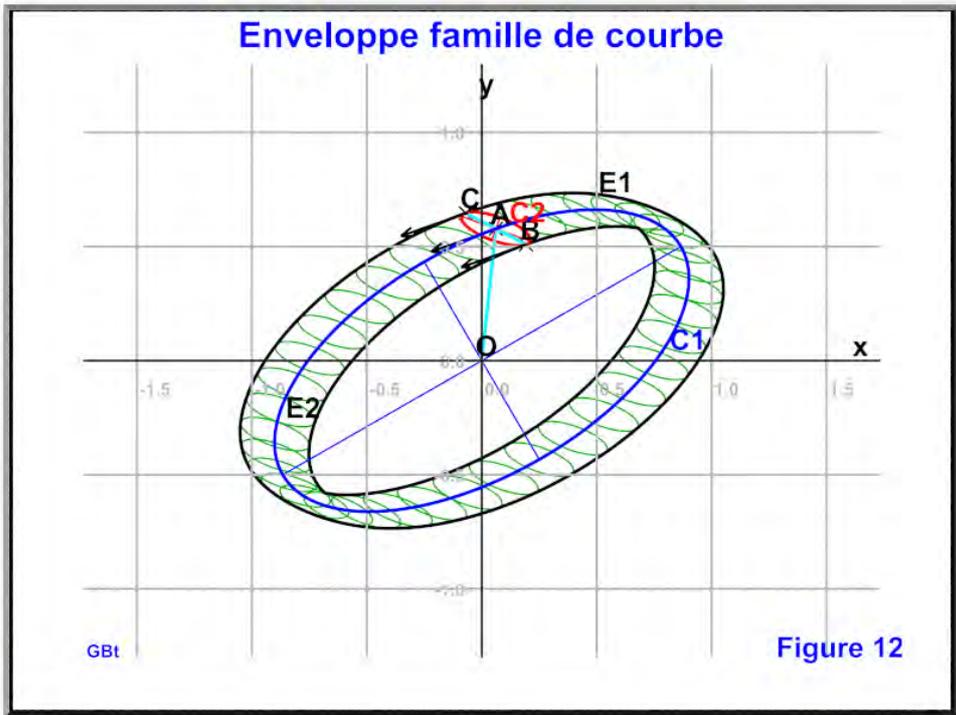


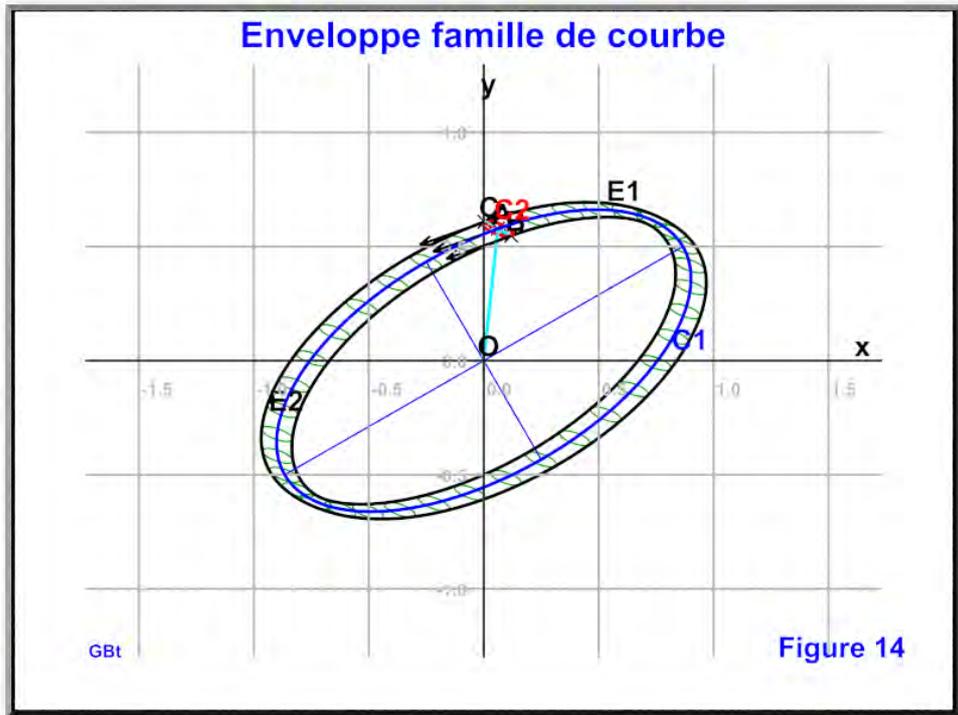
enveloppe interne.

9 Quelques exemples de forme

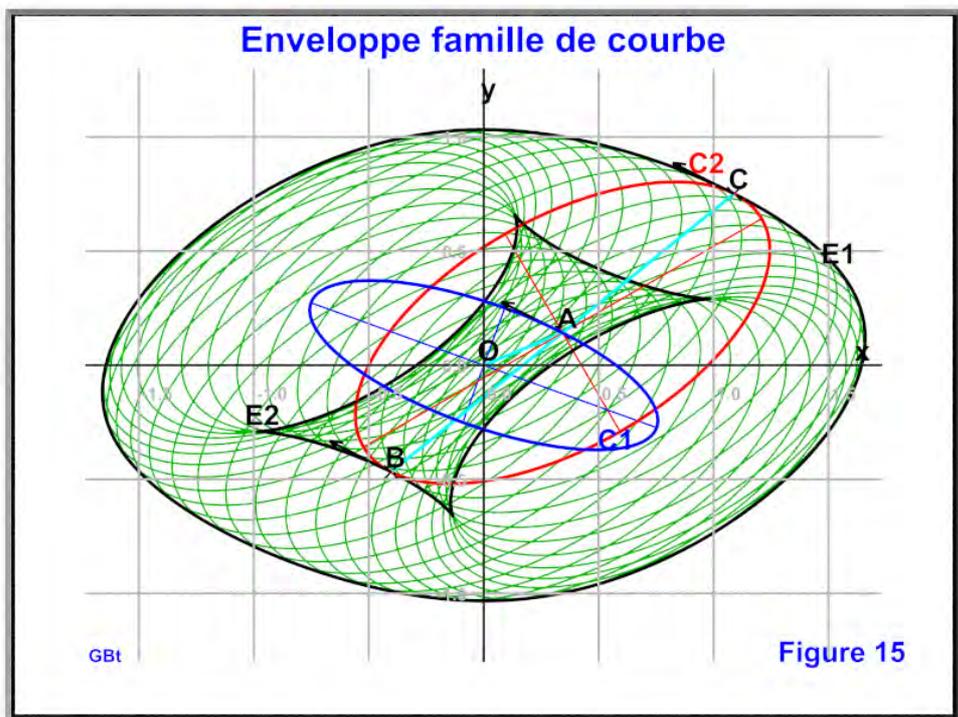


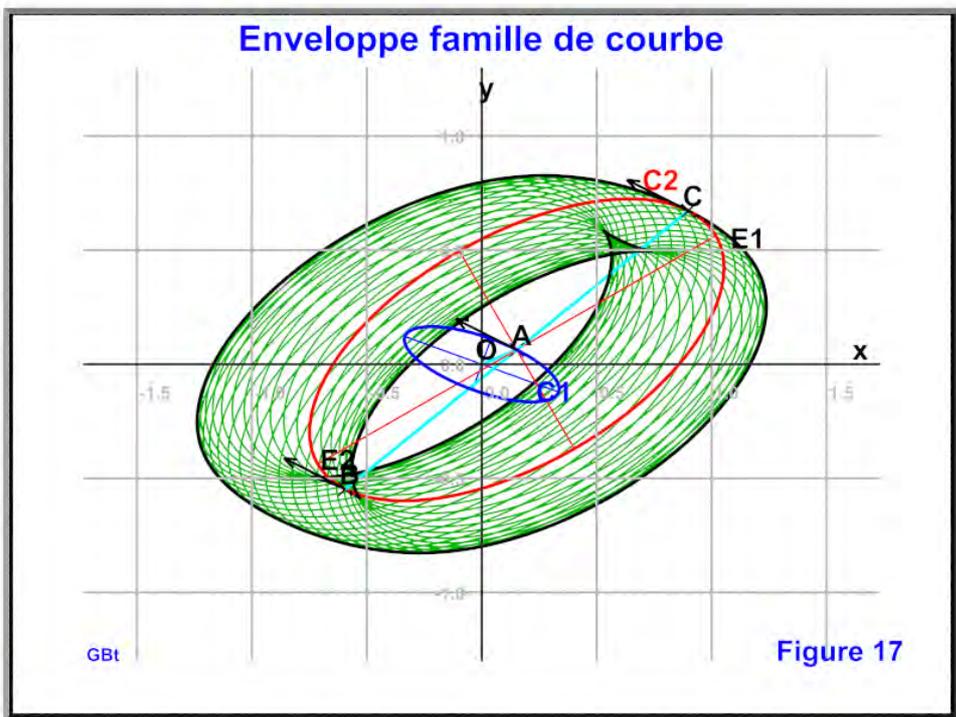
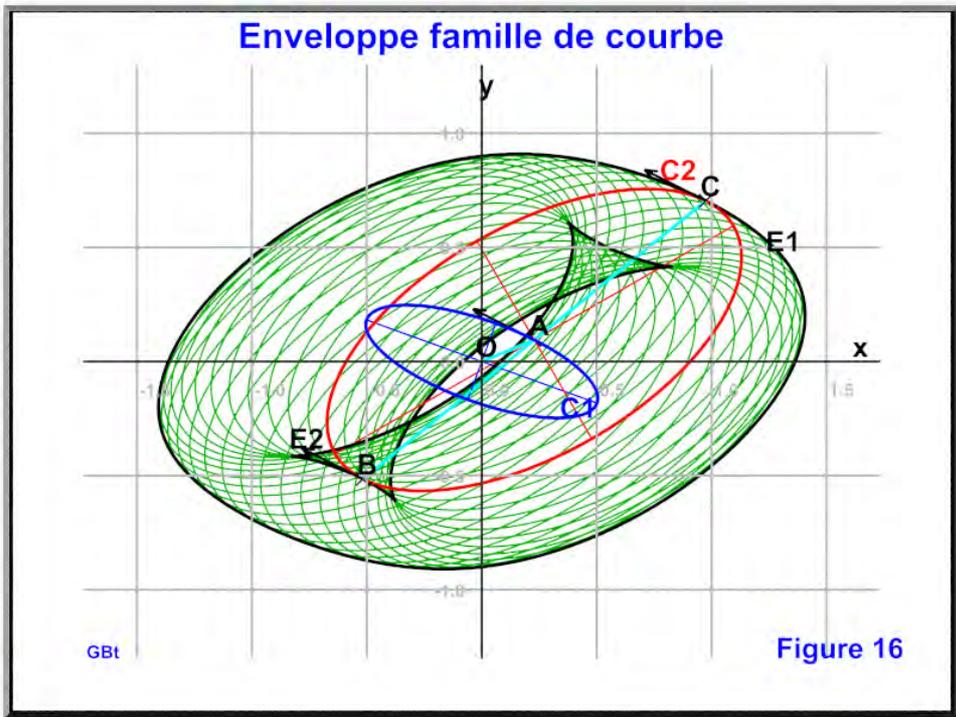


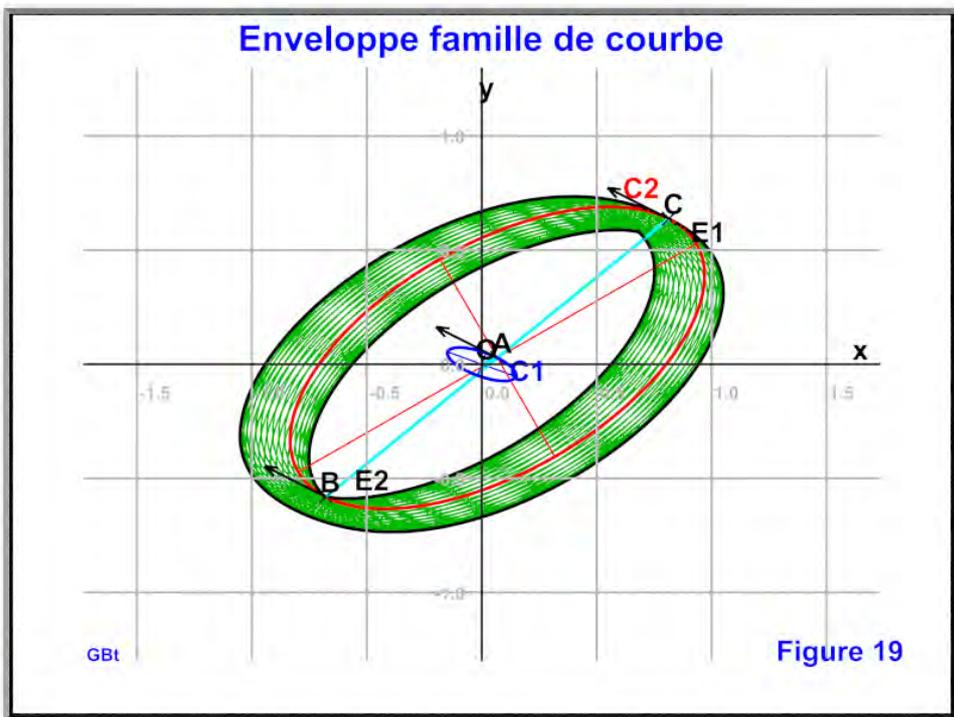
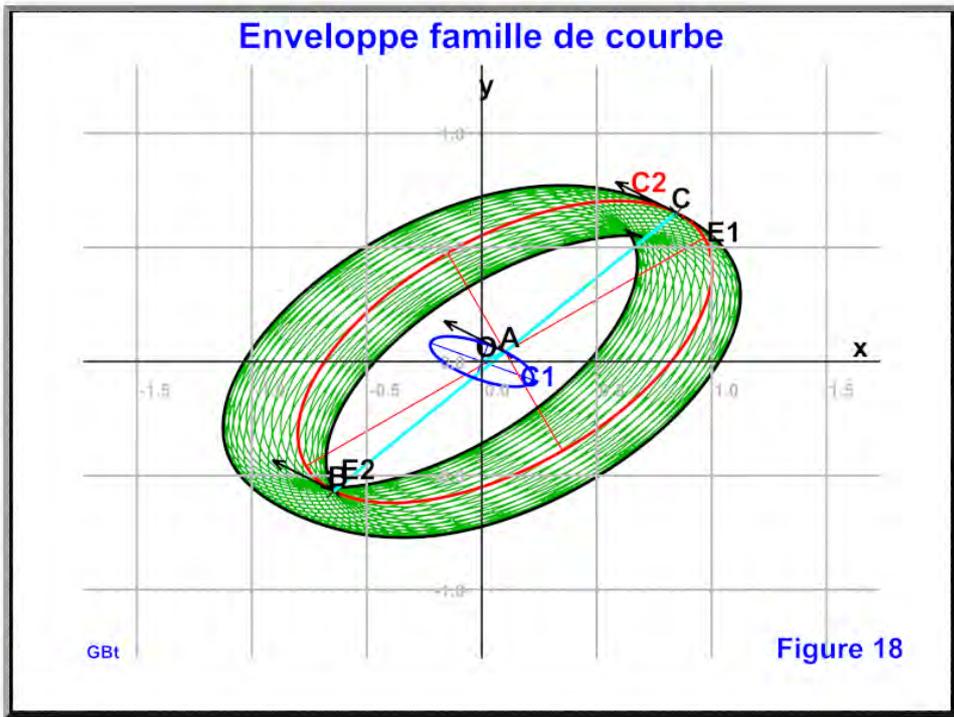


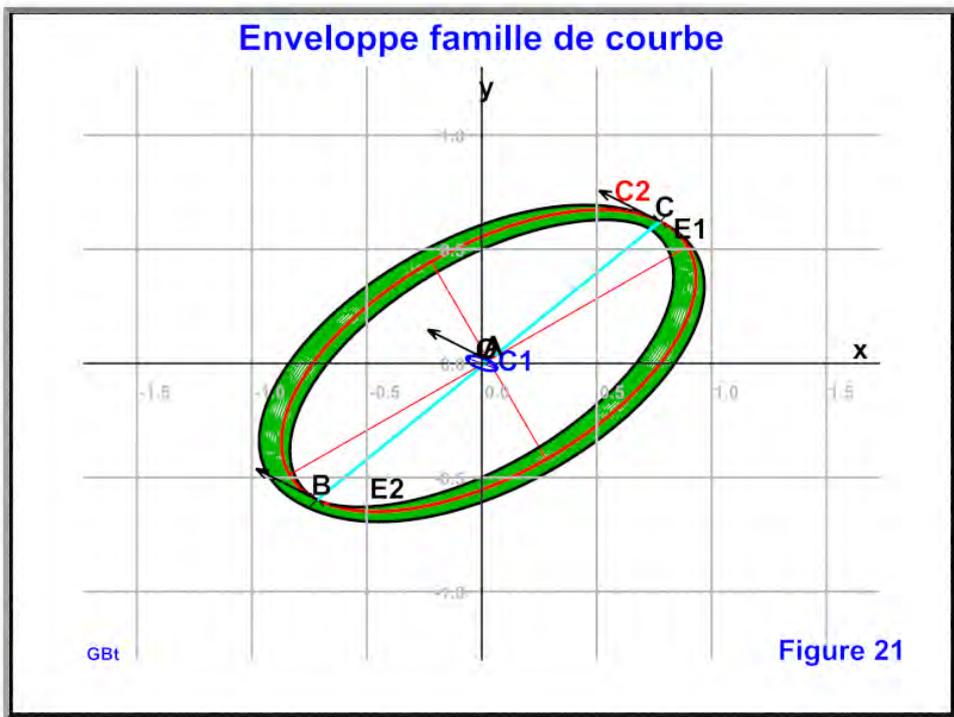
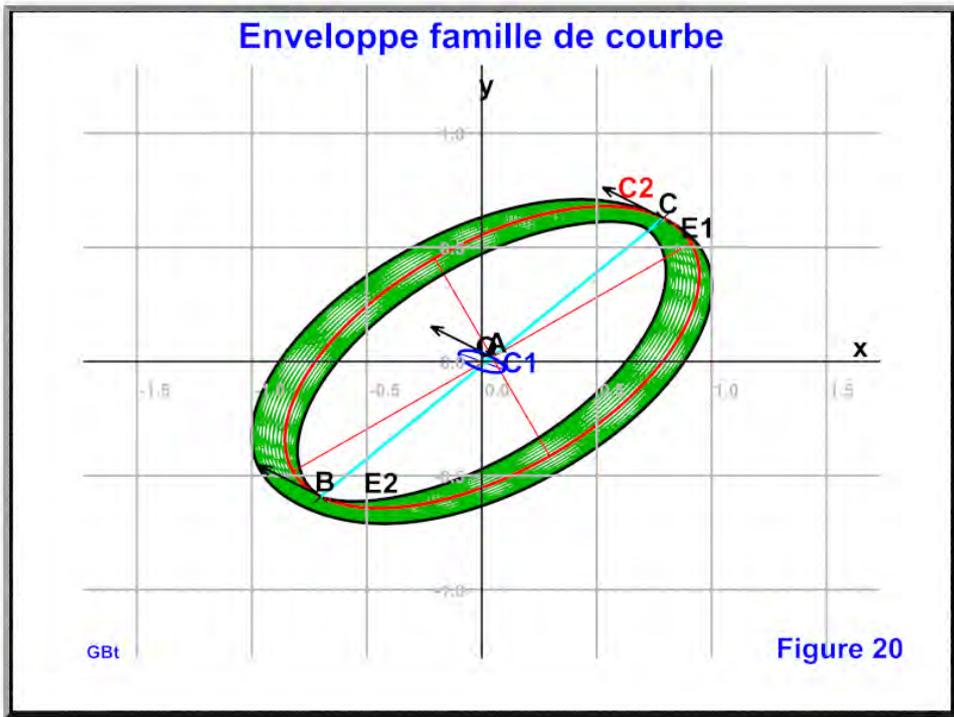


Même valeurs mais avec inversion des deux ellipses









RECHERCHES THÉORIQUES : 4 - OEILLETON ET ELLIPSE

Gérard Baillet

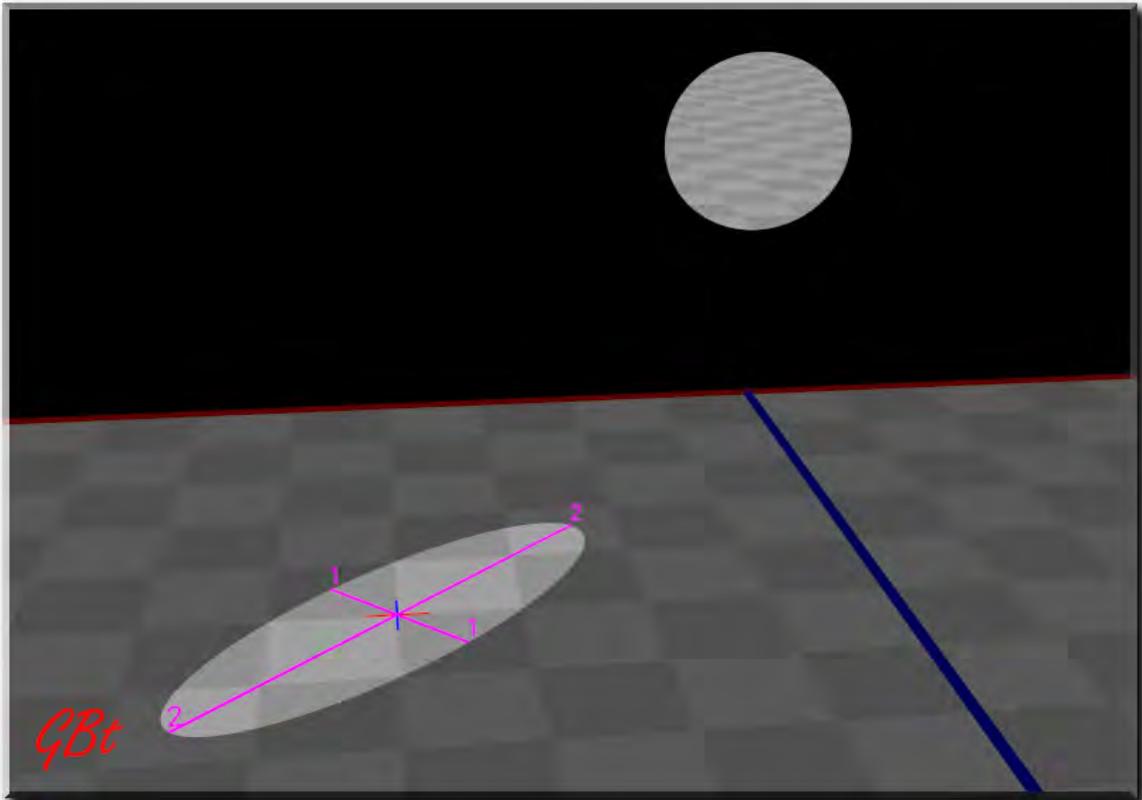
Dans cette étude est abordée les éléments de l'ellipse projetée par un œillette, à savoir: la longueur du grand axe et du petit axe et l'orientation des axes de l'ellipse par rapport aux axes du plan horizontal.



Détail des points abordés:

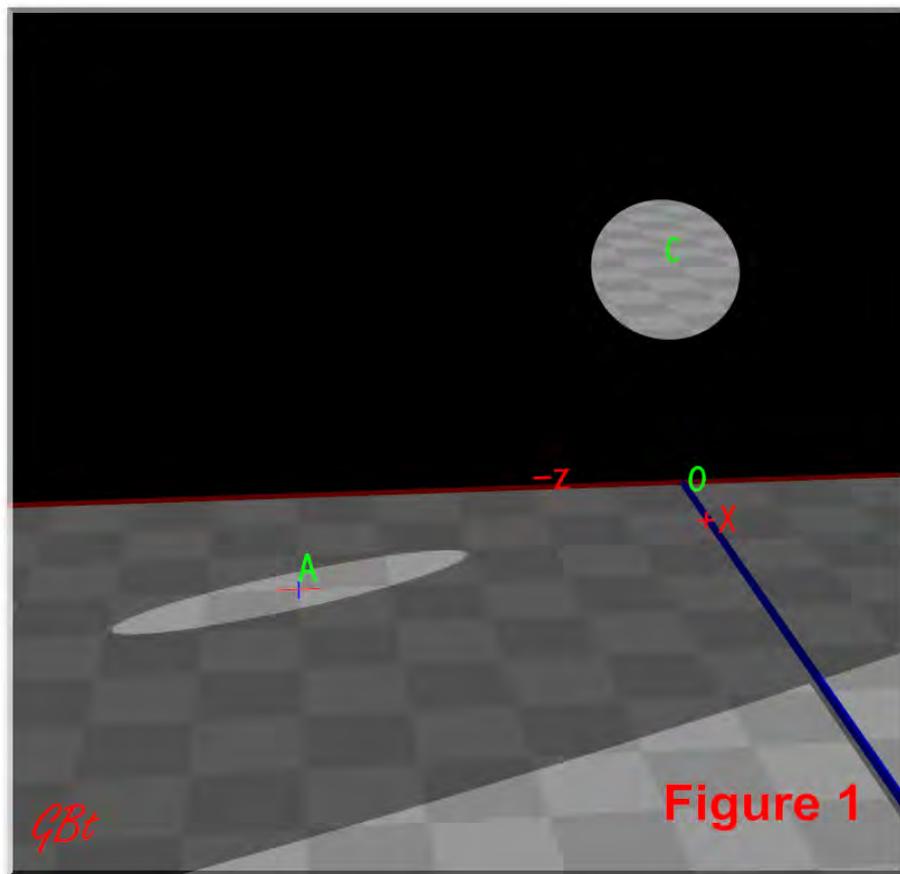
Éléments de l'ellipse projetée

- 1 Définition du problème traité
- 2 Mise en place des éléments du calcul
- 3 Calcul d'un rayon de l'ellipse
- 4 Position des axes de l'ellipse
 - 4.1 Calcul des demi-axes
 - 4.2 calcul de l'orientation des axes
 - 4.3 Exemple numérique
- 5 Conclusion



10 Définition du problème traité

Les éléments de départ sont (figure 1):



Un plan horizontal P1(damier blanc/gris)

Un plan incliné sur la verticale P2 (noir) percé d'un trou de centre C

Le trou est éclairé par une source ponctuelle à l'infini

La lumière passant par le trou C forme une tache elliptique centrée en A

La direction de la source de lumière est définie par les positions de A et du centre C du trou.

Pour simplifier les calculs on prendra l'axe z à l'intersection des deux plans

L'axe x est perpendiculaire à z dans le plan horizontal

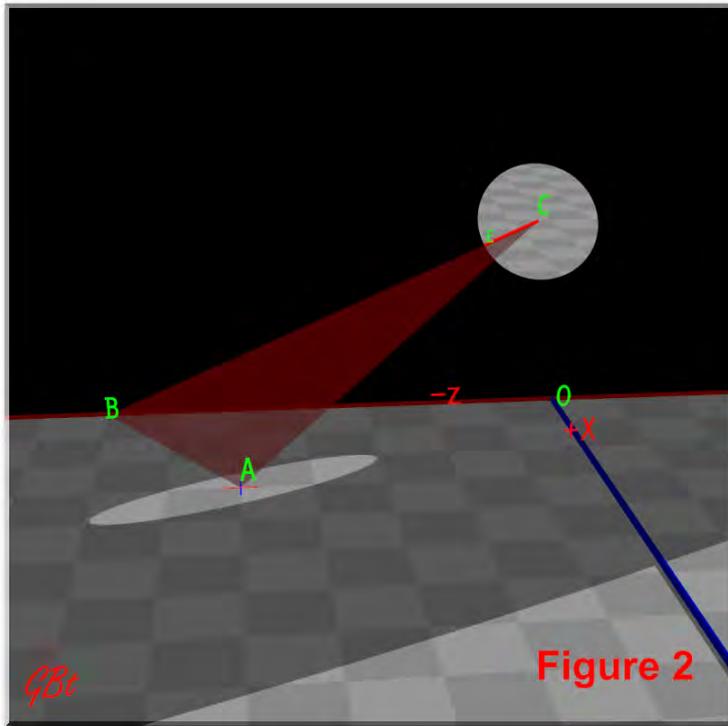
L'axe y est vertical, positif vers le haut

Dans le cas général on pourra toujours retrouver cette configuration par un changement d'axe.

Éléments recherchés :

- La longueur du grand axe et du petit axe
- L'orientation des axes de l'ellipse par rapport aux axes du plan horizontal

11 Mise en place des éléments du calcul



Choisir un rayon CE du trou, puis définir un plan PL contenant la direction CE et le point A. Ce plan coupe l'axe Z en B. On notera que CA et la direction de la source de lumière.

Sur la figure 2 ci contre le plan est représenté avec une couleur rouge transparente et il est limité au triangle ABC.

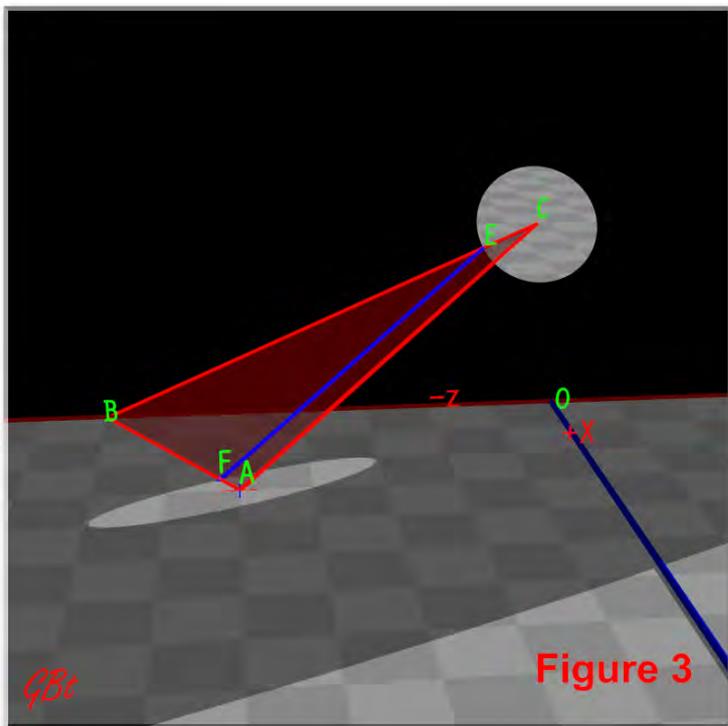


Figure 3

La figure est complétée par le dessin du triangle ABC et par la projection du point E en F sur le plan horizontal et suivant la direction de la lumière.

F est à la limite de l'ellipse.

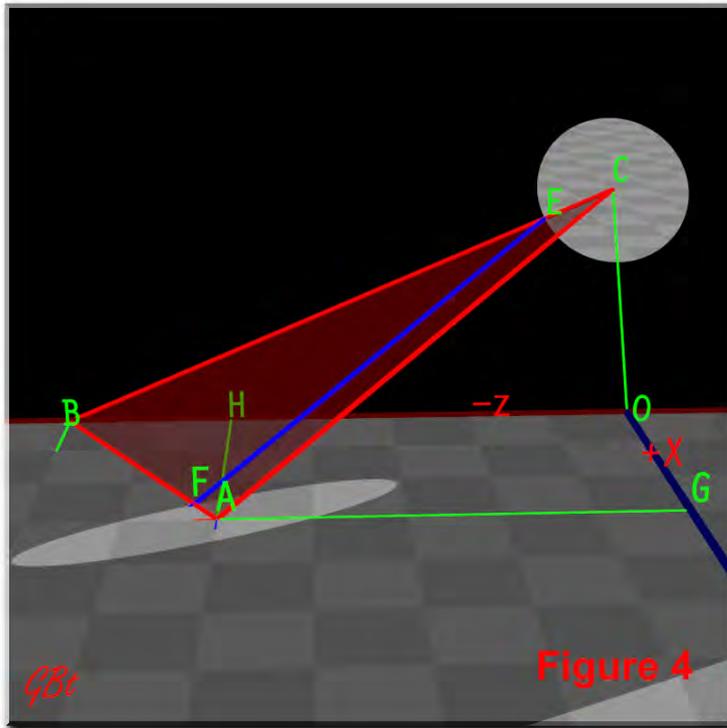
Le point E étant dans le plan PL,

EF est parallèle à AC (direction de la lumière par définition)

EF est dans le plan PL

F est donc sur la droite AB

12 Calcul d'un rayon de l'ellipse



Les droites BC et BA sont coupées par deux droites parallèles EF et CA.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BA}{FA} = \frac{BC}{EC}$$

en posant le rayon du cercle :

$$EC = 1$$

$$FA = \frac{BA}{BC}$$

formule 1

Éléments connus :

4. Angle d'inclinaison de P2 sur la verticale : ang on a : $\text{ang} = 90 - \widehat{COG}$
5. La longueur OC (OC est perpendiculaire à l'axe Z à l'origine et contenu dans le plan P2)
6. Les coordonnées de A : OG et OH
7. La Position de B sur l'axe Z (on prend ce paramètre plutôt que l'angle \widehat{OCE} pour simplifier les écritures)

$$FA = \sqrt{\frac{(OB - OH)^2 + OG^2}{OB^2 + OC^2}}$$

formule 2

Dans cette formule la variable est OB

Remarque importante :

La position de F est indépendante de l'angle ang donc la forme et l'orientation de l'ellipse ne varie pas avec l'inclinaison de P2.

13 Position des axes de l'ellipse

SI je fais varier OB, FA passera par un minimum quand il sera confondu avec le petit axe et par un maximum lorsqu'il sera confondu avec le grand axe. Dans un premier temps nous allons rechercher les valeurs de OB qui donnent des extremum pour FA.

Pour simplifier l'écriture

je pose :

$$\boxed{FA^2=y} \text{ et } \boxed{OB=x}$$

la formule 2 devient :

$$\boxed{y = \frac{(x - OH)^2 + OG^2}{x^2 + OC^2}} \quad \text{Formule 3}$$

On recherche les valeurs de x qui annulent la dérivée. Cette dérivée se présente sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est toujours positif il faut chercher à annuler le numérateur que j'appelle N

$$\boxed{N=OH \cdot x^2 + (OC^2 - OH^2 - OG^2) \cdot x - OH \cdot OC^2} \quad \text{formule 4}$$

On pose :

$$\boxed{a = OH}$$

$$\boxed{b = OC^2 - OH^2 - OG^2}$$

$$\boxed{c = -OH \cdot OC^2}$$

la formule 4 devient :

$$\boxed{N = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$$

et les solutions sont :

$$\boxed{OB1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}} \quad \text{formule 5}$$

$$\boxed{OB2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}} \quad \text{formule 6}$$

.....13.1 Calcul des demi-axes

En portant les résultats obtenus par les formules 5 et 6 dans la formule 2 on obtient les deux longueurs des demi-axes.

$$ax1 = \sqrt{\frac{(OB1 - OH)^2 + OG^2}{OB1^2 + OC^2}}$$

Formule 7

$$ax2 = \sqrt{\frac{(OB2 - OH)^2 + OG^2}{OB2^2 + OC^2}}$$

Formule 8

.....13.2 calcul de l'orientation des axes

Calculons l'inclinaison des deux axes sur l'axe Z. En fait les axes étant perpendiculaires une seule inclinaison suffit. Dans un but de vérification on calcule les deux inclinaisons et on vérifie que la différence vaut bien 90°.

$$incl1 = \arctan\left(\frac{OG}{OB1 - OH}\right)$$

Formule 9

$$incl2 = \arctan\left(\frac{OG}{OB2 - OH}\right)$$

Formule 10

Dans les systèmes de programmation on aura intérêt à utiliser la fonction atan2 qui donne un résultat entre 0° et 360°. En modifiant les formules on pourra utiliser une fonction acos qui donne un résultat entre 0° et 180°.

.....13.3 Exemple numérique

***** Début du fichier contenant les résultats*****

Calcul de l'ellipse

CE = 1.000

OG = 4.000

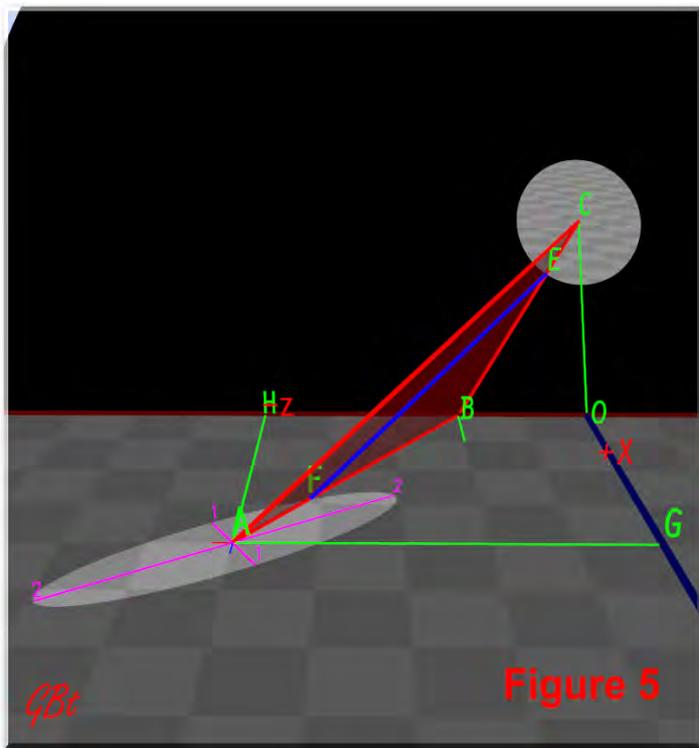
OH = -5.000

OC = 3.000

ang = 30.000

Position de B pour petit et grand axe

```
a = -5.000
b = -32.000
c = 45.000
determ = 43.863
OB1= -7.586
OB2= 1.186
Inclinaison des axes sur l'axe Z
incl1= 122.886 deg
incl2= 32.886 deg
dif= 90.000 deg
Valeurs des demi axes de l'ellipse
axe 1 = 0.584
axe 2 = 2.284 *****Fin du fichier*****
```



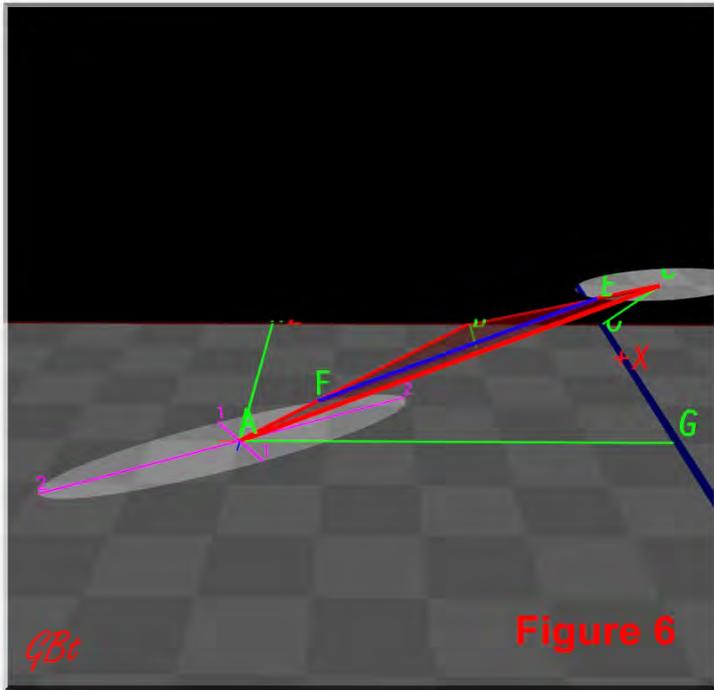
Voici figure 5 l'image obtenue avec les paramètres du fichier ci dessus.

Les axes de l'ellipse (couleur magenta) sont tracés à partir des valeurs du fichier.

*****Début du fichier contenant les résultats*****

```
Calcul de l'ellipse
CE = 1 .000
OG = 4.000
OH = -5.000
OC = 3.000
ang = -60.000
Position de B pour petit et grand axe
a = -5.000
```

```
b = -32.000
c = 45.000
determ = 43.863
OB1= -7.586
OB2= 1.186
Inclinaison des axes sur l'axe Z
incl1= 122.886 deg
incl2= 32.886 deg
dif= 90.000 deg
Valeurs des demi axes de l'ellipse
axe 1 = 0.584
axe 2 = 2.284
*****fin du fichier contenant les résultats*****
```



Par rapport à la figure 5 le plan 2 est basculé de $+30^\circ$ à -60° .

On voit que l'ellipse est exactement la même aussi bien par le calcul que sur l'image.

14 Conclusion

Dans le cas général les données connues sont :

- ° la direction du soleil
- ° les plans p1 est p2
- ° la position du trou

Il suffit de calculer la position du point A on est alors ramené au calcul décrit dans le document.





Nouvelle note sur le toroïde

Dominique Collin

*Les ocelles (ombre d'un disque parallèle au cadran horizontal) de M. Dallet sont exactement les toroïdes¹ que je décris ci-après et dont j'ai laborieusement déterminé l'équation. C'est une nouveauté je pense dans ce domaine. Au jour de rédaction de cet article, 31 octobre 2011, Il n'y a pas encore d'équation analytique des toroïdes déterminés par M. Baillet. J'y travaille, mais j'ai bien peur que cette fois-ci il faille se contenter de leur absence
J'ai intégré trois images qui ne sont pas de moi : deux sont de M. Dallet, une de M. Baillet.*

1. Introduction

A propos d'une note sur les divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes, et à la quadrature des surfaces², A. Cauchy cite le théorème n° 6 donnant l'aire comprise entre les deux enveloppes intérieure et extérieure, de l'espace parcouru par un cercle dont le centre se déplace sur un contour fermé et dont le rayon de courbure est toujours inférieur au rayon de courbure de la courbe porteuse. L'aire aura pour mesure le produit du diamètre du cercle par le périmètre de la courbe porteuse. Et pour illustrer le fait que ce théorème est un moyen d'obtenir des relations entre des intégrales définies, A. Cauchy traite l'exemple d'un cercle de rayon k dont le centre se déplace sur une ellipse centrée sur les axes de coordonnées et où les demi-axes parallèles aux axes de coordonnées sont a et $b < a$. Son exemple s'achève sans qu'il ait eu besoin de l'équation de la courbe parallèle à l'ellipse, bien qu'il donne tous les éléments pour la déterminer. C'est E. Catalan qui effectuera cette détermination dans sa *Note sur la toroïde*³. Les courbes parallèles à l'ellipse, courbes algébriques du huitième degré, furent appelées toroïde par Breton de Champ⁴ qui en a fait l'étude en particulier de l'enveloppe extérieure dont la forme constamment ovale pouvait intéresser les arts.

Cette courbe d'un genre particulier fait sa réapparition dans l'étude de la forme de la tache lumineuse produite par un œilleton⁵, instrument utilisé principalement dans les méridiennes et les cadrans solaires. M. G. Baillet⁶ a étudié et effectué de nombreuses simulations numériques avec le logiciel Pov-Ray de telle façon qu'il est parvenu à modéliser convenablement la formation de la tache lumineuse produite par un œilleton soumis à l'éclairement constant d'une source de lumière étendue (Soleil). Dans l'image de l'œilleton qui se forme dans le plan de projection, la limite de la zone à éclaircissement constant⁷ et la limite supérieure de la zone pénombre-ombre totale peuvent être traitées comme étant des courbes parallèles à une ellipse donnée. En effet, si l'on considère un ensemble de sources lumineuses ponctuelles placé sur la

¹ Toroïde est indifféremment un mot masculin ou féminin

² A. Cauchy, *Compte Rendus*, 2^e série, tome XIII, 1841, p. 1060-1065.

³ E. Catalan, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1^{re} série, tome III, 1844, p. 553-555.

⁴ Breton de Champ, *Sur les courbes parallèles à l'ellipse*, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1^{re} série, tome III, 1844, p. 442-445.

⁵ Il s'agit d'un écran muni d'un trou circulaire dont les bords sont diffractants et dont la dimension est très grande devant celle de la source lumineuse, qui est elle-même une source étendue (32' d'arc en moyenne).

⁶ M. G. Baillet est membre de la Commission des Cadrans Solaires de la Société Astronomique de France

⁷ Cette zone peut être regardée comme le "maximum" de la tache lumineuse où toute la lumière serait concentrée avant de commencer à se diluer par l'apparition de la zone de pénombre produite à la fois par la taille de l'œilleton et par la source étendue qu'est le Soleil. On évitera le mot "centre lumineux", parce qu'il est désormais démontré que le centre de la zone à plus forte intensité lumineuse ne correspond pas justement au centre géométrique de la position du soleil.

circonférence d'un trou, le problème revient à déterminer l'enveloppe (intérieure et extérieure) produite par des ellipses mobiles dont les axes restent constamment parallèles entre eux, et dont les centres se meuvent sur la circonférence d'une ellipse porteuse fixe⁸. Une ellipse mobile est formée par l'intersection, avec le plan de projection, du cône de lumière émis par une source ponctuelle placée sur le bord de l'ocillon. L'ensemble des sources ponctuelles disposées sur le bord du trou et censées simuler l'éclairement du Soleil vu depuis le plan de projection, engendre donc dans ce plan des ellipses différentes en taille, mais de demi-axes constamment parallèles, ayant leur centre se déplaçant sur une ellipse fixe. La courbe enveloppe des ellipses ainsi produites dans le plan de projection par l'ensemble des sources ponctuelles continûment disposées sur le bord du trou est exactement la courbe appelée toroïde par Breton de Champ.

On se propose d'établir l'équation cartésienne de la courbe enveloppe (intérieure et extérieure) d'une ellipse dont le centre se déplace sur une ellipse fixe, dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées. L'enveloppe extérieure est toujours de forme ovale et l'enveloppe intérieure prend au contraire des aspects très différents selon le nombre de points de rebroussement et l'apparition de points doubles. Des figures donneront un aperçu des différentes formes que peut prendre le toroïde qui est une courbe algébrique du huitième degré.

2. Équation du toroïde dans le cas de deux ellipses

On se propose de traiter un cas particulier qui n'est qu'une extension de l'exemple proposé par A. Cauchy et complété par l'équation algébrique déterminée par E. Catalan (*op. cit.*).

Soit à déterminer dans le plan des x et y les enveloppes, intérieure et extérieure, de l'espace traversé par une ellipse dont le centre se déplace sur une ellipse fixe et centrée sur les axes de coordonnées ; les ellipses ont leurs demi-axes parallèles aux axes de coordonnées.

Si on note α et β , les coordonnées courantes de l'ellipse porteuse dont les axes sont parallèles aux axes des coordonnées et de demi-axes a et $b < a$, on aura :

$$(1) \quad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$$

Si l'on nomme au contraire x et y les coordonnées d'un point courant de l'ellipse dont les axes sont aussi parallèles aux axes des coordonnées et dont le centre se déplace sur le périmètre de l'ellipse porteuse, on aura :

$$(2) \quad \frac{(x - \alpha)^2}{a_1^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b_1^2} = 1$$

On admettra que le rayon de courbure (ρ_1) de l'ellipse mobile est constamment supérieur au rayon de courbure (ρ) de l'ellipse porteuse.

Différencions maintenant par rapport à α et à β les formules (1) et (2), puis éliminons $d\alpha$ et $d\beta$. On obtient, en appelant θ l'égalité des rapports, la formule :

$$(3) \quad a^2 b_1^2 \left(\frac{x - \alpha}{a} \right) = b^2 a_1^2 \left(\frac{y - \beta}{b} \right) = \theta$$

Si on exprime α et β en fonction de x , y et θ , on aura :

$$\alpha = \frac{a^2 b_1^2 x}{\theta + a^2 b_1^2} ; \quad \beta = \frac{b^2 a_1^2 y}{\theta + b^2 a_1^2} ; \quad x - \alpha = \frac{\theta x}{\theta + a^2 b_1^2} ; \quad y - \beta = \frac{\theta y}{\theta + b^2 a_1^2}$$

De cette façon les formules (1) et (2) deviennent :

⁸ Le centre de l'ellipse sur laquelle se déplacent les centres des ellipses mobiles n'est pas la projection du centre du trou sur le plan horizontal, et cette ellipse elle-même n'est pas l'image géométrique du trou... C'est l'intersection, avec le plan de projection, du cône lumineux, de même ouverture que le diamètre apparent du Soleil, produit par une source ponctuelle placée au centre de l'ocillon.

$$(4) \quad \frac{a^2 b_1^4 x^2}{(\theta + a^2 b_1^2)^2} + \frac{b^2 a_1^4 y^2}{(\theta + b^2 a_1^2)^2} = 1$$

$$(5) \quad \frac{\theta^2 x^2}{a_1^2 (\theta + a^2 b_1^2)^2} + \frac{\theta^2 y^2}{b_1^2 (\theta + b^2 a_1^2)^2} = 1$$

Pour obtenir l'équation de l'enveloppe, il faut éliminer θ entre ces deux équations. Cette élimination s'effectue de la façon suivante.

On commence par éliminer les dénominateurs ; on obtient alors :

$$(6) \quad a^2 b_1^4 x^2 (\theta + b^2 a_1^2)^2 + b^2 a_1^4 y^2 (\theta + a^2 b_1^2)^2 = (\theta + a^2 b_1^2)^2 (\theta + b^2 a_1^2)^2$$

$$(7) \quad b_1^2 \theta^2 x^2 (\theta + b^2 a_1^2)^2 + a_1^2 \theta^2 y^2 (\theta + a^2 b_1^2)^2 = a_1^2 b_1^2 (\theta + a^2 b_1^2)^2 (\theta + b^2 a_1^2)^2$$

On multiplie l'équation (6) par θ^2 , l'équation (7) par $a^2 b_1^2$; on soustrait membre à membre, ce qui élimine $(\theta + b^2 a_1^2)^2$, et on obtient :

$$(8) \quad a_1^2 (a^2 b_1^2 - b^2 a_1^2) \theta^2 y^2 = (a^2 a_1^2 b_1^4 - \theta^2)^2 (\theta + b^2 a_1^2)^2$$

On aurait de même à partir de l'équation (7) :

$$(9) \quad b_1^2 (a^2 b_1^2 - b^2 a_1^2) \theta^2 x^2 = (\theta^2 - b^2 a_1^4 b_1^2)^2 (\theta + a^2 b_1^2)^2$$

On ajoute membre à membre les équations (8) et (9) afin d'éliminer $(a^2 b_1^2 - b^2 a_1^2)$, et après quelques réductions et simplifications, on obtient :

$$(10) \quad \theta^2 (a_1^2 y^2 + b_1^2 x^2) = \theta^2 (2\theta + a^2 b_1^2 + b^2 a_1^2) + a_1^2 b_1^2 (\theta^2 - a^2 a_1^2 b_1^2)$$

Multiplions l'équation (8) par $a^2 b_1^2$ et (9) par $b^2 a_1^2$ afin d'éliminer $(a^2 b_1^2 - b^2 a_1^2) \theta$ par addition membre à membre. Il viendra alors après développement, réduction et simplification :

$$(11) \quad a_1^2 b_1^2 \theta (a^2 y^2 + b^2 x^2) = \theta \left[-\theta^2 + a_1^2 b_1^2 (a^2 b_1^2 + b^2 a_1^2) + a^2 b^2 a_1^2 b_1^2 \right] + 2a^2 b^2 a_1^4 b_1^4$$

Si on ordonne par rapport à θ les équations (10) et (11), on aboutit à deux fonctions cubiques :

$$(12) \quad 2\theta^3 - \theta^2 (a_1^2 y^2 + b_1^2 x^2 - a^2 b_1^2 - b^2 a_1^2 - a_1^2 b_1^2) - a^2 b^2 a_1^4 b_1^4 = 0$$

$$(13) \quad \theta^3 + \theta \left[a_1^2 b_1^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2) - a_1^2 b_1^2 (a^2 b_1^2 + b^2 a_1^2) - a^2 b^2 a_1^2 b_1^2 \right] - 2a^2 b^2 a_1^4 b_1^4 = 0$$

On élimine tour à tour, entre ces deux dernières équations, le terme en θ^3 et le terme indépendant ; on obtient ainsi :

$$(14) \quad A\theta^2 + 2B\theta - 3C = 0$$

$$(15) \quad 3\theta^2 - 2A\theta - B = 0$$

en ayant posé successivement :

$$(16) \quad \begin{cases} A = a_1^2 y^2 + b_1^2 x^2 - a^2 b_1^2 - b^2 a_1^2 - a_1^2 b_1^2 \\ B = a_1^2 b_1^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b_1^2 - b^2 a_1^2 - a^2 b^2) \\ C = a^2 b^2 a_1^4 b_1^4 \end{cases}$$

On réitère le procédé précédent afin d'éliminer le terme en θ^2 dans les équations (14) et (15) et on obtient :

$$(17) \quad 2\theta (A^2 + 3B) + (AB - 9C) = 0$$

$$(18) \quad \theta (9C - AB) - 2(B^2 + 3AC) = 0$$

Et enfin l'élimination de θ entre ces deux dernières équations conduit à :

$$(9C - AB)^2 = 4(A^2 + 3B)(B^2 + 3AC) = 0$$

ou ce qui est la même chose

$$(19) \quad A^2B^2 + 4A^3C + 18ABC + 4B^3 - 27C^2 = 0$$

L'équation du toroïde est donc :

$$(20) \quad \begin{aligned} & (a_1^2y^2 + b_1^2x^2 - a^2b_1^2 - b^2a_1^2 - a_1^2b_1^2)^2 (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b_1^2 - b^2a_1^2 - a^2b^2)^2 \\ & + 4a_1^2b_1^2 (a_1^2y^2 + b_1^2x^2 - a^2b_1^2 - b^2a_1^2 - a_1^2b_1^2)^3 \\ & + 18a^2b^2a_1^2b_1^2 (a_1^2y^2 + b_1^2x^2 - a^2b_1^2 - b^2a_1^2 - a_1^2b_1^2) (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b_1^2 - b^2a_1^2 - a^2b^2) \\ & + 4a^2b^2 (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b_1^2 - b^2a_1^2 - a^2b^2)^3 \\ & - 27a^4b^4a_1^4b_1^4 = 0 \end{aligned}$$

C'est bien une équation du 8^e degré. Rappelons que a et b sont le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse fixe, et a_1 et b_1 sont le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse dont le centre se déplace sur le contour de l'ellipse porteuse.

Remarque. Il existe une méthode utilisée par A. Cayley⁹, qui permet de faire l'élimination de θ d'une manière expéditive. Prenons l'équation (5) et multiplions-la par $a_1^2b_1^2$ et divisons les deux membres par θ ; on obtient :

$$(21) \quad \frac{b_1^2\theta x^2}{(\theta + a^2b_1^2)^2} + \frac{a_1^2\theta y^2}{(\theta + b^2a_1^2)^2} = \frac{a_1^2b_1^2}{\theta}$$

On ajoute membre à membre les équations (4) et (21), ce qui donne :

$$(22) \quad \frac{b_1^2x^2}{\theta + a^2b_1^2} + \frac{a_1^2y^2}{\theta + b^2a_1^2} = 1 + \frac{a_1^2b_1^2}{\theta}$$

On observera que la dérivation de cette dernière équation par rapport à θ conduit à l'équation (5). Si l'on développe maintenant l'équation (22) et que l'on ordonne les termes selon les puissances de θ , on obtiendra la fonction cubique suivante :

$$(23) \quad \theta^3 - A\theta^2 - B\theta + C = 0$$

où les coefficients A , B et C sont ceux définis par le groupe (16). En égalant alors à zéro le discriminant de la fonction cubique, on aura l'équation de la courbe enveloppe recherchée. Le discriminant s'écrit en effet :

$$(24) \quad \Delta = A^2B^2 + 4B^3 + 4A^3C + 18ABC - 27C^2$$

En faisant $\Delta=0$, et en substituant ensuite les valeurs de A , B et C , on obtient l'équation trouvée en (20).

Commentaires.

Les équations des ellipses dans le cadre le plus général, peuvent au mieux s'écrire sous la forme $A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + F = 0$ pour l'ellipse porteuse centrée sur l'origine du repère dont le demi grand axe est incliné sur l'axe des abscisses, et sous la forme $A_1(x - \alpha)^2 + B_1(x - \alpha)(y - \beta) + C_1(y - \beta)^2 + F_1 = 0$ pour l'ellipse dont le centre se déplace sur l'ellipse porteuse. Le traitement explicité précédemment n'a pu être reproduit avec succès à ce jour. Quand bien même ce cas résolu, il resterait à déterminer l'équation de la courbe toroïde produite par une famille d'ellipses de taille variable, d'axes principaux constamment parallèles entre eux et dont les centres se déplacent sur le contour d'une ellipse porteuse dont les demi-axes ne sont pas nécessairement parallèles à ceux de la famille d'ellipses. L'emploi de coordonnées

⁹ Cf. Arthur Cayley, The Collected Mathematical Papers, Volume 4, 1891, §253 (*Sur la courbe parallèle à l'ellipse*), page 152 ; (d'après *Annali di Matematica pura applicata* (Tortolini), tome III, 1860, pages 311-316).

paramétriques ou de coordonnées polaires pourrait peut-être apporter quelques réponses, mais la facilité de la programmation informatique du calcul par point des coordonnées fait apercevoir le problème désormais sous un autre angle. C'est là tout le travail qu'a fourni M. Baillet¹⁰. Faisons observer que, dans le problème résolu numériquement par M. Baillet, le segment mobile n'est pas perpendiculaire à la direction du déplacement, mais fait avec lui (tangente à l'ellipse porteuse) un angle constant, et ce même segment n'a pas une longueur fixe, mais ses extrémités varient dans des limites déterminées. Sauf mention contraire, on ne trouve nulle trace dans la littérature scientifique d'une telle description de courbes, lieux des extrémités d'un segment de longueur variable se déplaçant toujours sous un même angle par rapport à sa direction, et dont le centre est astreint à se mouvoir sur la circonférence d'une ellipse (description qui s'écarte de celle de courbe parallèle à l'ellipse...).

3. Quelques figures de toroïdes

Les courbes présentées ci-après (fig. 1 à 5) sont des courbes parallèles à l'ellipse porteuse parce qu'elles sont les lieux des extrémités d'un segment de longueur *constante* se déplaçant toujours orthogonalement à sa direction¹¹. Elles ne coïncident donc pas exactement dans l'immédiat à la projection d'une tache lumineuse par un œilleton, mais elles sont une tentative d'approche de la forme de la tache lumineuse. Elles correspondent parfaitement aux ocelles déterminés par itération par M. Dallet¹² depuis le logiciel Solarium. Les ocelles sont des toroïdes. Par rapport à la forme de la tache lumineuse produite par un œilleton, c'est une modélisation considérée comme simplifiée, tandis que celle établie par M. Baillet est considérée comme complète (fig. 6). L'enveloppe des familles de courbes obtenues par M. Baillet sont des toroïdes déformés et appartiennent bien à cette même classe de courbe.

Les figures 1 à 4 sont des toroïdes obtenues directement à partir de l'équation cartésienne (20).

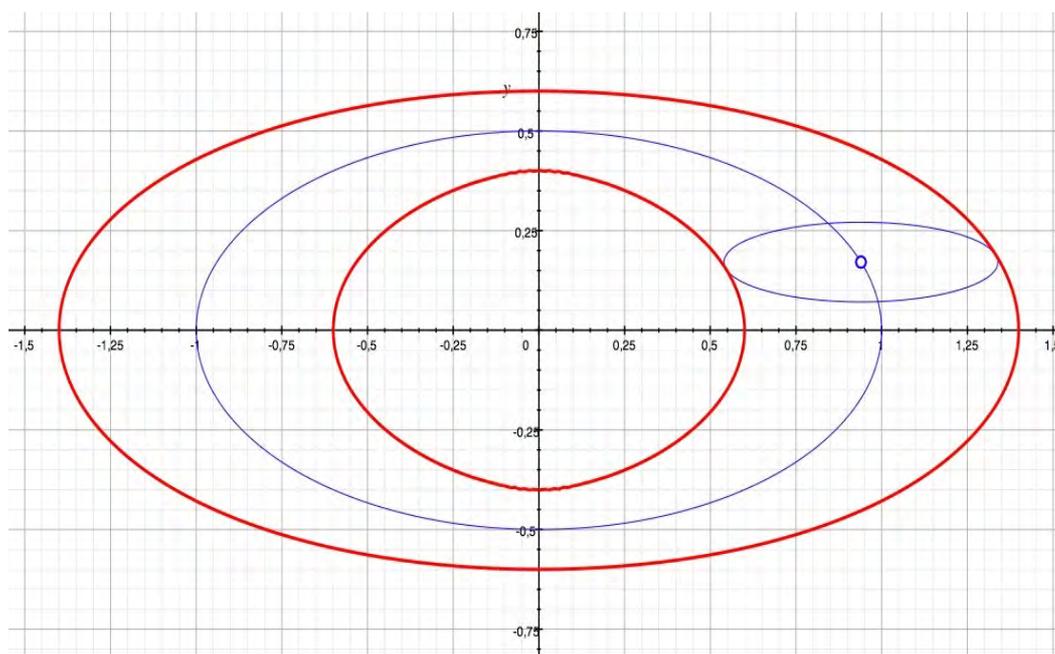


Figure 1 – $a = 1$, $b = 0.5$ et $a_1 = 0.4$, $b_1 = 0.1$

¹⁰ G. Baillet, *Œilleton-Ombre-Pénombre, Œilletons et courbes enveloppes, Œilletons et ellipses*, Cadran-Info n° 24, octobre 2011.

¹¹ Direction qui est constamment la tangente à la courbe porteuse, et le segment mobile qui est le demi-petit axe de l'ellipse mobile lui est toujours perpendiculaire.

¹² M. P.J. Dallet est membre de la Commission des Cadran Solaires, et auteur du très complet logiciel de tracés de cadrans solaires appelé « Solarium ». Cf. *Tracés des limites des pénombres du sommet d'un style droit*, ainsi que « *le formulaire de tracé des ocelles* » (Solarium, Case 5160 - Tache d'un disque par rapport au plan zone ombre/pénombre (ocelles)). Le dispositif consiste à installer, sur l'extrémité d'un style droit d'un cadran horizontal, une plaque circulaire (ou disque) parallèle au plan du cadran. L'ocelle est le nom donné à la forme de l'ombre de ce disque dans le plan du cadran horizontal.

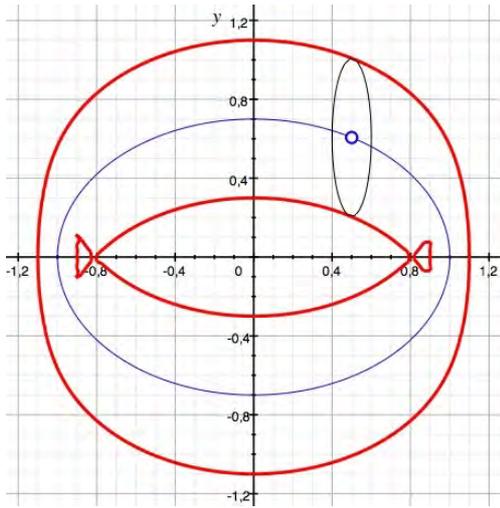


Figure 2 – $a=1, b=0.7$ et $a_1=0.1, b_1=0.4$

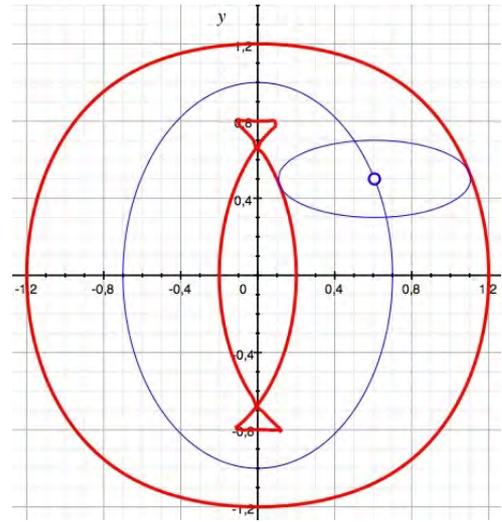


Figure 3 – $a=0.7, b=1$ et $a_1=0.5, b_1=0.2$

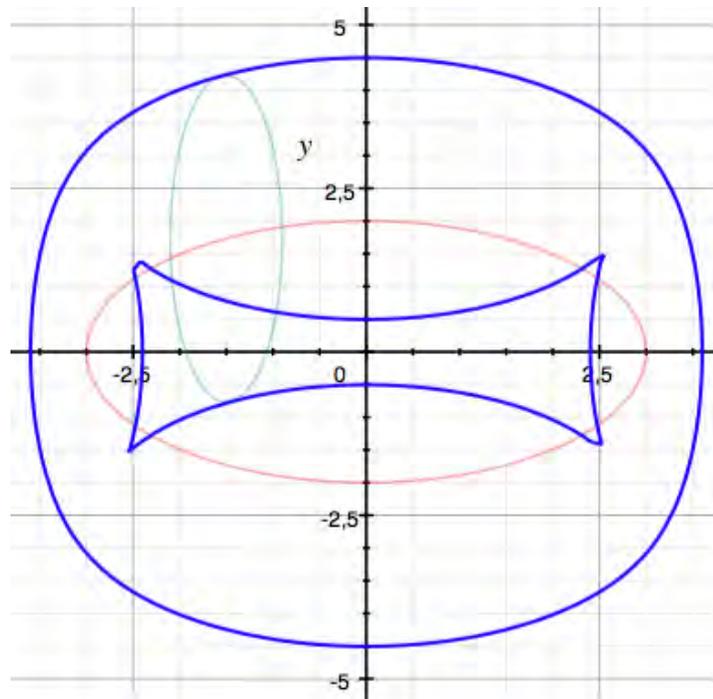


Figure 4 – $a=3, b=2$ et $a_1=0.6, b_1=2.5$

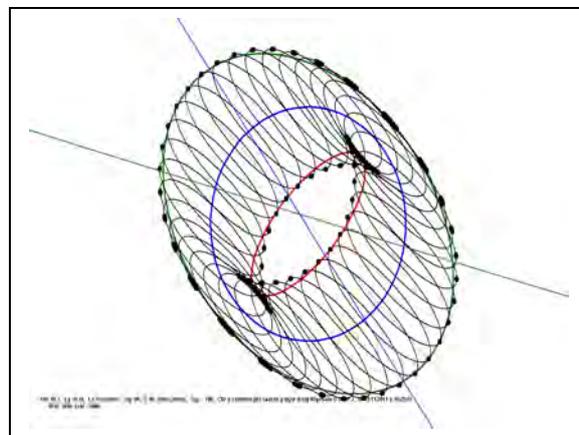


Figure 5 – Construction obtenue par M. Dallet pour le tracé d'un ocelle.

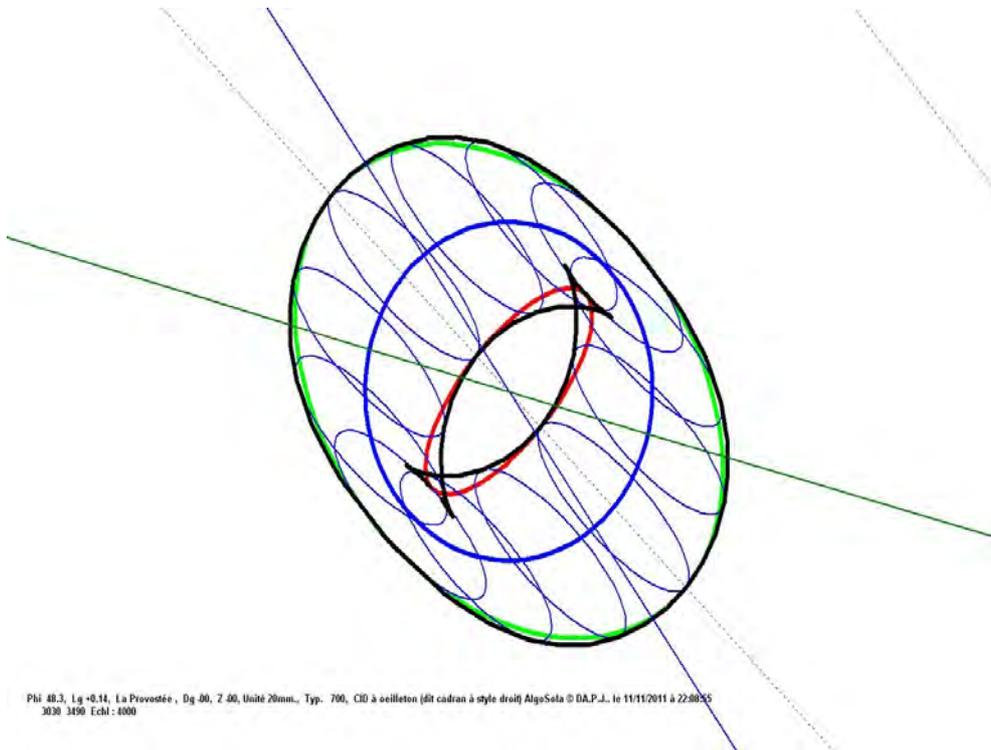


Figure 5bis – Construction obtenue par M. Dallet pour le tracé d'un ocelle.

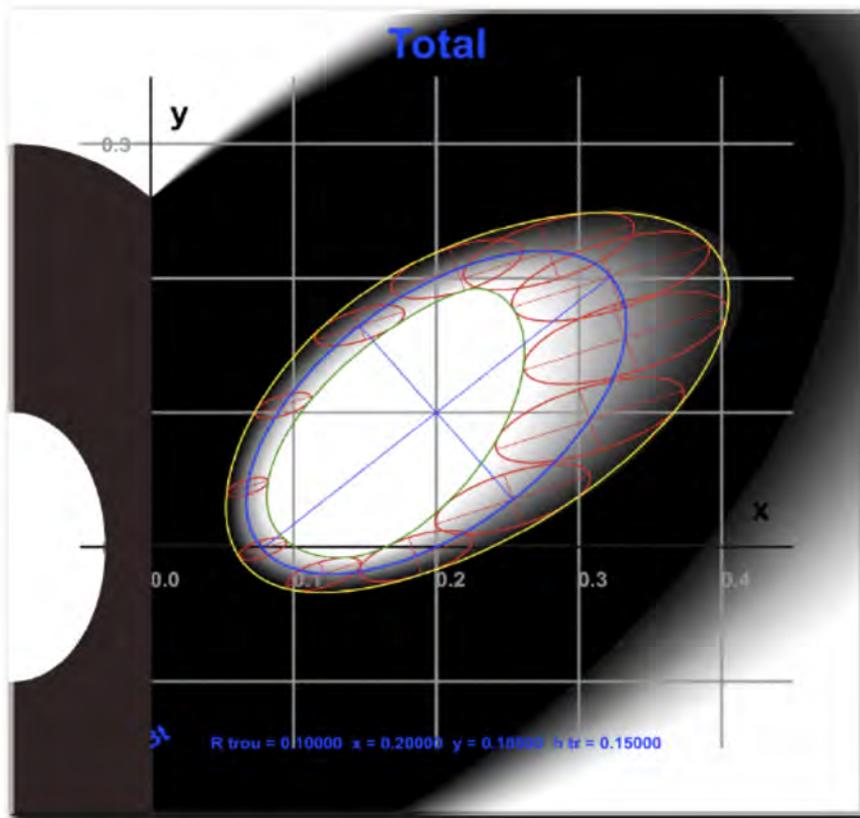


Figure 6 – Détail de la modélisation de la tache lumineuse produite par un œillette (M. Baillet).

Nice, 31 octobre 2011. Dominique Collin





Ouilleton et tache de lumière

Marc Goutaudier

De nombreux cadrans solaires ou méridiennes sont munis d'ouilleton dont l'ombre portée délimite une tache de lumière sur le plan du cadran. La lecture de l'heure se fait alors en estimant le centre de la tache de lumière sur le cadran. Il existe des méridiennes qui recourent au pourtour de cette tache soit pour une meilleure appréciation de l'instant du midi, soit comme marqueur des solstices, éventuellement des équinoxes. Dans des cas extrêmes, la forme de la tache réserve cependant certaines surprises.

Tache de lumière et ombre portée d'un ouilleton

Nous nous intéresserons ainsi au cas général d'un ouilleton circulaire incliné déclinant portant ombre et pénombre sur un plan horizontal¹.

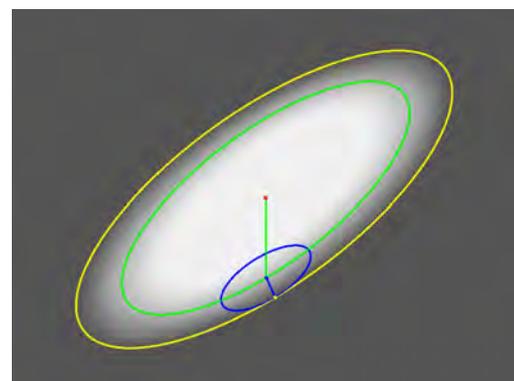
Les illustrations ont été réalisées à l'aide du logiciel libre POV-Ray².



La tache de lumière

La tache de lumière sur le cadran peut être considérée comme l'ensemble des taches générées

par une multitude de sténopés « points trou de l'ouilleton ». Ce qui se résume à un ensemble d'ellipses puisque que tout sténopé engendre un cône qu'intercepte le plan horizontal. En particulier, un point quelconque du bord interne de l'ouilleton forme une ellipse tangente au bord de la tache. La difficulté réside dans la détermination du point de tangence. Mis à part le cas idéal d'un ouilleton orienté exactement vers le soleil, la tache de lumière au sol n'est pas rigoureusement une ellipse et s'en détache nettement lorsque la normale à l'ouilleton est très différente de la direction du Soleil.



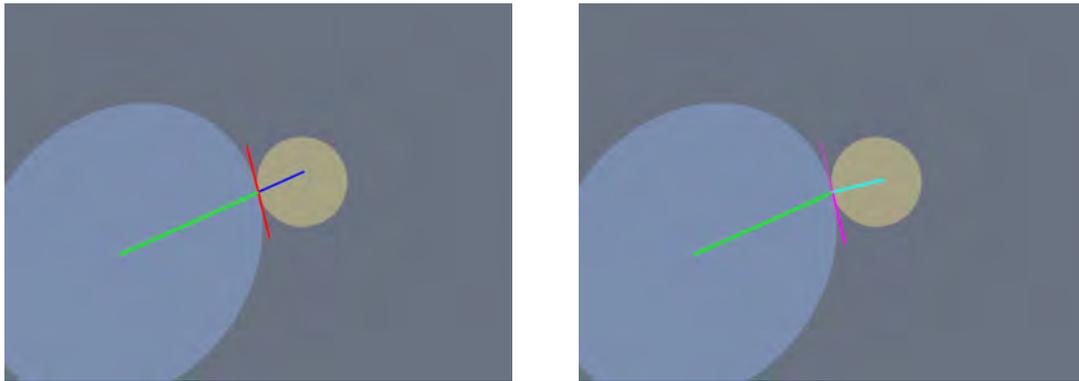
Le photocentre solaire engendre avec le bord interne de l'ouilleton un cône de lumière formant sur le plan du cadran une tache de lumière (à gauche) au contour elliptique (en vert). Le disque solaire à tout «points trou de l'ouilleton» forme de même une ellipse. En particulier pour le point «centre de

¹ Etendre l'étude à un plan quelconque ne présenterait pas de grandes difficultés mais n'apporterait rien pour le sujet abordé.

² Je tiens à remercier Gérard Baillet pour m'avoir fait découvrir ce puissant logiciel et avoir mis à ma disposition les nombreuses et ingénieuses procédures qu'il a développées.

l'œilleton» (en rouge) et pour un point quelconque du bord (en bleu). L'intégralité de la lumière solaire passant par l'œilleton forme une tache de lumière (en jaune) qui n'est pas une ellipse (à droite).

Imaginons-nous en un point du bord de la tache et observons vers le Soleil. Nous pouvons voir ce dernier « tangenter » le bord interne de l'œilleton. La tangente du bord de l'œilleton est contenue dans le plan de l'œilleton, mais comme ce dernier n'est pas orienté vers le Soleil ce n'est pas elle qui nous permettra de déterminer le rai de lumière qui nous intéresse. Il convient ainsi de considérer deux tangentes distinctes : celle de l'œilleton et celle relative au Soleil. Ces deux tangentes sont concourantes au point de l'œilleton considéré mais la tangente pour le Soleil, la projection de celle de l'œilleton dans un plan perpendiculaire à la direction du Soleil.



Le bord de l'œilleton, bien que circulaire, est vu de biais et apparaît sous la forme d'une ellipse. Le Soleil lui garde son aspect d'un disque circulaire. Pour un point de l'œilleton, les vecteurs tangents et normaux relatifs au bord de l'œilleton (à gauche) ne sont pas les mêmes que ceux relatifs au faisceau de lumière engendré par le Soleil et passant par ce point (à droite).

Approche vectorielle

Soit le repère (R) dont l'origine est le centre de l'œilleton et les axes x, y, z pointant respectivement vers l'Ouest, le Sud et le Zénith.

Soient A l'azimut du Soleil, et h sa hauteur, le vecteur $\vec{\text{sun}}$ pointe vers le Soleil.

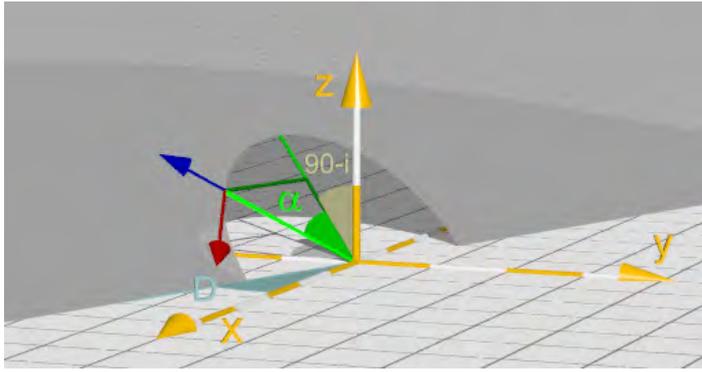
$$\vec{\text{sun}} = \begin{bmatrix} \sin(A) \cdot \cos(h) \\ \cos(A) \cdot \cos(h) \\ \sin(h) \end{bmatrix}_{\text{R}}$$

Soient r le rayon de l'œilleton, D sa déclinaison gnomonique et i son inclinaison (la distance zénithale de la normale au plan de l'œilleton)³, nous balayerons l'œilleton suivant l'angle α ayant pour origine le point le plus haut de l'œilleton et progressant d'Est en Ouest.

Les points de l'œilleton sont alors :

$$\mathbf{O}(\alpha) = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{bmatrix} = r \cdot \left(\begin{bmatrix} -\cos(i) \cdot \sin(D) \cdot \cos(\alpha) \\ -\cos(i) \cdot \cos(D) \cdot \cos(\alpha) \\ \sin(i) \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}_{\text{R}} + \begin{bmatrix} \cos(D) \cdot \sin(\alpha) \\ -\sin(D) \cdot \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{R}} \right)$$

³ Il convient de s'assurer que la normale à l'œilleton ne fait pas un angle supérieur à 90° avec le Soleil. Dans le cas contraire, il faut substituer 180°+D à D et 180°-i à i..



Les vecteurs normal (en bleu) et tangent (en rouge) au bord interne de l'ocillon sont respectivement :

$$\vec{N}(\alpha) = \begin{bmatrix} -\cos(i).\sin(D).\cos(\alpha) + \cos(D).\sin(\alpha) \\ -\cos(i).\cos(D).\cos(\alpha) - \sin(D).\sin(\alpha) \\ \sin(i).\cos(\alpha) \end{bmatrix}_R \quad \vec{T}(\alpha) = \frac{\partial \vec{N}(\alpha)}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} \cos(i).\sin(D).\sin(\alpha) + \cos(D).\cos(\alpha) \\ \cos(i).\cos(D).\sin(\alpha) - \sin(D).\cos(\alpha) \\ -\sin(i).\sin(\alpha) \end{bmatrix}_R$$

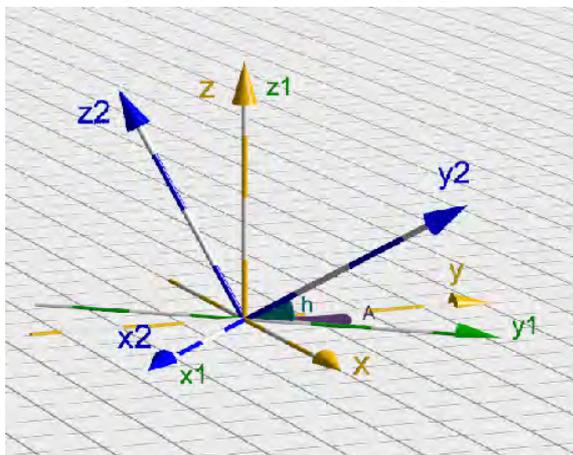
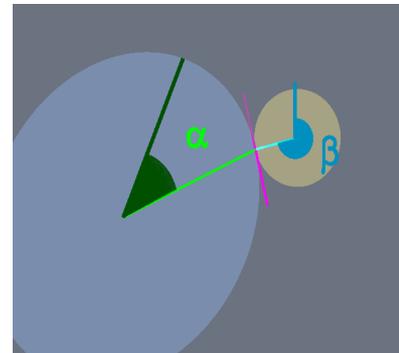
Le disque solaire, de rayon apparent s , sera balayé par l'angle β dont l'origine est le sommet du disque solaire balayé d'Est en Ouest.

Définissons le repère R2, solidaire du Soleil :
Son origine est le centre de l'ocillon, l'axe y_2 pointe vers le centre du Soleil.

L'axe z_2 lui est perpendiculaire et dans le plan vertical contenant le centre du Soleil.

L'axe x_2 est l'axe complémentaire perpendiculaire à y_2 et z_2 .

Le plan (x_2, z_2) est ainsi perpendiculaire à la direction du Soleil.



Soit, de plus, R1 repère transitoire d'axe x_1, y_1, z_1 .

x_1 et y_1 sont x et y décalés de l'angle A vers l'ouest et z_1 est z .

$$\vec{x}_1 = \cos(A).\vec{x} - \sin(A).\vec{y}$$

$$\vec{y}_1 = \sin(A).\vec{x} + \cos(A).\vec{y}$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 \quad \vec{y}_2 = \cos(h).\vec{y}_1 + \sin(h).\vec{z}_1 \quad \vec{z}_2 = -\sin(h).\vec{y}_1 + \cos(h).\vec{z}_1$$

Ce qui nous donne la correspondance suivante entre R2 et R :

$$\vec{x}_2 = \cos(A).\vec{x} - \sin(A).\vec{y} \quad \vec{y}_2 = \cos(h).\sin(A).\vec{x} + \cos(h).\cos(A).\vec{y} + \sin(h).\vec{z}$$

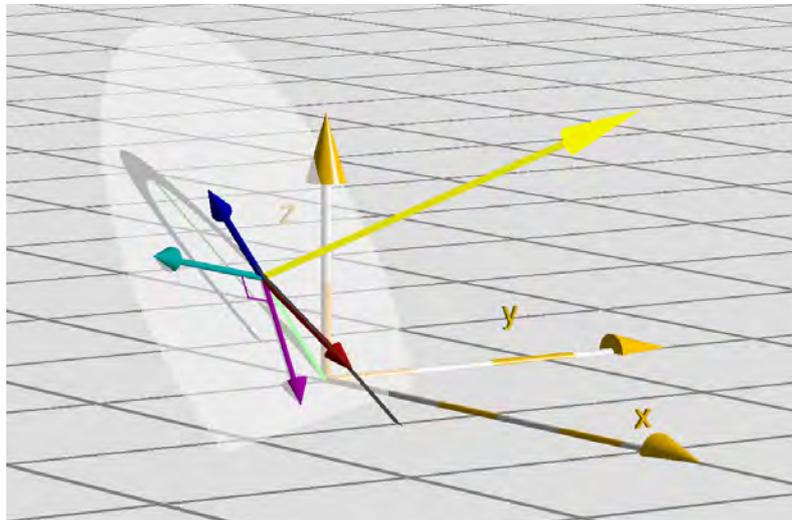
$$\vec{z}_2 = -\sin(h).\sin(A).\vec{x} - \sin(h).\cos(A).\vec{y} + \cos(h).\vec{z}$$

De même on trouvera les relations permettant de passer de R à R2 :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \cos(A).\vec{x}_2 + \cos(h).\sin(A).\vec{y}_2 - \sin(h).\sin(A).\vec{z}_2 & \vec{z} &= \sin(h).\vec{y}_2 + \cos(h).\vec{z}_2 \\ \vec{y} &= -\sin(A).\vec{x}_2 + \cos(h).\cos(A).\vec{y}_2 - \sin(h).\cos(A).\vec{z}_2 \end{aligned}$$

Exprimons $\vec{T}(\alpha)$ dans R2 et ne retenons que les coordonnées en x_2 et z_2 . Nous aurons ainsi la projection du vecteur normal au Soleil recherché. Nous l'appellerons $\vec{T}_1(\alpha)$

$$\vec{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} [\cos(i).\sin(D).\sin(t) + \cos(D).\cos(t)].\cos(A) - [\cos(i).\cos(D).\sin(t) - \sin(D).\cos(t)].\sin(A) \\ [\cos(i).\sin(D).\sin(t) + \cos(D).\cos(t)].\cos(h).\sin(A) + [\cos(i).\cos(D).\sin(t) - \sin(D).\cos(t)].\cos(h).\cos(A) - \sin(i).\sin(t).\sin(h) \\ [\cos(i).\sin(D).\sin(t) + \cos(D).\cos(t)].\sin(h).\sin(A) - [\cos(i).\cos(D).\sin(t) - \sin(D).\cos(t)].\sin(h).\cos(A) - \sin(i).\sin(t).\cos(h) \end{bmatrix}_{R2}$$



Le vecteur tangent au faisceau de lumière solaire (en mauve) est la projection du vecteur tangent à l'œilillon (en rouge) dans un plan perpendiculaire à la direction du Soleil (en jaune). La normale (en turquoise) est, dans ce même plan, le vecteur perpendiculaire.

Soit après simplifications, malheureusement minimales :

$$\vec{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(D - A).\cos(\alpha) + \cos(i).\sin(D - A).\sin(\alpha) \\ -\sin(D - A).\cos(h).\cos(\alpha) + [\cos(i).\cos(D - A).\cos(h) - \sin(h).\sin(i)].\sin(\alpha) \\ \sin(D - A).\sin(h).\cos(\alpha) + [-\cos(i).\cos(D - A).\sin(h) - \cos(h).\sin(i)].\sin(\alpha) \end{bmatrix}_{R2}$$

Nous trouvons en fin de compte la tangente au faisceau de lumière :

$$\vec{T}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(D - A).\cos(\alpha) + \cos(i).\sin(D - A).\sin(\alpha) \\ 0 \\ \sin(D - A).\sin(h).\cos(\alpha) + [-\cos(i).\cos(D - A).\sin(h) - \cos(h).\sin(i)].\sin(\alpha) \end{bmatrix}_{R2}$$

associée à sa normale⁴

⁴ Remarquons que le vecteur normal au Soleil n'est pas la projection dans le plan du vecteur normal à l'œilillon.

$$\vec{N}_\perp(\alpha) = \vec{T}_\perp(\alpha) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{N}_\perp(\alpha) = \begin{bmatrix} -\sin(D-A)\sin(h)\cos(\alpha) + [\cos(i)\cos(D-A)\sin(h) + \cos(h)\sin(i)]\sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(D-A)\cos(\alpha) + \cos(i)\sin(D-A)\sin(\alpha) \end{bmatrix}_{R_2}$$

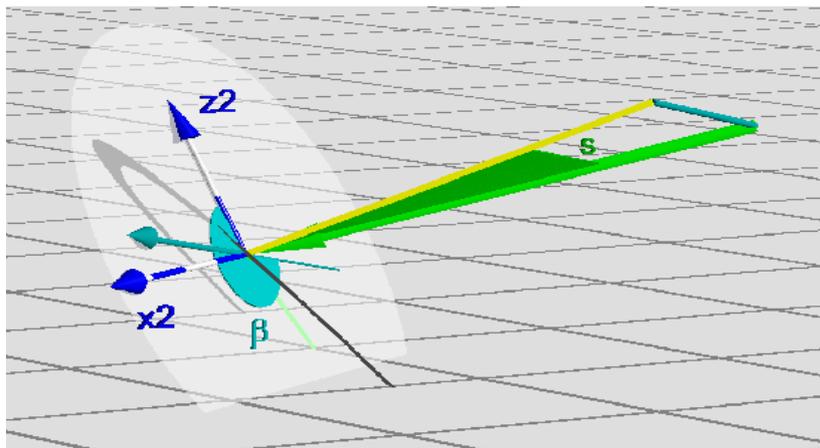
Notons que ces deux vecteurs ne sont pas normés.

Nous pouvons alors l'exprimer dans le repère R, en utilisant les formules de passage décrites plus haut et après avoir simplifié par des identités trigonométriques.

$$\vec{N}_\perp(\alpha) = \begin{bmatrix} -\sin(D)\sin(h)\cos(\alpha) + [\cos(i)\cos(D)\sin(h) + \cos(A)\sin(i)\cos(h)]\sin(\alpha) \\ -\cos(D)\sin(h)\cos(\alpha) + [-\cos(i)\sin(D)\sin(h) - \sin(A)\sin(i)\cos(h)]\sin(\alpha) \\ \cos(h)\cos(D-A)\cos(\alpha) + \cos(h)\cos(i)\sin(D-A)\sin(\alpha) \end{bmatrix}_R$$

Relation œilleton / bord solaire / pourtour de la tache de lumière

Pour tout point du $O(\alpha)$ du bord interne de l'œilleton, le point recherché au bord de la tache de lumière sur le cadran sera celui issu du point $S(\beta)$ du bord solaire et passant par $O(\alpha)$ avant de venir frapper le cadran.



Le vecteur vert est le vecteur directeur de la droite qui passe par le bord de l'œilleton et vient sur le cadran au bord de la tache de lumière.

Les angles α et β sont reliés par⁵ :

$$\beta = 180^\circ + \mathbf{atan}[N_{\perp x_2}(\alpha) / N_{\perp z_2}(\alpha)]$$

Soit

$$\beta = 180^\circ + \mathbf{atan} \left(\frac{-\sin(D-A)\sin(h)\cos(\alpha) + [\cos(i)\cos(D-A)\sin(h) + \cos(h)\sin(i)]\sin(\alpha)}{\cos(D-A)\cos(\alpha) + \cos(i)\sin(D-A)\sin(\alpha)} \right)$$

⁵ atan est la fonction arctangente. Elle comporte une ambiguïté de cadran sur le cercle trigonométrique. De nombreuses applications proposent la fonction atan2 qui, par la connaissance des valeurs algébriques des côtés opposé et adjacent à l'angle, permet de lever l'ambiguïté.

Alors que l'angle α balaye l'œilleton, les points de bord de la tache de lumière sur le cadran sont les points $C(\alpha)$ appartenant au cadran et à une droite $D(\alpha)$ passant par $O(\alpha)$ et de vecteur directeur $\vec{\text{bord}}(\alpha)$ tel que :

$$\vec{\text{bord}}(\alpha) = -\vec{\text{sun}} + \tan(s) \cdot \frac{\vec{N}_\perp(\alpha)}{\|\vec{N}_\perp(\alpha)\|}$$

Application pratique

Considérons un œilleton vertical ($i=90^\circ$) et méridional ($D=0^\circ$). Un tel choix permet de simplifier le vecteur normal associé au faisceau de lumière.

$$\vec{N}_\perp(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(A) \cdot \cos(h) \cdot \sin(\alpha) \\ -\sin(h) \cdot \cos(\alpha) - \sin(A) \cdot \cos(h) \cdot \sin(\alpha) \\ \cos(A) \cdot \cos(h) \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}_R$$

Sa norme est alors

$$\|\vec{N}_\perp(\alpha)\| = \sqrt{[\cos(A) \cdot \cos(h) \cdot \sin(\alpha)]^2 + [-\sin(h) \cdot \cos(\alpha) - \sin(A) \cdot \cos(h) \cdot \sin(\alpha)]^2 + [\cos(A) \cdot \cos(h) \cdot \cos(\alpha)]^2}$$

La droite $D(\alpha)$, définie précédemment, est l'ensemble des points vérifiant pour toute valeur de $k(\alpha)$:

$$\begin{bmatrix} x(\alpha) \\ y(\alpha) \\ z(\alpha) \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} r \cdot \sin(\alpha) \\ 0 \\ r \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}_R + k(\alpha) \cdot \begin{bmatrix} \sin(A) \cdot \cos(h) \\ \cos(A) \cdot \cos(h) \\ \sin(h) \end{bmatrix}_R + \frac{\tan(s)}{\|\vec{N}_\perp(\alpha)\|} \begin{bmatrix} \cos(A) \cdot \cos(h) \cdot \sin(\alpha) \\ -\sin(h) \cdot \cos(\alpha) - \sin(A) \cdot \cos(h) \cdot \sin(\alpha) \\ \cos(A) \cdot \cos(h) \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}_R$$

Comme pour tout point du cadran $z = -H$

$$\text{On en extrait } k(\alpha) : \quad k(\alpha) = \frac{-H - r \cdot \cos(\alpha)}{-\sin(h) + \frac{\tan(s)}{\|\vec{N}_\perp(\alpha)\|} \cdot \cos(h) \cdot \cos(A) \cdot \cos(\alpha)}$$

$$k(\alpha) = \frac{-H - r \cdot \cos(\alpha)}{-\sin(h) + \frac{\tan(s)}{\|\vec{N}_\perp(\alpha)\|} \cdot \cos(h) \cdot \cos(A) \cdot \cos(\alpha)}$$

Ce qui nous donne au final les coordonnées $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$ des points du bord de la tache de lumière.

$x(\alpha)$ et $y(\alpha)$ sont à reporter depuis une origine sur le cadran située au pied de l'œilleton.

Soit, par exemple, pour un œilleton de $r=1\text{cm}$ à une hauteur $H=100\text{cm}$, pour un Soleil d'azimut $A=60^\circ$ et de hauteur $h=25^\circ$:

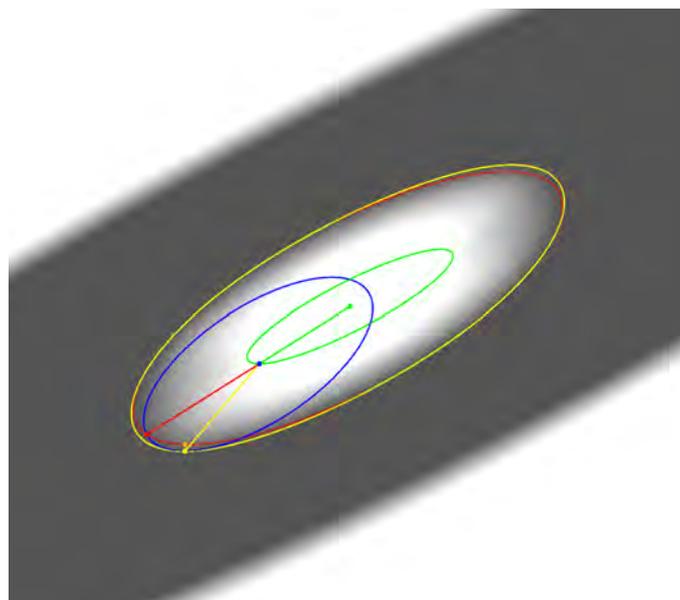
α	$\ \vec{N}_\perp(\alpha)\ $	$k(\alpha)$	$x(\alpha)$ cm	$y(\alpha)$ cm
0°	0.619641	2.40927	-189.1	-109.9

20°	0.805197	2.40243	-188.0	-109.8
40°	0.944119	2.39402	-186.9	-109.5
60°	0.999650	2.38398	-185.8	-109.0
80°	0.960028	2.37245	-184.7	-108.5
100°	0.833518	2.35964	-183.6	-107.8
120°	0.651742	2.34539	-182.6	-107.1
140°	0.487879	2.32982	-181.6	-106.0
160°	0.471071	2.32086	-181.5	-104.9
180°	0.619641	2.32382	-182.4	-104.6
200°	0.805197	2.33039	-183.5	-104.7
220°	0.944119	2.33861	-184.5	-105.0
240°	0.999650	2.34851	-185.6	-105.4
260°	0.960028	2.35996	-186.7	-106.0
280°	0.833518	2.37278	-187.8	-106.6
300°	0.651742	2.38717	-188.9	-107.4
320°	0.487879	2.40316	-189.9	-108.5
340°	0.471071	2.41245	-190.1	-109.6

Analyse critique

Sans prendre en considération ces subtilités compliquant grandement la mise en équation du problème, il est possible de se borner à considérer le point du pourtour de la tache de lumière comme issu de rayons partant des points du bord solaire $S(180+\alpha)$ et passant par les points $O(\alpha)$ du bord de l'ocillon⁶. Quelle sera alors l'erreur commise ?

Avec cette méthode les deux points de bord de tache calculés pour un $O(\alpha)$ donné peuvent différer sensiblement (de l'ordre de 1 cm pour une tache de lumière d'une envergure d'environ 10 cm sur 3 cm dans l'exemple précédent). Mais les taches ne s'écartent pas trop l'une de l'autre car, à un point calculé pour $O(\alpha_1)$ donné d'une des théories, un point pour $O(\alpha_2)$ de l'autre reste toujours très proche (de l'ordre du mm sur le même exemple). Ce qui donne, au regard de la taille de la tache une erreur relative infime.

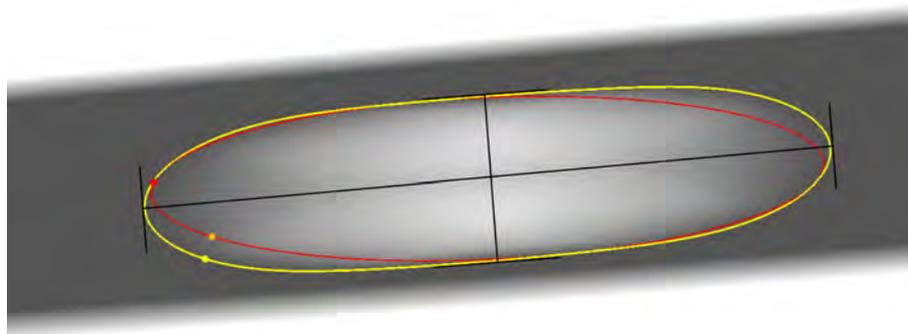


En théorie l'écart devrait être assez grand : pour un point du bord de l'ocillon, le point jaune de la présente théorie s'éloigne considérablement du point rouge déterminé avec la méthode simplifiée

⁶ En référence au modèle de Denis Savoie, « Ocillon, tache de lumière et méridienne », *CadranInfo* n° 13, mai 2006, p. 87-93.

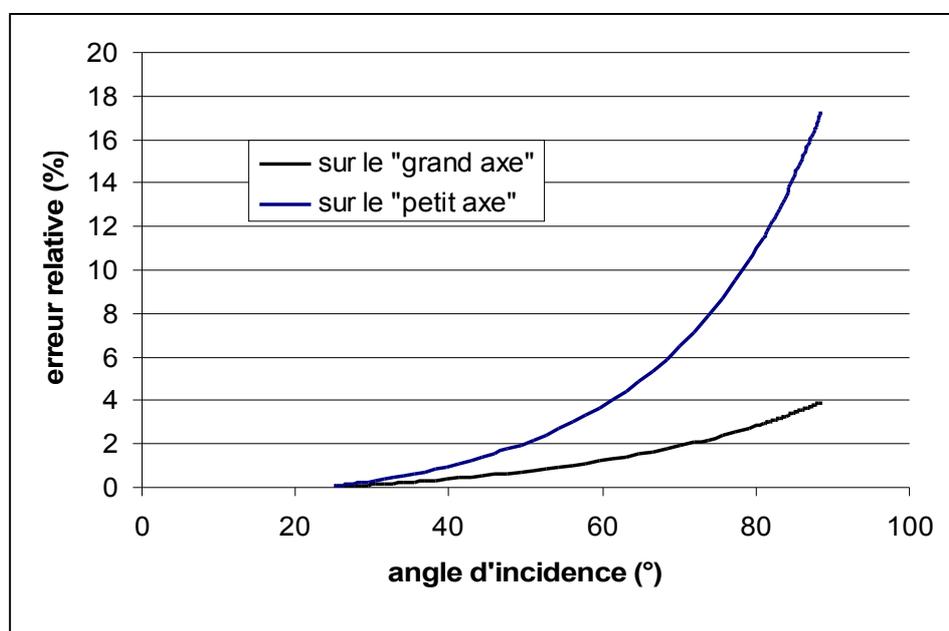
donnant une ellipse (en rouge). Mais globalement, les deux taches diffèrent peu car un autre point orange de l'ellipse issu d'un point différent du bord de l'œilleton reste à proximité de ce point jaune.

Pour que l'effet devienne sensible il faut se retrouver dans des conditions extrêmes.

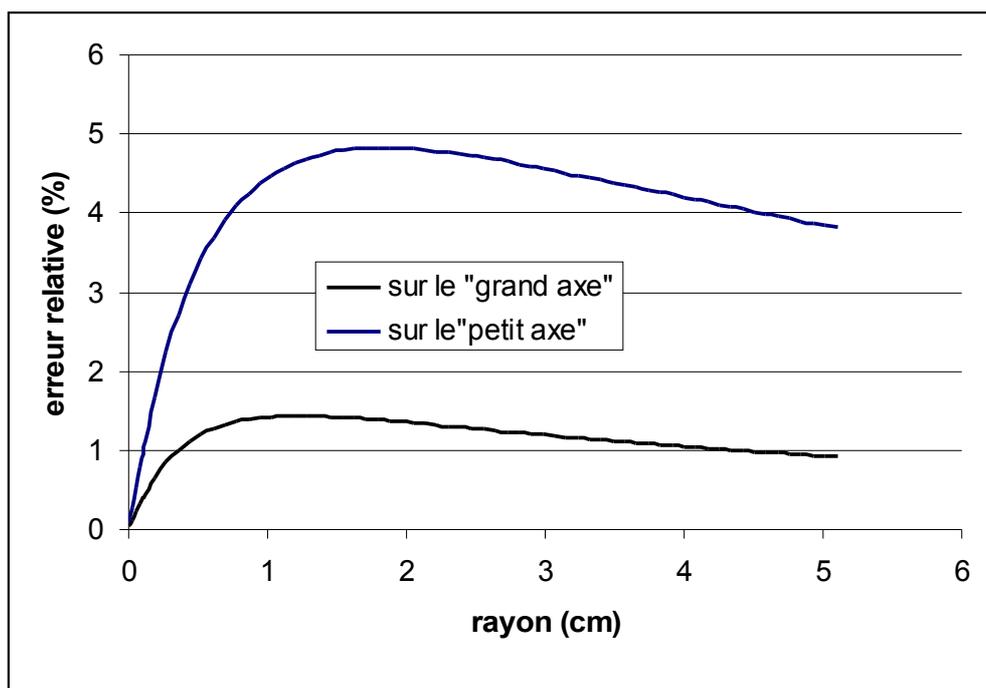


Dans cet exemple où l'angle d'incidence entre la normale à l'œilleton et la direction du Soleil est de 85° , la déformation est nettement plus sensible : l'écart atteint 3,4 mm. On peut le comparer soit au « grand axe » de 10 cm, soit au « petit axe » de 3,4 cm de la tache de lumière.

Il est évident que l'angle entre la normale à l'œilleton et la direction du Soleil est le facteur primordial. Si nous reprenons notre exemple en faisant varier pour un œilleton de 1 cm, l'azimut du Soleil (et par voie de conséquence l'angle d'incidence des rayons solaires sur l'œilleton), on notera des erreurs relatives appréciables pour des angles extrêmes.



La taille de l'œilleton joue cependant un rôle. Un sténopé idéal ne donne aucun écart. Une taille d'œilleton trop grande masquera pour sa part les effets du diamètre apparent du Soleil. Si nous nous fixons maintenant un angle d'incidence donné (celui de l'exemple : 63°) et faisons varier le diamètre de l'œilleton, il apparaît clairement un rayon d'œilleton critique pour lequel l'effet observé est amplifié.

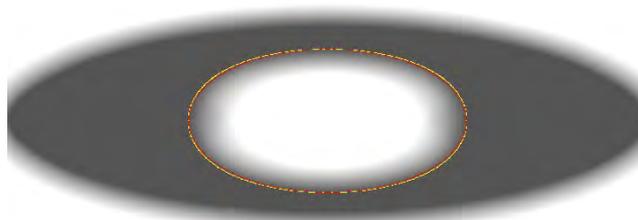


Le « grand axe » de la tache et le « petit axe » variant d'une façon non proportionnelle à mesure que le rayon de l'œilleton augmente, on constate que le rayon critique dépend de la référence que l'on prend pour estimer l'erreur relative.

En conclusion

Ce qui précède ne doit pas faire oublier le caractère futile de la recherche d'une telle précision sur la lecture d'un cadran solaire. Même si le pourtour de la tache, comme nous l'avons vu, n'est pas rigoureusement une ellipse, les conséquences en sont plus que négligeables. Sur un cadran solaire classique à œilleton la forme de la tache n'affecte en rien la lecture de l'heure donnée par le centre de la tache. Des conséquences pourraient être recherchées sur des méridiennes de temps vrai marquant les solstices par le bord supérieur ou inférieur du Soleil.

Or ces méridiennes adoptent des œilletons horizontaux, verticaux plein sud ou encore polaire. Les déformations entre la forme de la tache de lumière et celle d'une ellipse ne concernent alors pas les régions des bords supérieur et inférieur, ni même oriental et occidental du Soleil.



Sur une méridienne, la tache de lumière s'écarte peu d'une ellipse. Les régions des bords du Soleil supérieur (à gauche), inférieur (à droite), oriental (en haut) et occidental (en bas) ne sont pas affectées. Seules les régions intermédiaires le sont.

Par amusement, nous pouvons être tentés de traquer certaines méridiennes dont la précision serait en théorie altérée par la forme réelle de la tache de lumière. C'est par exemple le cas de la récente méridienne de la Chiesa della Madonna della Visitazione à Perinaldo en Italie. Cette dernière propose d'estimer l'heure séparant l'équinoxe de printemps ou d'automne par une lecture du bord supérieur ou inférieur du Soleil sur des réglettes graduées de part et d'autre de la méridienne vraie. La lecture ne s'effectuant pas sur la méridienne elle-

même, la forme de la tache de lumière devrait être altérée. Mais autant en être conscient, l'écart théorique est infinitésimal et ne fausse en aucune manière la lecture.



Il n'est pas non plus inutile de préciser que dans cette étude la limite de la tache de lumière a été prise au sens strict du terme, c'est-à-dire en limite théorique de la pénombre. On sait cependant pertinemment que cette frontière théorique n'est pas celle qu'appréciera l'œil.





Œilleton et tache de lumière

Denis Savoie

Il nous a paru souhaitable de donner une nouvelle version, corrigée et étendue, de l'article paru dans Cadran-Info en 2006, consacré aux œilletons. Les formules suivantes permettent de calculer les dimensions d'une tache de lumière issue d'un œilleton circulaire avec un Soleil de diamètre apparent¹.

1 – Calculs préliminaires

Soit r le diamètre d'un œilleton circulaire de centre K situé à une distance a du plan considéré (sol, mur).

Soit R le demi-diamètre du Soleil ; celui-ci varie de $0^{\circ} 16' 16''$ début janvier à $0^{\circ} 15' 44''$ début juillet, soit près d'une demi-minute d'arc de variation. En général², on prend $R = 0^{\circ} 16'$.

On utilise deux angles intermédiaires α et α' : pour le diamètre du Soleil, α est compté depuis le bord supérieur (fig. 1) dans le sens trigonométrique de 0° à 360° . Pour l'œilleton, α' est compté depuis le bord supérieur, dans le même sens.

On a : $\alpha' = \alpha + 180^{\circ}$.

On appellera h la hauteur du photocentre du Soleil, h_v sa hauteur apparente (c'est-à-dire affectée par la réfraction notée *refra*) et $h'v$ la hauteur apparente d'un bord du Soleil.

ϕ étant la latitude du lieu, δ la déclinaison du Soleil, H son angle horaire, on a :

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H \\ h_v &= h + \text{refra} \\ h'v &= h_v + R \cos \alpha\end{aligned}$$

La réfraction, en minutse de degré, se calcule par : $\text{refra} = 1.02 / [\tan (h + 10.3 / (h + 5.11))]$

¹ On comparera les résultats obtenus ici avec les formulaires de G. Baillet et M. Goutaudier. Les décimales superflues dans les exemples numériques sont données uniquement pour vérifications. On consultera avec profit l'article de G. Ferrari, « Propriétés de l'ombre », *Cadran-info* n° 16, octobre 2007, p. 14-20, et, du même auteur, « Ombre et pénombre », *Cadran-info* n° 13, mai 2006, p. 27-33.

² Si l'on veut être plus rigoureux, on peut calculer le diamètre apparent du Soleil par :

$$R = 16' + 16'' \cos M$$

M étant l'anomalie moyenne du Soleil ($0^{\circ} < M < 360^{\circ}$) que l'on calcule par :

$$M = 357^{\circ},528 + 0^{\circ},9856003 \times T, T \text{ étant le temps compté en jours depuis J2000.0 à 12 h UT.}$$

La valeur obtenue est celle correspondant à une pression atmosphérique de 1010 millibars et une température de 10° Celsius³. La réfraction atteint environ 3' pour des valeurs de la hauteur du Soleil voisines de celle correspondant au solstice d'hiver sous nos latitudes.

Comme le Soleil n'est pas ponctuel, on doit faire intervenir l'azimut de son bord; soient A l'azimut de son photocentre et dA l'azimut d'un point de sa circonférence. On a :

$$\cos dA = (\cos R - \sin h_v \sin h'_v) / (\cos h_v \cos h'_v)$$

Si $0^\circ < \alpha' < 180^\circ$, alors $dA = -d\alpha$.

L'azimut du photocentre du Soleil se calcule par :

$$\tan A = \sin H / (\sin \phi \cos H - \cos \phi \tan \delta)$$

A étant du même signe que H .

Le principe du calcul est le suivant (fig. 1) : un rayon solaire issu d'un point du bord du Soleil rencontre un point opposé d'un bord de l'œilleton avant d'arriver sur la surface où il forme une tache de lumière. On cherche les dimensions de cette tache en faisant tourner un rayon fictif autour du Soleil et autour de l'œilleton, donc en engendrant un conoïde.

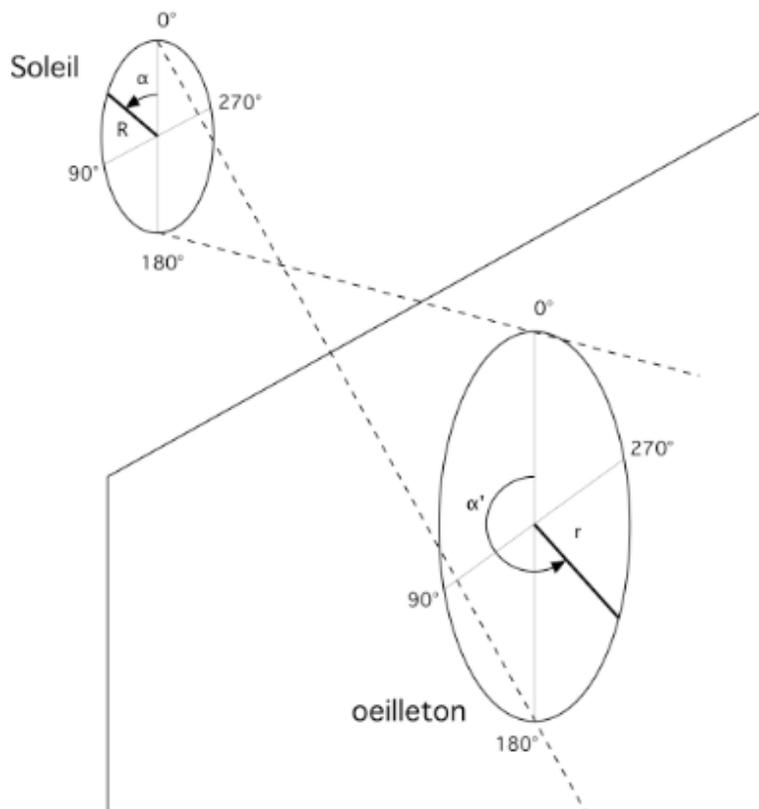


Figure 1

³ Pour d'autres valeurs de la température T et de la pression P, on multiplie la réfraction par un terme correctif.

2 – Cas d'un œilleton vertical : image au sol

Soit un mur de déclinaison gnomonique D muni d'un œilleton d'épaisseur négligeable, situé à une hauteur a du sol (fig. 2). Pour calculer les coordonnées X et Y de la tache du Soleil au sol, comptées depuis le pied de l'œilleton (axe des X dirigé vers l'Est, axe des Y vers le Nord), on calcule :

$$X = x' \cos D + y' \sin D; \quad Y = -x' \sin D + y' \cos D$$

avec

$$x' = (a + r \cos \alpha') \sin (A + dA - D) \cotan (h'v) - r \sin \alpha'$$

$$y' = (a + r \cos \alpha') \cos (A + dA - D) \cotan (h'v)$$

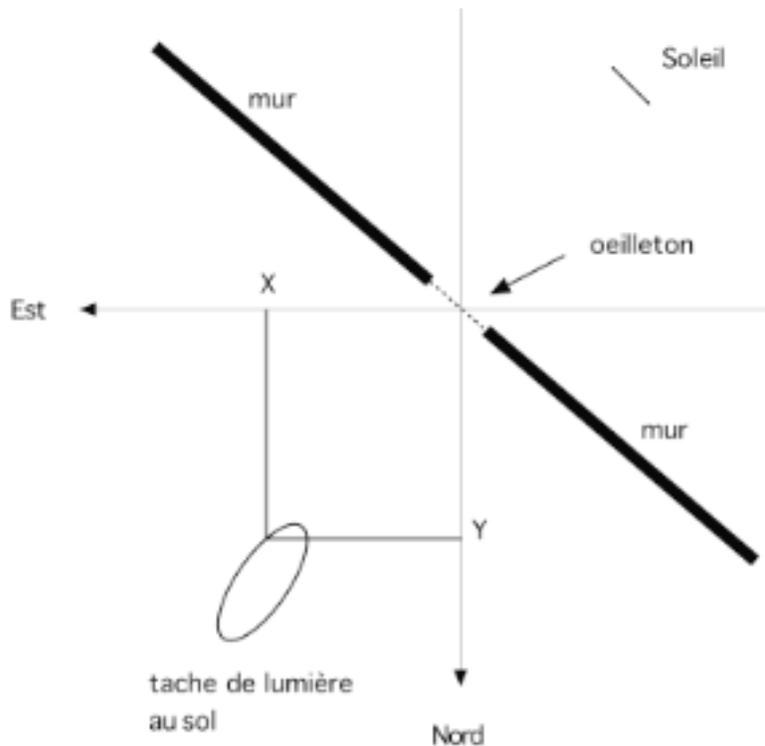


Figure 2 (Vue de dessus)

Si l'on ne s'intéresse qu'à l'image du Soleil à midi vrai, on prend $H = 0^\circ$. Mais on peut aussi calculer l'image du Soleil à midi moyen ($H = -E$, E étant l'équation du temps) ou à midi UT, voire à n'importe quel autre instant de la journée.

L'image du Soleil au sol est plus ou moins elliptique selon le diamètre de l'œilleton, l'heure et la date. Mais la différence entre l'image au solstice d'été et celle au solstice d'hiver est considérable, surtout si l'œilleton est placé loin du sol.

On obtient les dimensions maximales de la tache de lumière en X en posant $\alpha' = 90^\circ$ et 270° , et les dimensions maximales en Y en posant $\alpha' = 0^\circ$ et 180° .

Exemple 1 : soit un œilleton placé sur un mur vertical méridional dont les paramètres sont $\phi = 48^\circ$, $D = 0^\circ$, $a = 800$ cm, $r = 1$ cm (diamètre = 2 cm). Calculons des points de son image au sol le jour du solstice d'hiver ($\delta = -23^\circ,439$ et $R = 0^\circ 16' 16''$) à midi solaire ($H = 0^\circ$).

On a par exemple :

$$\alpha' = 0^\circ ; A = 0^\circ ; h = 18^\circ,561 ; \text{refra} = 0^\circ 2' 58'' ; hv = 18^\circ,61038 ; h'v = 18^\circ,33927 ; \\ dA = 0^\circ ; \text{d'où } X = 0 \text{ cm et } Y = 2416,4 \text{ cm.}$$

$$\alpha' = 90^\circ ; A = 0^\circ ; h = 18^\circ,561 ; \text{refra} = 0^\circ 2' 58'' ; hv = 18^\circ,61038 ; h'v = 18^\circ,61038 ; \\ dA = -0^\circ,28607 ; \text{d'où } X = -12,86 \text{ cm et } Y = 2375,7 \text{ cm.}$$

$$\alpha' = 300^\circ ; A = 0^\circ ; h = 18^\circ,561 ; \text{refra} = 0^\circ 2' 58'' ; hv = 18^\circ,61038 ; h'v = 18^\circ,47483 ; \\ dA = 0^\circ,24764 ; \text{d'où } X = -11,22 \text{ cm et } Y = 2395,91 \text{ cm.}$$

Dans le cas présent, on obtient une tache très elliptique de 80,29 cm de long sur 25,72 cm de large.

Au même instant au solstice d'été ($\delta = +23^\circ,439$), la tache ne fait plus que 10,05 cm de large sur 9,76 cm de long, soit quasiment un cercle.

Si maintenant on applique la règle du millième, dite « de Cassini », l'œilleton fait donc 0,8 cm de diamètre (puisque $a = 800$ cm), soit $r = 0,4$ cm. Au solstice d'hiver à midi solaire, la tache de lumière mesure 76,7 cm de long sur 24,52 cm de large. Par rapport à un œilleton de 2 cm, le changement est donc très faible. Il vaut donc mieux prendre un œilleton plus grand, ce qui rend la tache bien plus lumineuse. Jérôme de Lalande⁴, dans son *Encyclopédie méthodique*, justifiait déjà par des arguments parfaitement clairs l'inadéquation de cette « règle » de Cassini : « *M. Cassini jugea que le diamètre du trou devait être en général la millième partie de la hauteur du gnomon ; mais je crois qu'il est souvent utile de le rendre plus grand, pour avoir plus de lumière ; l'inconvénient qui en résulte par l'augmentation de l'image, n'est pas considérable ; en augmentant le trou du gnomon d'une méridienne de 3 lignes, on n'ajoute que 3 lignes au diamètre de l'image, quelque grande qu'elle soit, et à quelle distance qu'elle soit du trou, et cependant on peut augmenter beaucoup la lumière* ».

Exemple 2 : soit un œilleton placé sur un mur vertical déclinant dont les paramètres sont $\phi = 48^\circ$, $D = 30^\circ$, $a = 800$ cm, $r = 1$ cm (diamètre = 2 cm). Calculons des points de son image au sol le jour du solstice d'été ($\delta = 23^\circ,439$ et $R = 0^\circ 15' 44''$) pour $H = 40^\circ$.

On a par exemple :

$$\alpha' = 0^\circ ; A = 66^\circ,52321 ; h = 49^\circ,98624 ; \text{refra} = 0^\circ 0' 51'' ; hv = 50^\circ,00042 ; \\ h'v = 49^\circ,73819 ; dA = 0^\circ ; \text{d'où } X = 622,22 \text{ cm et } Y = 270,25 \text{ cm.}$$

$$\alpha' = 90^\circ ; A = 66^\circ,52321 ; h = 49^\circ,98624 ; \text{refra} = 0^\circ 0' 51'' ; hv = 50^\circ,00042 ; \\ h'v = 50^\circ,00042 ; dA = -0^\circ,40795 ; \text{d'où } X = 612,92 \text{ cm et } Y = 272,3 \text{ cm.}$$

$$\alpha' = 240^\circ ; A = 66^\circ,52321 ; h = 49^\circ,98624 ; \text{refra} = 0^\circ 0' 51'' ; hv = 50^\circ,00042 ; \\ h'v = 50^\circ,13153 ; dA = 0^\circ,35378 ; \text{d'où } X = 614,84 \text{ cm et } Y = 261,79 \text{ cm.}$$

⁴ Jérôme de Lalande, *Encyclopédie méthodique*, t. 2, Paris, 1785, p. 384. On consultera avec intérêt l'article de G.Ferrari, « L'image du soleil dans les cadrans solaires à chambre obscure », *Cadran-Info* n° 21, mai 2010, p. 55-65, qui s'intéresse particulièrement à la luminosité de la tache solaire dans les grandes méridiennes italiennes.

3 – Cas d'un œilleton vertical : image sur un mur

a) L'image du Soleil passant par l'œilleton vertical peut dans certains cas se projeter sur un mur. On supposera tout d'abord que le mur sur lequel se projette la tache de lumière est parallèle à l'œilleton (donc l'œilleton est vertical). Soit D la déclinaison gnomonique du mur; appelons a la distance de l'œilleton de centre K au point P sur le mur (fig. 3).

Les coordonnées X et Y de l'enveloppe de la tache de lumière, depuis le pied du style droit fictif P , s'obtiennent par (axe des X vers la droite, Y vers le haut) :

$$X = [a (\cos D \tan (A + dA) - \sin D) / (\cos D + \tan (A + dA) \sin D)] - r \sin \alpha'$$

$$Y = - [a \tan h'v / (\cos (A + dA - D))] + r \cos \alpha'$$

Exemple : en prenant comme paramètres $\phi = 48^\circ$, $D = +30^\circ$, $a = 500$ cm, $r = 1$ cm, $R = 0^\circ 15' 44''$, $H = 45^\circ$, $\delta = +23^\circ,433$, $\text{refra} = 57''$, on a :

$\alpha' = 180^\circ$	$X = 443,64$ cm	$Y = -721,23$ cm
$\alpha' = 270^\circ$	$X = 450,67$ cm	$Y = -717,93$ cm
$\alpha' = 0^\circ$	$X = 443,64$ cm	$Y = -706,14$ cm
$\alpha' = 90^\circ$	$X = 436,7$ cm	$Y = -709,45$ cm

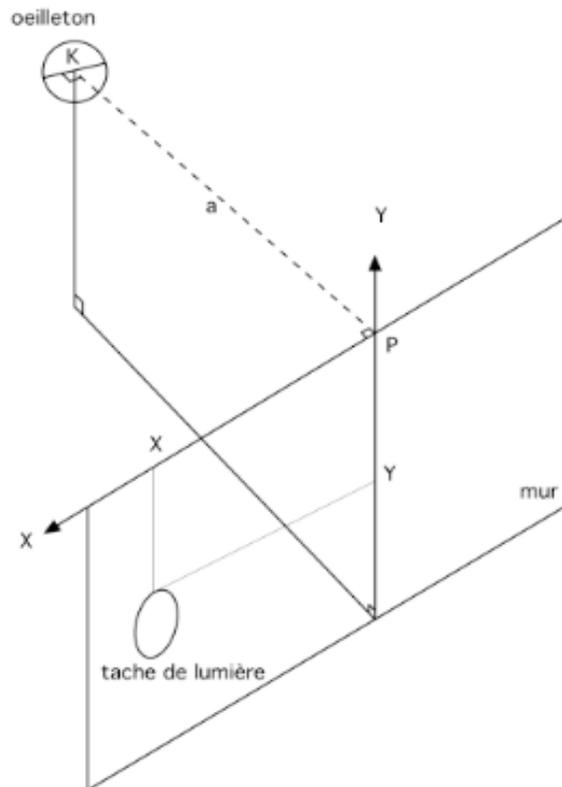


Figure 3

b) Imaginons maintenant que l'œilleton vertical ne soit pas parallèle au mur (fig. 4) ; appelons D la déclinaison gnomonique du mur où se projette la tache de lumière et D' la

déclinaison gnomonique de l'œilleton. Soit a la distance entre le centre de l'œilleton et le mur (a est perpendiculaire au mur).

Les coordonnées X et Y de l'enveloppe de la tache de lumière, depuis le pied du style droit fictif P , s'obtiennent par (axe des X vers la droite, Y vers le haut) :

$$X = [a'(\tan(A + dA) - \tan D)/(1 + \tan(A + dA) \tan D)] - r \sin \alpha' \cos(D - D')$$

$$Y = -[a' \tan h'v/(\cos(A + dA - D))] + r \cos \alpha' \cos(D - D')$$

avec: $a' = a + r \sin(D - D') \sin \alpha'$

Exemple : en prenant comme paramètres $\phi = 48^\circ$, $D = +30^\circ$, $D' = -40^\circ$, $a = 300$ cm, $r = 1$ cm, $R = 0^\circ 16'$, $H = 20^\circ$, $\delta = +15^\circ$, $\text{refra} = 46''$, on a :

$$\alpha' = 190^\circ$$

$$X = 18,19 \text{ cm}$$

$$Y = -404,45 \text{ cm}$$

$$\alpha' = 320^\circ$$

$$X = 19,41 \text{ cm}$$

$$Y = -396,55 \text{ cm}$$

$$\alpha' = 50^\circ$$

$$X = 15,73 \text{ cm}$$

$$Y = -398,57 \text{ cm}$$

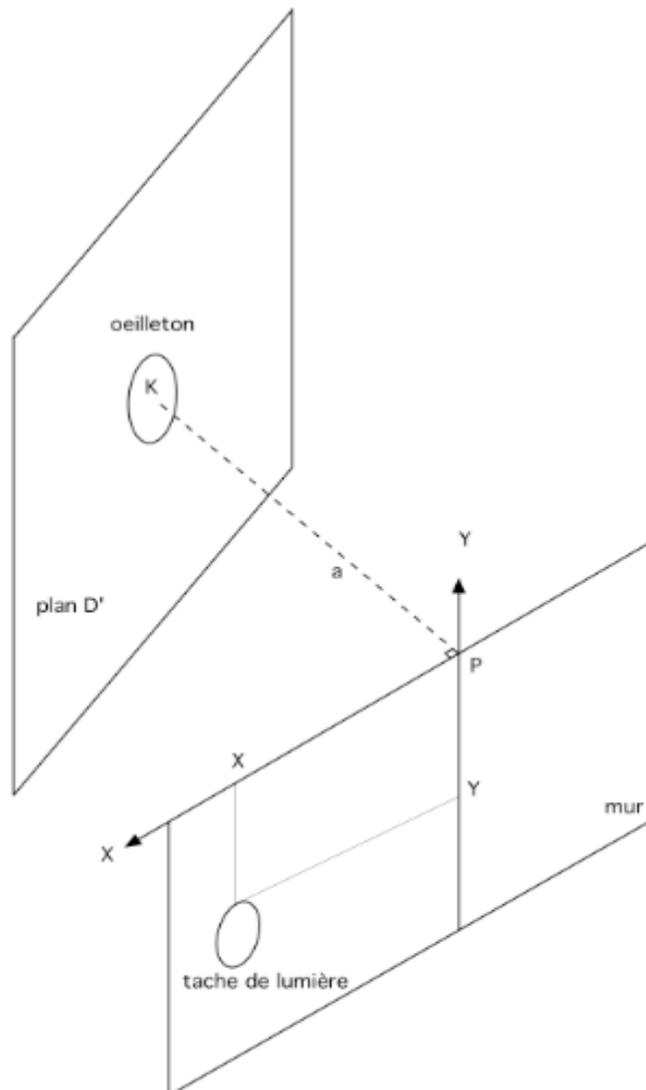


Figure 4 ►

4 – Cas d'un œilleton horizontal

a) image au sol:

Dans le cas d'un œilleton horizontal, placé sur un toit par exemple (fig. 5), à la distance a du sol, on obtient les coordonnées X et Y de la tache de lumière au sol depuis le nadir P du centre de l'œilleton par (axe des X vers l'Est et axe des Y vers le Nord) :

$$X = a \sin (A + dA) \cotan (h'v) - r \sin \alpha'$$

$$Y = a \cos (A + dA) \cotan (h'v) + r \cos \alpha'$$

Exemple : en prenant les paramètres $\phi = 48^\circ$ et $\delta = -23^\circ,443$ mais en supposant que l'œilleton est horizontale de rayon 1,5 cm à 800 cm du sol, on a :

$H = 0^\circ$; $A = 0^\circ$; $h = 18^\circ,557$; $\text{refra} = 0^\circ 2' 58''$; $h'v = 18^\circ,60639$; $R = 0^\circ 16' 16''$. Si $\alpha' = 60^\circ$, on a $h'v = 18^\circ,47084$; $dA = -0^\circ,24764$; d'où $X = -11,65$ cm et $Y = 2395,73$ cm. La tache elliptique mesure 77,4 cm sur 26,7 cm.

Si $\delta = +10^\circ$ et
 $H = -35^\circ$,
 on a pour $\alpha' = 150^\circ$:
 $X = -672,22$ cm
 et
 $Y = 569,53$ cm.

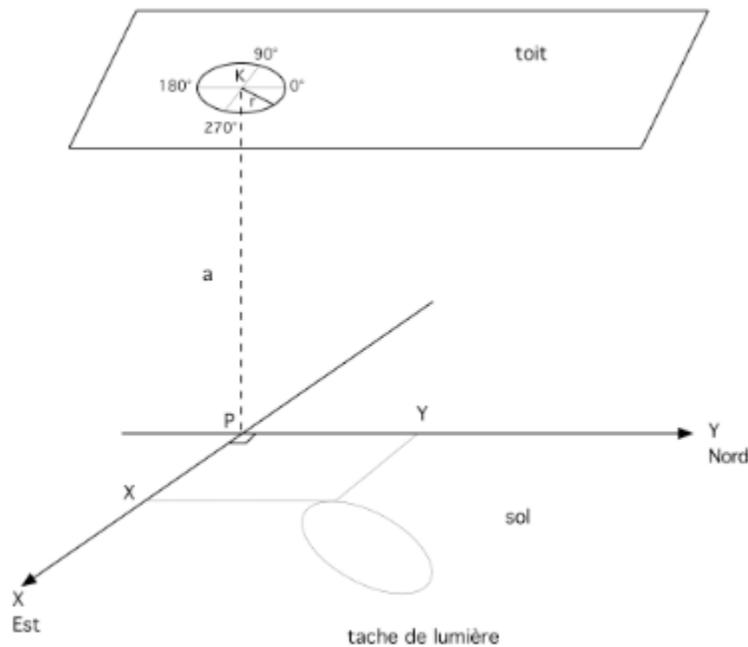


Figure 5 ►

b) image sur un mur:

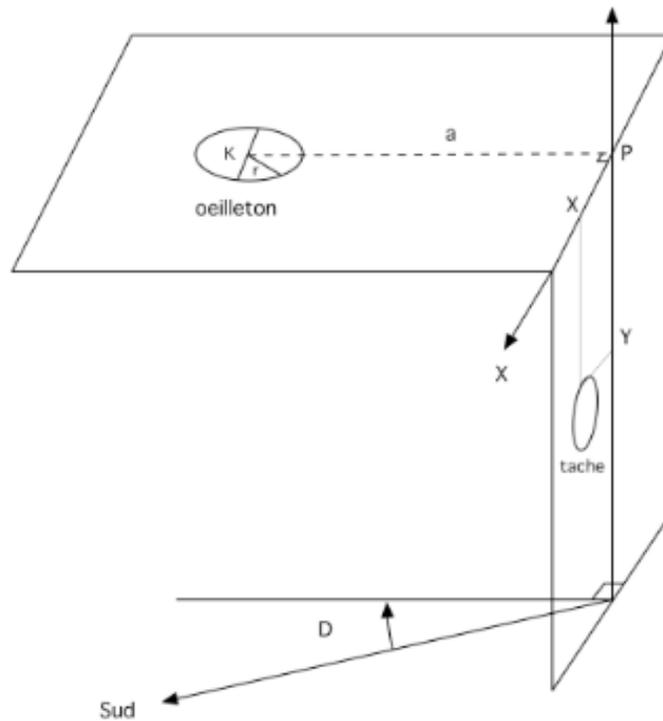
Si la surface sur laquelle se projette la tache de lumière est un mur de déclinaison gnomonique D , l'œilleton étant situé à la distance a du mur (fig. 6), on obtient les coordonnées de la tache de lumière depuis le point P , intersection de la droite passant par le centre de l'œilleton et le mur (axe des X vers la droite et axe des Y vers le haut) par :

$$X = [a' \tan (A + dA - D)] - r \sin \alpha'$$

$$Y = [-a' \tan (h'v)/\cos (A + dA - D)] + r \cos \alpha'$$

avec $a' = a - r \cos \alpha'$

Exemple : en prenant les paramètres $\phi = 48^\circ$, $D = 30^\circ$, $r = 1,5$ cm, $a = 900$ cm, $R = 0^\circ 16' 16''$ et $\delta = -5^\circ$ et $H = 20^\circ$, on obtient avec $\text{refra} = 0^\circ 2' 58''$ et $\alpha' = 230^\circ$: $X = -84,51$ cm et $Y = -619,87$ cm.



5 – Cas d'un œilleton polaire : image sur un mur

Imaginons un cadran solaire vertical (fig. 7) muni d'un style polaire dont l'extrémité se termine par un œilleton de rayon r , de centre K , situé à la distance $PK = a$ du mur déclinant (l'œilleton est dans la continuité du style, donc polaire). L'inclinaison de l'œilleton sur la sous-styloire est égale à f , avec $\sin f = \cos \phi \cos D$. L'angle tabulaire de la sous-styloire S' se calcule par : $\tan S' = \sin D / \tan \phi$.

Les coordonnées X et Y de l'enveloppe de la tache de lumière, depuis le pied du style droit P , s'obtiennent par (axe des X vers la droite, Y vers le haut) :

$$X = [a'(\cos D \tan (A + dA) - \sin D) / (\cos D + \tan (A + dA) \sin D)] + dx$$

$$Y = -[a' \tan h'v / (\cos (A + dA - D))] + dy$$

avec $a' = a - r \sin f \cos \alpha'$

$$dx = -r \cos f \sin (\alpha' + S'); \quad dy = r \cos f \cos (\alpha' + S')$$

Exemple : le cadran solaire de l'observatoire Flammarion de Juvisy a comme paramètres : $\phi = 48^\circ 41' 37''$, $D = +6^\circ 57'$, $a = 57,2$ cm, $r = 1$ cm. Calculons les dimensions de la tache de lumière le jour de l'équinoxe à midi vrai ($H = 0^\circ$, $\delta = 0^\circ$) en prenant $R = 0^\circ 16'$:

$\alpha' = 180^\circ$; $A = 0^\circ$; $h = 41^\circ,30639$; réfraction = $0^\circ 1' 9''$; $h_v = 41^\circ,32558$; $h'_v = 41^\circ,59225$; $dA = 0^\circ$; $a' = 57,85524$ cm ; $dx = 0,07987$; $dy = -0,75119$; d'où $X = -6,97261$ cm et $Y = -52,48361$ cm.

$\alpha' = 0^\circ$	$X = -6,97261$ cm	$Y = -48,86920$ cm.
$\alpha' = 90^\circ$	$X = -8,08385$ cm	$Y = -50,78817$ cm.
$\alpha' = 270^\circ$	$X = -5,86192$ cm	$Y = -50,55186$ cm.

En calculant l'intégralité des points, on obtient une tache de lumière de 3,6 cm de long sur 2 cm de large environ. Il est évidemment possible de simuler la tache de lumière tout au long d'une journée : pour une heure et une déclinaison données, on fait varier α' de 0° à 360° de un en un degré. On pourra également vérifier que la tache de lumière en été peut être assez elliptique.

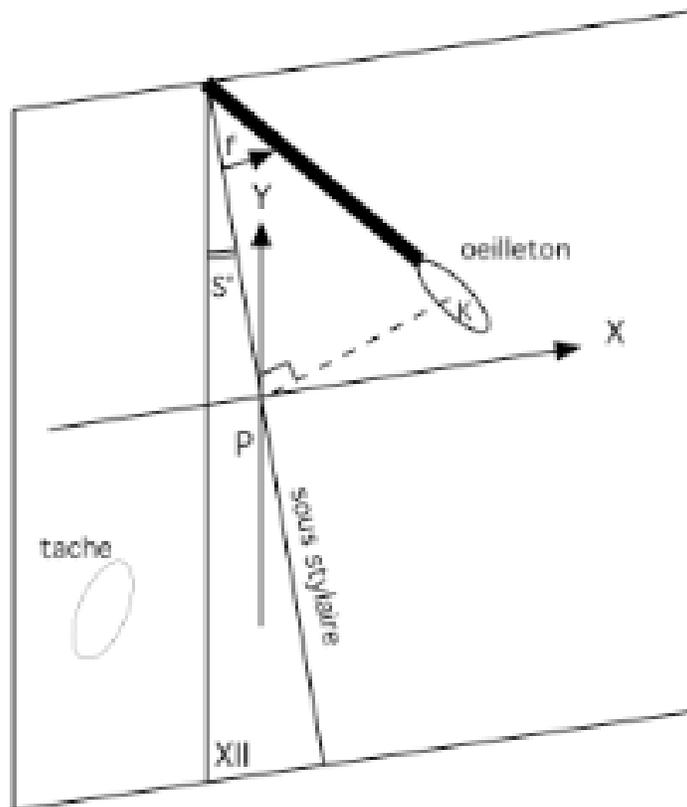


Figure 7

⇒ Dans la version CDrom de *Cadran Info* vous trouverez en annexe :

Les 7 programmes de calcul.

Ces programmes sont présentés dans l'article de Sébastien Bériot : **14- Programme tache de lumière**





Œilleton elliptique à Loupian

Denis Savoie

Au mois de janvier 2011, l'artiste islandais Sigurdur Arni Sigurdsson¹ est venu me trouver pour son projet d'une méridienne placée dans un collège à Loupian, petite ville située près de l'étang de Thau, à côté de Sète.

Son idée était la suivante : un mur épais, légèrement orienté Sud-Est, doit comporter une ouverture d'une certaine forme, de façon à ce qu'à midi vrai, le jour des équinoxes, l'image du Soleil au sol soit un cercle parfait de 50 cm de diamètre. Quelles sont les dimensions et les caractéristiques de cet œilleton ?

On sait que l'image au sol d'un œilleton circulaire éclairé par le Soleil est une ellipse, dont on sait calculer les dimensions. Mais la réciproque est beaucoup plus ardue, d'autant plus qu'ici deux paramètres viennent compliquer le problème : l'œilleton est déclinant et possède une épaisseur importante. Pour être tout à fait précis, il faut aussi tenir compte de la réfraction et du diamètre du Soleil. Enfin ultime contrainte : la méridienne devait être terminée pour l'équinoxe de printemps.

Intuitivement, on imagine que seul un œilleton elliptique va engendrer au sol une tache circulaire. Il faut donc en établir la théorie avec un Soleil possédant un diamètre apparent, puis chercher ses dimensions afin qu'il engendre un cercle à midi aux équinoxes.

1 – Théorie d'un œilleton elliptique

Imaginons un mur sans épaisseur, de déclinaison gnomonique D , percé d'un trou elliptique incliné d'un angle i par rapport à la verticale passant par son centre K (fig. 1).

L'inclinaison est comptée positivement dans le sens trigonométrique pour un observateur regardant l'œilleton depuis le Sud.

L'ellipse est définie par son demi-grand axe a et son demi-petit axe b . Pour repérer un point K' qui se déplace sur l'ellipse dans le sens trigonométrique (mêmes conditions que pour i), on utilise un angle α' , compté depuis l'axe des y_v (dirigé vers le zénith) coïncidant avec le demi-petit axe. La distance r de ce point au centre de l'ellipse est donnée par :

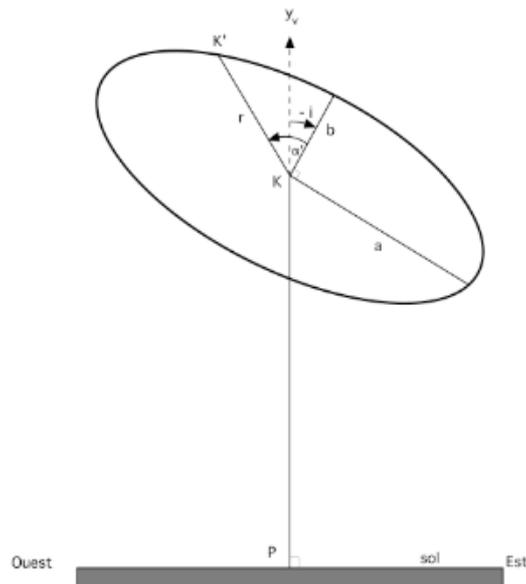


Fig. 1 : paramètres d'un œilleton elliptique

¹ <http://www.sigurdurarni.com/>

$$r = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 \sin^2 \alpha' + a^2 \cos^2 \alpha'}}$$

Rappelons que $b = a \sqrt{1 - e^2}$, où e est l'excentricité de l'ellipse. Cette formule sera utile par la suite. Le principe du calcul est de balayer le pourtour de l'ellipse par une droite issue du Soleil, passant par l'œilleton et interceptant le sol où elle forme une tache.

Appelons PK la hauteur du centre de l'œilleton au-dessus du sol et faisons passer par P un système d'axes, les x étant dirigés vers l'Est et les y vers le Nord. C'est depuis P que sont calculées les coordonnées x et y de l'enveloppe de la tache.

On calcule celles-ci par :

$$x = [\text{PK} + r \cos(\alpha' + i)] \cot h'_v \sin \Delta A - [r \sin(\alpha' + i) \cos D]$$

$$y = [\text{PK} + r \cos(\alpha' + i)] \cot h'_v \cos \Delta A + [r \sin(\alpha' + i) \sin D]$$

Les quantités h'_v et ΔA sont respectivement la hauteur apparente du Soleil (affectée de la réfraction et du demi-diamètre solaire) et l'azimut d'un bord du Soleil².

Rappels : soit R le demi-diamètre du Soleil ; aux équinoxes on a $R = 0^\circ 16' 4''$. On appelle h la hauteur du photocentre du Soleil, h_v sa hauteur apparente (c'est-à-dire affectée par la réfraction) et h'_v la hauteur apparente d'un bord du Soleil.

$$h_v = h + \text{réfra} \quad h'_v = h_v + R \cos \alpha \quad \alpha = \alpha' - 180^\circ.$$

La réfraction, en minutes de degré, se calcule par : $\text{refra} = 1.02 / [\tan(h + 10.3/(h + 5.11))]$

Enfin on a :

$$\cos \Delta A = (\cos R - \sin h_v \sin h'_v) / (\cos h_v \cos h'_v)$$

Si l'on travaille avec un Soleil ponctuel, il suffit de faire $R = 0^\circ$. De plus, comme on cherche ici la hauteur h du Soleil à midi vrai aux équinoxes, on a $h = 90^\circ - \phi$.

Exemple : prenons à une latitude $\phi = 43^\circ 27'$ un œilleton dont le centre $\text{PK} = 430$ cm de haut sur un mur déclinant de -40° avec une inclinaison de $-47^\circ,4083$. Prenons comme dimensions de l'ellipse $a = 43$ cm et $b = 20,02$ cm et travaillons avec un Soleil ponctuel non réfracté (donc $\Delta A = 0^\circ$). Pour $\alpha' = 190^\circ$, on obtient : $h'_v = 46^\circ,55$ et $r = 20,26068$. D'où $x = -9,4286$ cm et $y = 384,185$ cm.

2 – Calcul de l'œilleton de Loupian

Les paramètres de la méridienne de Loupian sont les suivants :

Latitude = $43^\circ 26' 53''$
 Hauteur du mur = 360 cm
 Epaisseur du mur = 34 cm
 Déclinaison gnomonique = $-15^\circ 49'$

² Voir le nouvel article de D. Savoie dans ce Cadran-Info n° 24: «Œilleton et tache de lumière ». Ce dernier remplace «Œilleton, tache de lumière et méridienne », paru dans Cadran-Info n° 13, mai 2006, p. 87-93. Dans cette première édition, une faute de frappe entraîne la confusion entre la réfraction et le demi-diamètre du Soleil. Les formules données sont cependant tout à fait valables pour calculer les dimensions d'une tache de lumière issue d'un œilleton, sauf dans les cas limites où le Soleil fait un angle de 80° avec la normale à l'œilleton.



◀ Fig. 2 : coffrage du mur et emplacement du cylindre

Fig. 3 : gabarit du cylindre elliptique incliné ▶



Pour rechercher les dimensions de l'œilleton afin qu'il produise une tache de 25 cm de rayon, il faut utiliser la puissance de calcul d'un ordinateur et procéder par approximations. Bien entendu, on doit tâtonner au début pour entrer des valeurs d'amorçage a_0 , e_0 et i_0 , en partant du principe que, pour une valeur du demi-grand axe, on va faire varier l'excentricité et, toujours pour la même valeur, l'inclinaison.

On doit faire :

$$a = a_0 + 0,005; \quad e = e_0 + 0,005; \quad i = i_0 + 1'$$

On obtient donc, pour une itération, c'est-à-dire pour un balayage de l'œilleton elliptique en α' de 1° en 1° , les valeurs de x et de y ; on doit d'ailleurs modifier y en le rapportant au centre théorique de la tache, en faisant $(y - a \operatorname{tg} \phi)$. Appelons dR la différence entre le rayon du cercle calculé et le rayon du cercle théorique : tant que $dR + |x^2 + y^2 - 25| < 10$, l'itération doit continuer. On peut bien entendu affiner de plus en plus le pas des quantités a_0 , e_0 et i_0 .

Pour Loupian, on a ainsi calculé³ que : $a = 28,4 \text{ cm}$; $b = 21,083 \text{ cm}$; $i = -50,728$ avec le centre de l'ellipse placé à 285 cm du sol.

Il a ensuite fallu déterminer les dimensions et la position du cylindre elliptique incliné qui traverse le mur, et donner au géomètre toutes les valeurs pour l'implantation définitive de la tache circulaire au sol. On a également utilisé une des arêtes du mur qui projette un rideau d'ombre, lequel indique au sol le solstice d'hiver et le solstice d'été.

Finalement tout a été achevé dans les délais et le 20 mars 2011, jour de l'équinoxe, *Sigurdur Arni Sigurdsson* a pu vérifier devant un aréopage d'élèves et de professeurs que la tache de lumière était parfaitement circulaire à midi vrai et recouvrait parfaitement le motif dessiné au sol⁴.

Je remercie très chaleureusement Gérard Baillet et Marc Goutaudier pour leurs vérifications avec Pov-Ray et pour les nombreux échanges que nous avons eus dans ce périple sur la théorie des œilletons.

³ Les calculs ont été faits en incluant la réfraction et le diamètre apparent du Soleil.

⁴ Le problème que l'on peut observer sur ce type de tache solaire est un léger décalage en ordonnée ; car l'instant de l'équinoxe ne tombe pas, sauf exception, à midi vrai local, de sorte que la déclinaison du Soleil a le temps de filer ($1'$ par heure). La déclinaison du Soleil peut ainsi valoir près de $\pm 0^\circ 12'$ à midi vrai, ce qui explique le non-recouvrement parfait du motif au sol.



Fig. 5 : détail de l'œilleton tapissé de mosaïque



Fig. 6 : repère au sol en mosaïque de la tache de lumière aux équinoxes



Fig. 4 : méridienne terminée. On voit nettement au sol les repères du rideau d'ombre aux solstices

Toutes les photos sont de Sigurdur Arni Sigurdsson.

⇒  Dans la version CDrom de *Cadran Info* vous trouverez en annexe :

Le programmes de calcul.

Ce programme sont présenté dans l'article de Sébastien Bérriot : **14- Programme tache de lumière**





Programmes de calcul des taches projetées

Sébastien Bérriot

Présentation des programmes permettant de calculer les dimensions d'une tache de lumière issue d'un œilleton circulaire ou elliptique.

Ces programmes sont offerts dans l'annexe de la version numérique de ce numéro spécial de Cadrans Info.

Les programmes

Ils ont été écrit par Sébastien Bérriot en version Excel, et reposent sur :

- les formules de Denis Savoie. Elles sont à retrouver dans ses articles : "12-Œilleton et tache de lumière" pour un œilleton circulaire ; "13- Méridienne à œilleton elliptique de Loupian" pour un œilleton elliptique à projection circulaire aux équinoxes.

- les mêmes dénominations que celles de D. Savoie :

Titres donnés par D. Savoie dans ses articles	Non du programme
Œilleton et tache de lumière	
2 – Cas d'un œilleton vertical : image au sol (fig. 2)	oeilleton_vertical_image_sol.xls
3 – Cas d'un œilleton vertical : image sur un mur ; a) le mur est parallèle à l'œilleton (fig. 3)	oeilleton_vertical_image_mur_parallèle_o eilleton.xls
3 – Cas d'un œilleton vertical : image sur un mur ; b) mur non parallèle à l'œilleton (fig. 4)	oeilleton_vertical_image_mur_non_parallèle_o eilleton.xls
4 – Cas d'un œilleton horizontal a) image au sol (fig. 5)	oeilleton_horizontal_image_sol.xls
4 – Cas d'un œilleton horizontal b) image sur un mur (fig. 6)	oeilleton_horizontal_image_mur.xls
5 – Cas d'un œilleton polaire : image sur un mur (fig. 7)	oeilleton_polaire_image_mur.xls
Méridienne à œilleton elliptique de Loupian	
2 – Calcul de l'œilleton de Loupian	oeilleton_collège_Loupian.xls

- une simplicité d'emploi : il suffit de documenter les cellules en jaune pour obtenir les résultats et voir un aspect de la tache lumineuse (non à l'échelle) en cliquant sur "feuille2, en bas à droite de chaque feuille de calcul.

Exemple d'utilisation

Vous souhaitez utiliser le programme informatique pour refaire l'exemple donné par Denis Savoie concernant les dimensions de la tache solaire projetée par l'œilleton polaire de l'observatoire de Juvisy. Celui-ci est présenté dans l'article « Œilleton et tache de lumière, paragraphe 5 – Cas d'un œilleton polaire : image sur un mur (fig. 7).

Exemple : le cadran solaire de l'observatoire Flammarion de Juvisy a comme paramètres : $\phi = 48^\circ 41' 37''$, $D = + 6^\circ 57'$, $a = 57,2$ cm, $r = 1$ cm. Calculons les dimensions de la tache de lumière le jour de l'équinoxe à midi vrai ($H = 0^\circ$, $\delta = 0^\circ$) en prenant $R = 0^\circ 16'$:

Le programme à utiliser sera « œilleton_polaire_image_mur.xls ».

Vous entrez les valeurs demandées dans les cellules en jaune. La seule différence entre les valeurs des formules et celles à entrer dans le programme est que dans le dernier cas la déclinaison est en date alors qu'elle est en degré dans les formules. Dans le cas présent il faut donc entrer 21/03/2011 équivalant au $\delta = 0^\circ$ de l'exemple. Les autres paramètres sont inclus dans le programme.

S. Berriot									
CALCUL DES DIMENSIONS D'UNE TACHE LUMINEUSE ISSUE D'UN ŒILLETON CIRCULAIRE A PARTIR D'UN SOLEIL DE DIAMETRE APPARENT.									
CAS D'UN ŒILLETON POLAIRE : IMAGE SUR UN MUR									
Ce programme a été écrit d'après le formulaire de <u>D.Savoie</u>									
Dans la suite, les cases en doivent être renseignées									
PARAMETRES DU PROBLEME									
date de référence (1er Janvier 2000 à 12h00 TU)		01/01/2000		heure solaire vraie		(en degré)	0		
date pour laquelle on effectue les mesures		21/03/2011				(enradian)	0		
nombre de jours écoulés depuis le 1er Janv. 2000		4097		distance du plan à l'œilleton a		(en cm)	57,2		
LATITUDE		degré	minute	seconde	radian	rayon de l'œilleton r	(en cm)	1	
		48	41	37		Déclinaison du mur D		(en degré)	6,95
		48,69			0,85			(en radian)	0,12
epsilon		(en degré)	23,44						
		(enradian)	0,41						

Les résultats obtenus sont :

° par les formules

$\alpha' = 180^\circ$; $A = 0^\circ$; $h = 41^\circ,30639$; réfraction = $0^\circ 1' 9''$; $h_v = 41^\circ,32558$; $h'_v = 41^\circ,59225$; $dA = 0^\circ$; $a' = 57,85524$ cm ; $dx = 0,07987$; $dy = -0,75119$; d'où $X = -6,97261$ cm et $Y = -52,48361$ cm.

et

$\alpha' = 0^\circ$	$X = -6,97261$ cm	$Y = -48,86920$ cm.
$\alpha' = 90^\circ$	$X = -8,08385$ cm	$Y = -50,78817$ cm.
$\alpha' = 270^\circ$	$X = -5,86192$ cm	$Y = -50,55186$ cm.

° par le programme

alpha'	alpha	h'v	dA	a'	dx	dy	X	Y
(en degré)	(en degré)	(en degré)	(en degré)	(en cm)				
179	-1	41,8	-0,01	57,86	0,07	-0,75	-6,83	-52,87
180	0	41,8	0	57,86	0,08	-0,75	-6,81	-52,86
181	1	41,8	0,01	57,86	0,09	-0,75	-6,79	-52,86

et

0	-180	41,27	0	56,54	-0,08	0,75	-6,97	-49,23
90	-90	41,53	-0,36	57,2	-0,75	-0,08	-8	-51,16
270	90	41,53	0,36	57,2	0,75	0,08	-5,78	-50,92

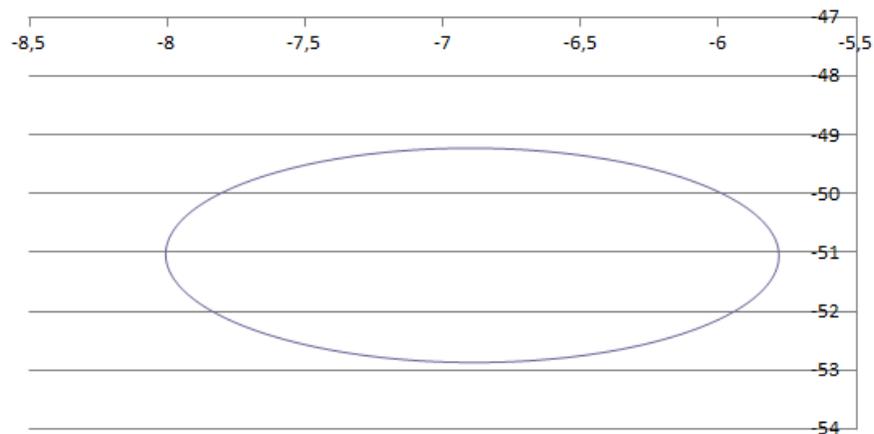
Les légers écarts entre les résultats des formules et ceux du programme sont dus au fait que pour le calcul de la déclinaison (δ), S. Berriot passe par la date du jour et non par la valeur en degré. Les déclinaisons sont calculées pour 12h00 UT.

D. Savoie a contrôlé les résultats donnés par les programmes, il les valide totalement.

Aspect de la tache lumineuse

En cliquant sur « feuille 2 » en bas de page Excel.

tache lumineuse



⇒ Dans la version CDrom de *Cadran Info* vous trouverez en annexe :

Les 7 programmes de calcul





Sommet de style droit

Pierre Joseph Dallet

Etude de P.J Dallet sur l'ombre et la pénombre projetées par le sommet d'un style droit. La version correspondante de son logiciel AlogoSola accompagne l'article.

Sommet de style droit, son ombre projetée, sa pénombre

Un style ponctuel est un style polaire dont la longueur est réduite à un point.

Un style polaire est une fine tige, par exemple en laiton, en cuivre, en acier inoxydable, parallèle à l'axe de rotation de la Terre. On peut le mettre en place la nuit en lui faisant viser l'Etoile Polaire, mais l'erreur de position pourra approcher le degré, il existe d'autres méthodes plus précises.

Le style droit est le segment de droite qui sépare le style ponctuel du plan du cadran. Si le cadran est à style ponctuel porté par un style droit, et si le style droit est pointu, le cadran sera faux. En raison du diamètre angulaire du Soleil, $0^{\circ} 32'$, un point n'aura pas d'ombre sur le plan du cadran.

Pour améliorer la qualité de lecture des indications produites par un cadran à style ponctuel opaque, nous pourrions placer au sommet du style droit un petit disque opaque ayant pour centre le style ponctuel (Fig. 1). Remarquons que le disque opaque pourra être porté par n'importe quel soutien.



Figure 1 : Style ponctuel, porté par un style droit, entouré d'un disque.

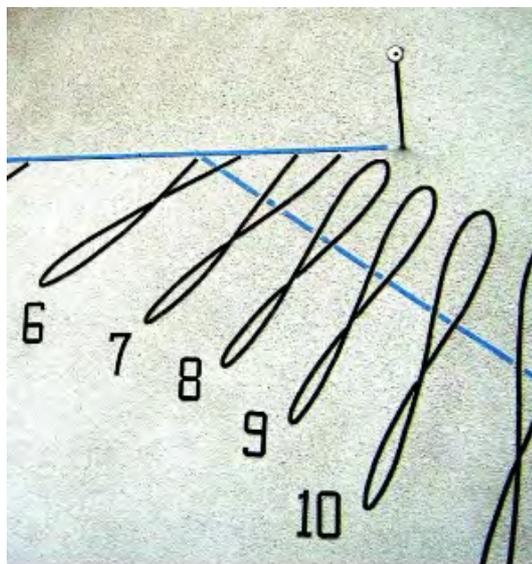


Figure 2 : Exemple de cadran avec un style ponctuel entouré d'un disque parallèle au plan du cadran.

Dans les calculs la longueur du style droit vaut 1. A la fin des calculs, les valeurs des coordonnées de chaque point des graphismes du cadran sont multipliées par la valeur réelle du style droit. Dans le même ordre d'idées, les coordonnées cartésiennes des points des graphismes sont calculées avec un axe des x horizontal, positif vers la droite, un axe des y vertical (géométriquement), positif vers le haut (Fig. 2).

Fiche du cadran de la figure 2

Cadran n° 1 : Le grand cadran du pignon aux courbes en 8.

Latitude : 45° 32'N. , Longitude 2° 19' E.

Département : Corrèze

Localité : Ussel

Emplacement : Jardin botanique privé.

Matériaux de fabrication : Morceaux de céramique incrustés dans l'enduit du mur. Carreaux de 2cm de côté, noirs pour les lignes de temps universel, séparés par d'un carreau beige marquant le 1er de chaque mois. Bleus pour l'équatoriale et la ligne d'horizon.

Dimensions : 6 m*3,80 m.

Date de réalisation : septembre 1982.

Famille : à style ponctuel.

Type : Plan à style ponctuel.

Position : Vertical, SUD-EST (D= - 46°)

Style : Style droit de 1 m, surplombé d'un disque de 7 cm de diamètre parallèle au plan du mur. Ces pièces sont en acier inoxydable.

Renseignements procurés par le cadran : Lignes de temps universel en forme de huit, divisées en segments d'un mois, midi vrai local, azimuth SUD, ligne des équinoxes, ligne de hauteur zéro.

Inscriptions : Devise : HORA SIT OPTIMA CUNCTIS

Particularités : Entièrement conçu et réalisé par P.-J. DALLET. Tracé à partir d'une liste des coordonnées rectangulaires des points des lignes obtenues par calcul automatisé. Un des premiers cadrans obtenus par ce procédé.

Mode de tracé : Point par point : Détermination de l'angle horaire et de la déclinaison du Soleil, transformation en azimuth et hauteur, puis en coordonnées rectangulaires ayant pour origine le pied du style droit avec un axe vertical et l'autre horizontal. Environ un point tous les dix jours pour les lignes en huit, deux ou trois points pour les lignes droites.

Nous allons maintenant comparer les limites des taches d'ombre et de pénombre du disque porte-ombre à 11h, heure vraie en été.

Les tracés de ces courbes sont propres au cadran dont la fiche est donnée ici. Ces courbes ont des formes variables avec les paramètres du cadran et du disque porte-ombre.

En gris, ellipse du centre, zone d'ombre pure observée. Dessin par la méthode simplifiée.

La tache est elliptique. Le tracé des limites de la tache est obtenu approximatif, mais les calculs sont faciles et simples.

Le cercle bleu est la projection du disque porte-ombre. Il est égal à ce disque, mais c'est un dessin mathématique, il n'est pas observable sur le plan du cadran.

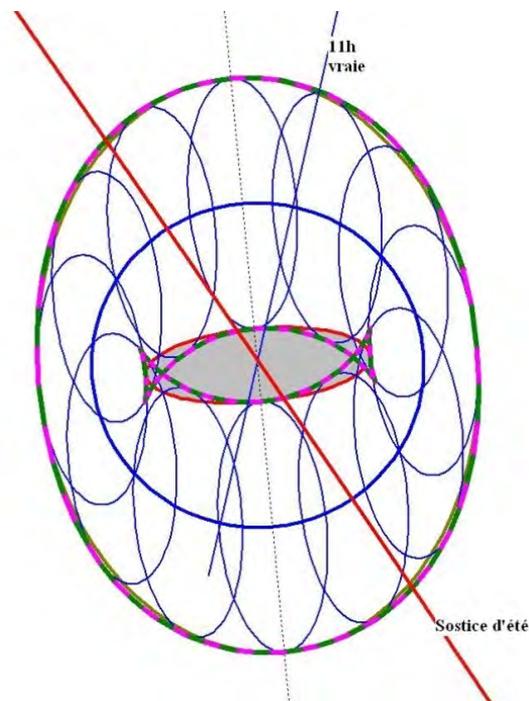


Figure 3

En gris, toroïde du centre, zone d'ombre pure observée, dessinée par la méthode rigoureuse.

La tache est l'intérieur d'un toroïde. Le tracé est exact (non prouvé expérimentalement) Les calculs sont difficiles et complexes. Il faut bien regarder pour remarquer la différence entre la zone d'ombre pure de l'ellipse et celle du toroïde.

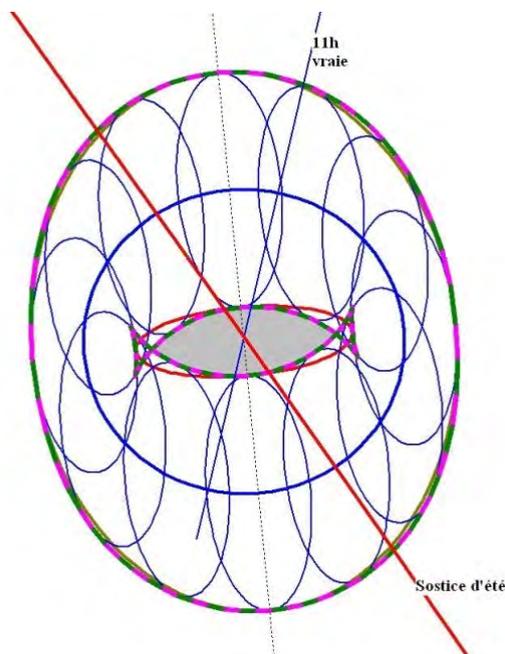
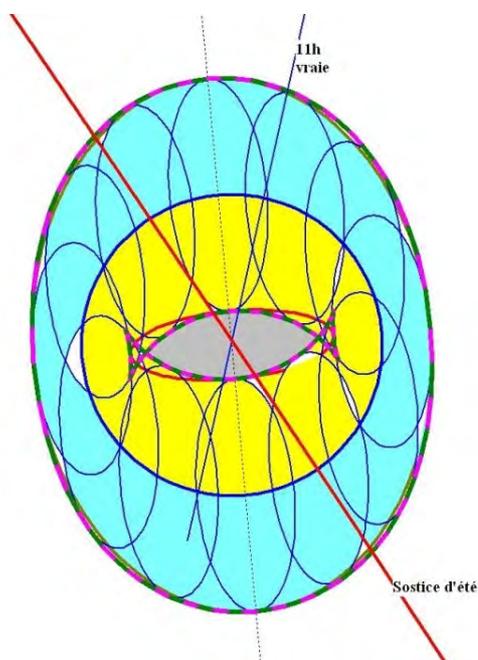


Figure 4 ►

Figure 5 ▼



Dessin cumulant la méthode simplifiée et la méthode rigoureuse. **Au centre en gris** la zone d'ombre pure. **En jaune** la projection du disque porte-ombre.

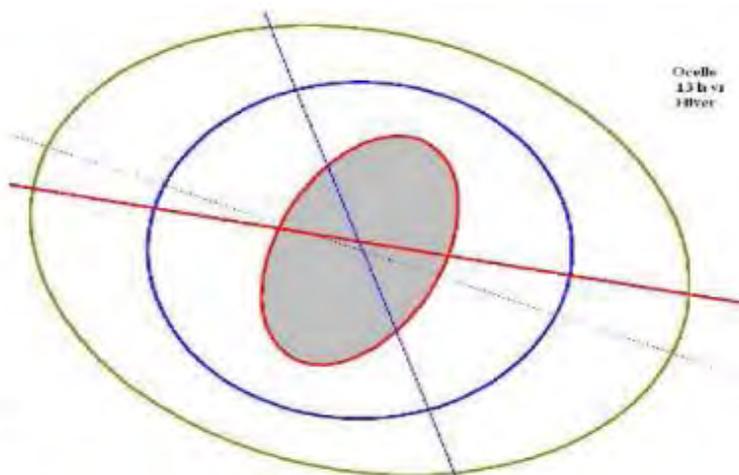
Les petites ellipses bleues ayant leur centre sur la circonférence du disque porte-ombre sont des coupes de cônes ayant pour sommets des points sur le bord du disque-ombre. Leur ouverture au sommet est le diamètre apparent du Soleil. Leurs axes forment avec le plan du cadran un angle égal à la hauteur du Soleil au-dessus du cadran. Les grands axes de ces ellipses sont parallèles à la direction de l'ombre du style droit. Ces petites ellipses sont tangentes aux limites extrêmes des pénombres du bord du disque.

La courbe obtenue est en deux parties fermées, externes et internes. Elle porte le

nom de toroïde.

Comparons maintenant ocelles et toroïdes pour 13h, heure vraie, aux solstices et aux équinoxes.

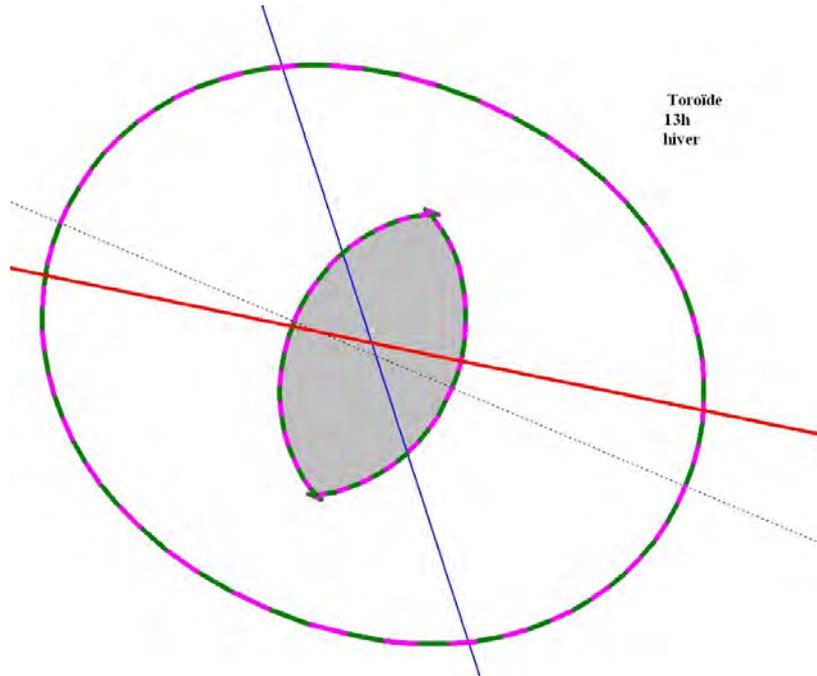
Ci-contre, figure 6, Ocelle à 13h vraie en hiver. L'ellipse grise centrale est l'ombre totale. Nous remarquerons que le centre



des ellipses ne coïncide pas avec le point d'intersection de la ligne d'heure et de la ligne du solstice d'hiver. Ceci est dû au fait que l'ocelle est calculé en tenant compte de la réfraction atmosphérique, et que les lignes d'heure n'en tiennent pas compte.

Ci-contre figure 7 :
 Toroïde à 13h, heure vraie
 en hiver
 La tache est la
 même que la figure 6 mais
 mathématiquement elle est
 exacte.

Figure 7 ►



Ci-dessous figure 8 : Ocelle à 13h, heure vraie aux équinoxes. Il n'existe plus d'ombre pure, la lecture est à faire par la pénombre.

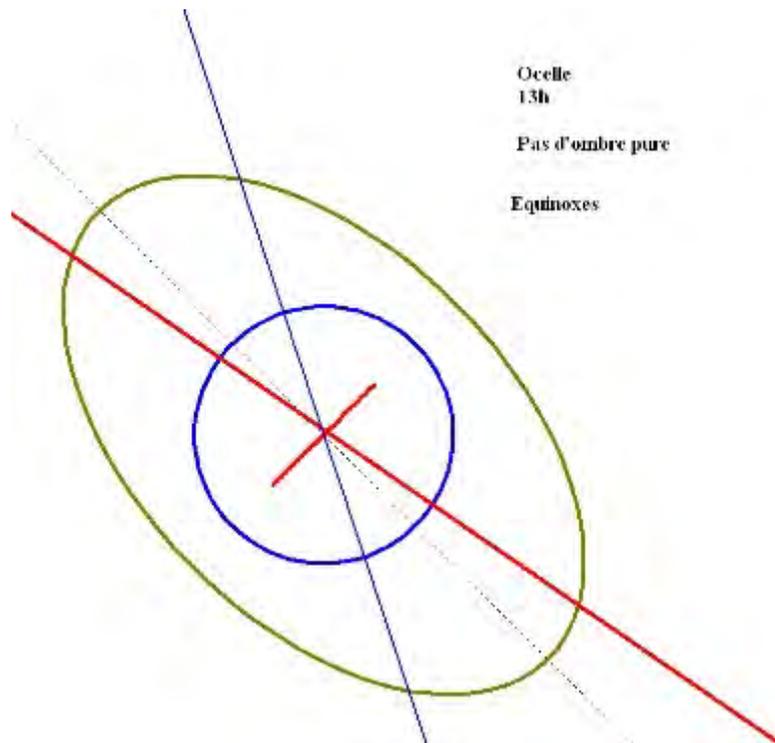


Figure 8

Page suivante : Toroïde à 13h, heure vraie, aux équinoxes (fig. 9).

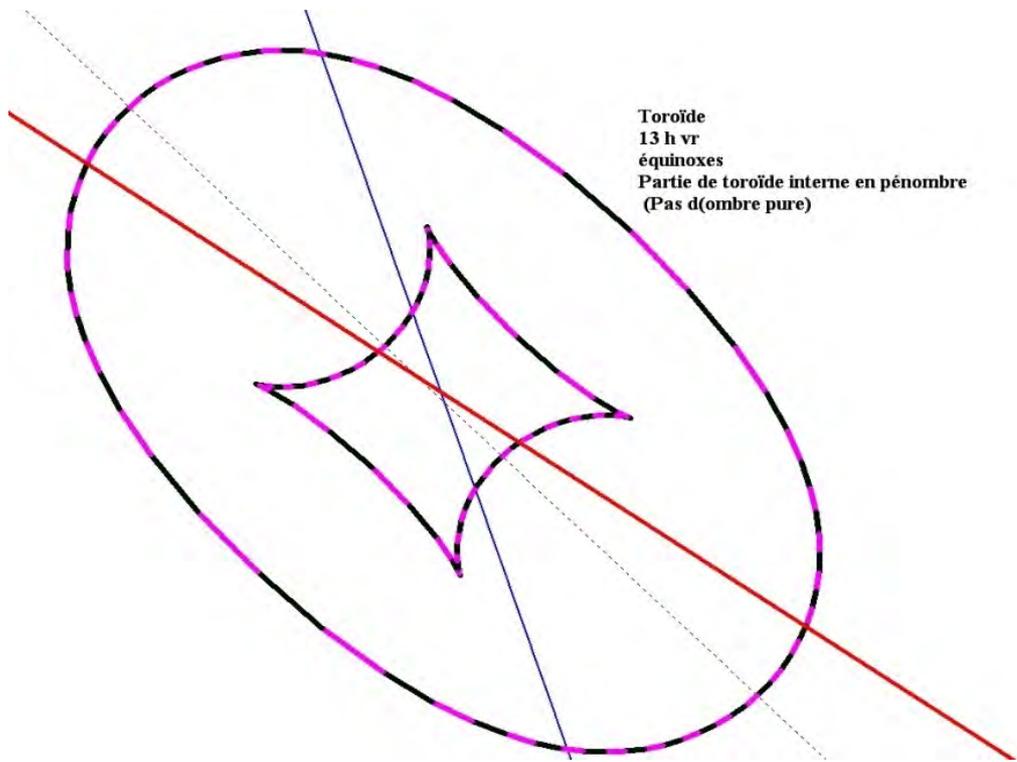


Figure 9

Ocelle et toroïde cumulés (figure 10). En plus, ont été dessinées quelques petites ellipses centrées sur le bord du disque, tangentes au toroïde. Elles montrent pourquoi la partie centrale au toroïde est en pénombre.

Nous remarquerons que le grand axe de la grande ellipse coïncide avec le grand axe de la partie externe au toroïde. Il en est de même pour le petit axe de la grande ellipse.

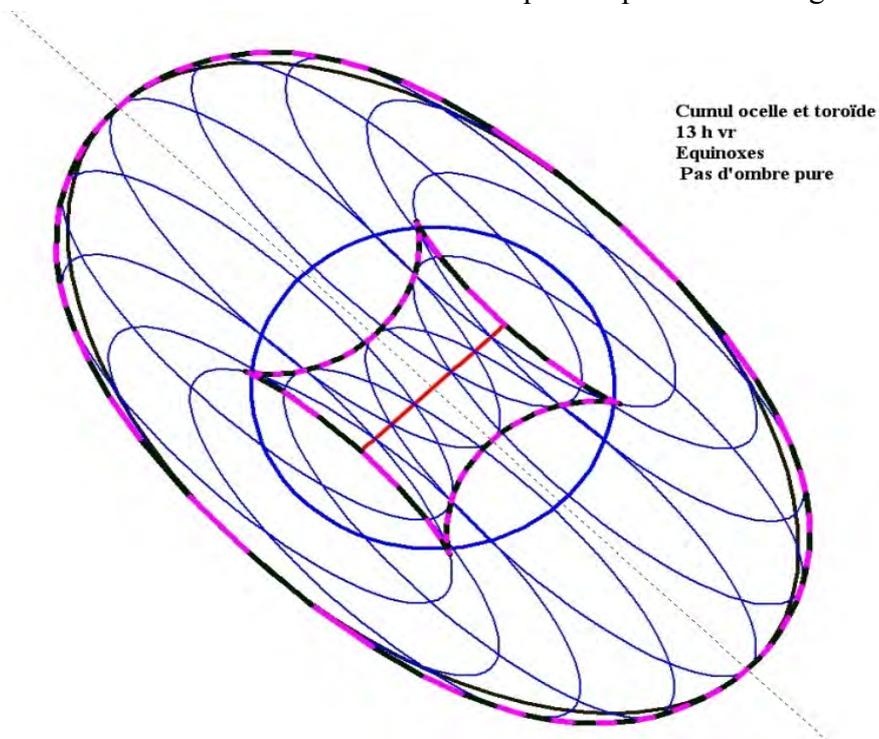


Figure 10

Figure 11 : mêmes lignes que sur la figure 10, mais sans les lignes de l'ocelle.
 Figure 12 : Ocelle de 13h, heure vraie, au solstice d'été. Absence totale d'ombre pure.

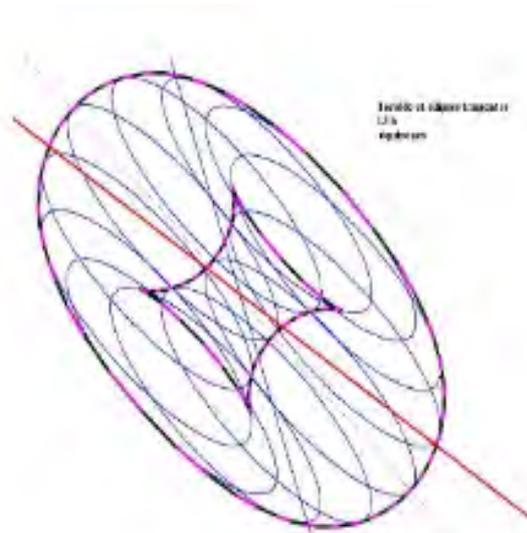


Fig. 11

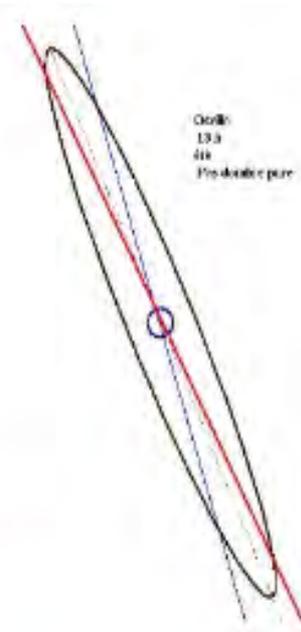


Fig. 12

Figure 13 : Toroïde de 13h, heure vraie, au solstice d'été. Absence totale d'ombre pure.

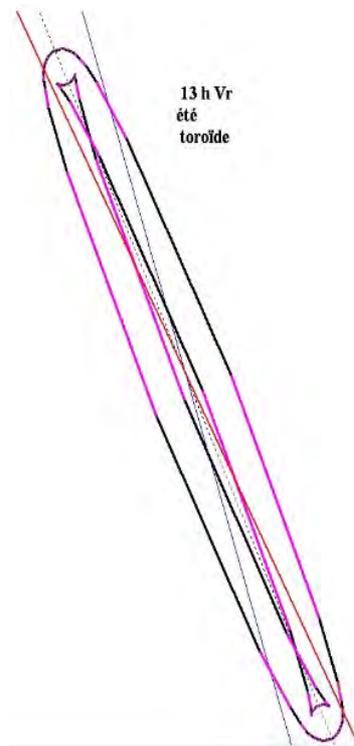


Fig. 13

L'apparence des taches d'ombre du disque dessine une ellipse avec des ombres qui sont de plus en plus pures à mesure que l'on se rapproche des centres des taches. Dans le logiciel AlgoSola, le dessin est composé de trois ellipses et la forme de ces taches avait été programmée dès sa conception. Lorsque qu'il n'existe plus d'ombre pure la tache de cette zone n'est plus tracée. Les ellipses ne sont ni difficiles ni compliquées à programmer. Ce dessin sert à prévoir la dimension du disque entourant le style ponctuel pour que les indications du cadran soient lisibles sur toute sa surface. Ces graphismes ne sont jamais dessinés sur les cadrans.

Mais voilà que de nombreux gnomonistes s'intéressent aux courbes mathématiquement exactes des limites des pénombres, ils ont raison.

Sur les graphismes obtenus, les courbes dans ce cas sont conformes simplement à des théories mathématiques. A l'œil on ne voit que la tache grise centrale. Il faut obtenir avec une loupe des images du Soleil sur le cadran pour savoir quelle partie du Soleil est cachée par le porte-ombre.

Sur les graphismes dessinés par le logiciel, le toroïde est la ligne (double) composée de pointillés longs magenta alternant avec des pointillés longs noirs. La ligne extérieure est proche de l'ellipse de l'ocelle, limite extrême approximative de la pénombre. Ces toroïdes sont beaucoup plus compliqués à tracer que les ellipses.

Pour programmer, les développeurs utilisent des algorithmes prêts et utilisables par de simples copier/coller. Ceci permet de dessiner les graphismes le plus simplement possible puis de les tourner et de les placer par changement de coordonnées.

Les symboles sont les symboles conventionnels ou les équivalents adaptés pour la programmation.

Ces symboles et abréviations sont donnés dans le document « DALLET, Principes_AlgoSola ».

Les algorithmes des graphismes de ce logiciel préparent pour chaque point des graphismes les coordonnées célestes du Soleil sous trois formes :

- Coordonnées équatoriales et horaires : déclinaison De (ou δ) et angle horaire Ah (ou H).
- Coordonnées de la demi-sphère céleste locale : azimut (origine SUD) Az ou A et hauteur au dessus de l'horizon ha ou h .
- Coordonnées célestes au-dessus d'un plan du cadran : YGK dit aussi azimut sur cadran ; et GKS dit aussi hauteur au-dessus du cadran. Les symboles non conventionnels sont tirés d'une épure de base qui, je le regrette, n'est pas conventionnelle non plus.

Sont également utilisées la longitude écliptique vraie (Lv) du Soleil et l'obliquité de l'écliptique (ϵ).

Nous ne donnerons pas toutes les formules, mais simplement celles qui permettent de trouver la voie à suivre.

Dans AlgoSola les calculs des coordonnées des points du toroïde sont effectués deux fois :

- Par dichotomie : nous calculons pour quels angles aux centres des petites ellipses de pénombre, les tangentes aux cercles de projection du disque et à l'ellipse sont parallèles.
- Par la formule ci-dessous.

Si les résultats à une décimale de degré coïncident le résultat est considéré comme exact.

Ce doublage est en place parce qu'il est impossibles de vérifier expérimentalement l'exactitude des tracés.

Calculs

Pour l'ocelle :

Soit

$A1$ une variable auxiliaire.

La variable RayonSoleil valant $0^{\circ}16'$

GKS la hauteur du Soleil au-dessus du cadran

OM1 le segment pied du style droit G / point d'ombre du style ponctuel K le plus éloigné du pied G du style droit.

$A1 = GKS - \text{RayonSoleil}$

$Om1 = 1 / \tan(A1)$

Om2, le segment pied du style droit G / point d'ombre du style ponctuel K le plus proche du pied G du style droit.

$$A1 = GKS + \text{RayonSoleil}$$

$$\text{Om2} = 1 / \tan(A1)$$

Le grand axe de l'ellipse de pénombre du disque sera :

$$\text{GrandAxe} = \text{DemiDiamètreDisque} * 2 * \text{Unité} + (\text{Om1} - \text{Om2}) * \text{Unité}$$

L'unité étant la longueur du style droit.

Le petit axe de l'ellipse, limite pénombre externe, sera

$$\text{PetitAxe} = \text{DemiDiamètreDisque} * \text{Unité} * 2 + (1 / \tan(GKS)) / \cos(GKS) * \tan(\text{RayonSoleil}) * 2 * \text{Unité}$$

Longueur de l'ombre Pied style droit / centre des ellipses

$$\text{Om3} = (\text{Om1} + \text{Om2}) / 2 * \text{Unité}$$

Pour le toroïde

Soit

- atB : l'angle tangent aux courbes / axe des x. Trois droites parallèles : tangente au cercle de projection du disque, tangente à la partie externe du toroïde, tangente à la partie interne du toroïde.
- i_Cercle : l'angle entre l'axe des x et une droite aboutissant à un point de cette ellipse tangent du toroïde. Le centre de la petite ellipse de pénombre est sur le périmètre du cercle porte-ombre projeté.
- tB : l'angle, dans la petite ellipse de pénombre : axe des x / centre de la petite ellipse de pénombre / point du périmètre de la petite ellipse tangent au toroïde.
- Aplatissement : excentricité de l'ellipse
$$\text{Aplatissement} = (1 / \tan(GKS)) / \cos(GKS) * \tan(\text{RayonSoleil}) * 2 / (\text{Om1} - \text{Om2})$$
$$\text{atB} = i_Cercle + 90$$
$$\text{atB} = \text{atB} - \text{Int}(\text{atB} / 360) * 360 + 0.0001$$
$$\text{If } \cos(\text{atB}) > 0 \text{ Then } A1 = 180 \text{ Else } A1 = 0$$
$$tB = \text{Atan2}(1 / \text{Aplatissement}, -\tan(\text{atB})) + A1$$

Les coordonnées des centres de ces petites ellipses C2 seront :

$$X8 = \cos(i_Cercle) * \text{GrandAxe} / 2$$

$$Y8 = \sin(i_Cercle) * \text{GrandAxe} / 2$$

Les coordonnées des points tangents aux toroïdes auront pour coordonnées :

$$X = X8 + \cos(tB) * (\text{Om1} - \text{Om2}) / 2 * \text{Aplatissement} * \text{Unité}$$

$$Y = Y8 + \sin(tB) * (\text{Om1} - \text{Om2}) / 2 * \text{Unité}$$

Connaissant les coordonnées du centre du cercle porte-ombre projeté, il est facile de placer les toroïdes sur le plan du cadran

mardi 22 novembre 2011

⇒  Dans la version CDrom de *Cadran Info* vous trouverez en annexe :

La version d'AlgoSola (7 mars 2012) .

Elle permet de tracer les limites des taches de lumière données par un œilleton.

(4 solutions)

Page 6, option 4, Indications 3090 et 3092

Il faut le préciser car ces cas sont pour gnomonistes avertis.

Dessins obtenus, il faut modifier l'échelle et droper sur le point à grossir.





Œillets du monde

Andrée Gotteland

Voici quelques exemples d'œillets utilisés pour des méridiennes. Non exhaustifs, ils sont issus, ainsi que les photographies, du livre « Les méridiennes du monde et leur histoire » de madame Andrée Gotteland †, avec la permission de son mari, que nous remercions. Les informations sont limitées à la description des œillets.

Cathédrale Saint-Michel-et-Gudule, Bruxelles, Brussel, 1836 (Tome I, page 122)

A. Quetelet traça un grand méridien horizontal de temps vrai dans le pavement de la cathédrale de Bruxelles, au mois de juin 1836. La description, très minutieuse, dans un rapport adressé au Ministre de l'Intérieur a été heureusement sauvegardée par une publication au « Moniteur Belge », dans le Supplément au n° 41, du 10 février 1839.

L'ouverture circulaire, de 3 à 4 cm, est placée dans une plaque métallique, percée dans la partie inférieure de la verrière qui décore le portail et par où passent les rayons du soleil. Placée à 10,50 m environ au-dessus du sol, cette image va se projeter au sol, au moment du solstice d'hiver, à l'autre extrémité de l'église, dont la largeur est de plus de 40 mètres. Vers le moment du solstice d'été, cette image parcourt environ 5 cm par minute, tandis que, pendant le même temps, elle en parcourt plus de 16 cm au solstice d'hiver. Cela fait environ trois millimètres par seconde.

La ligne méridienne est légèrement désaxée par rapport au transept, ce qui montre que la cathédrale n'est pas orientée est-ouest. Sertie dans le dallage, elle traverse la nef, en se dirigeant d'un portail à l'autre. C'est une bande de laiton de 3 mm de largeur, incrustée dans le sol, entre les portails est et ouest. Sa longueur est de 34,28 m.

Cathédrale Notre-Dame, Anvers, Antwerpen 1837 (Tome I, page 124)

L'élégante et large nef, plus grande que celle de Saint-Michel-et-Gudule à Bruxelles, était toute désignée pour recevoir une méridienne horizontale de temps vrai.

Son œillette est plus grande que celui de la cathédrale de Bruxelles. Quetelet écrit:

L'ouverture circulaire, par où passent les rayons solaires, a été calculée de manière que l'image même du Soleil, et non la pénombre, pût se projeter à terre, même à l'époque du solstice d'hiver.

La ligne méridienne de cuivre est légèrement désaxée par rapport au transept, ce qui montre que la cathédrale n'est pas orientée est-ouest. Elle coupe la nef dans sa plus grande largeur. C'est un simple trait gravé dans le sol, composé de pierres noires.



Photo, J. M. Ansel © D. R.

Tous ces travaux furent terminés en 1838. Aujourd'hui, si cette méridienne est toujours dans son état original, il n'en va pas de même pour le premier oculus, qui a souffert des restaurations successives des vitraux. Un second oculus, d'environ 10 cm, existe dans le coin inférieur gauche du même vitrail du transept sud.

La méridienne de Cassini II en 1729 à Paris¹ (Tome I, page 196)

Jacques Cassini (1677-1756), le fils de Jean-Dominique, a été associé très jeune aux travaux de son père, Cassini I. Dès 1711, il lui succède à la direction de l'Observatoire.

En 1712, il traça une petite méridienne de temps vrai qu'il cite dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1738 :

« J'ai tracé une simple méridienne en 1712 dans la salle de l'observatoire qui est au rez-de-chaussée de la terrasse dont la hauteur est de 12 pieds et la longueur au solstice d'hiver de 40 pieds (3,89 m sur 12,99 m) ». Elle était sans doute tracée sur le sol de la grande salle du milieu, appelée Grande Galerie, pièce du premier étage, actuellement parquetée, qui faisait partie de l'appartement qu'habitait l'astronome. Cette salle se trouve sous la salle, dite de la méridienne. L'œilleton devait se trouver au-dessus de la porte qui, en 1712, donnait directement sur le jardin et a été élargie en l'an IX par le Bureau des Longitudes pour livrer passage au télescope de 22 pieds de Dom Noël et de Caroché.

Cassini II commence à s'intéresser à la méridienne de son père en 1729, au moment où l'horloger Sully meurt sans avoir terminé la sienne dans l'église Saint-Sulpice. Il la décrit minutieusement dans un « Mémoire à l'Académie des Sciences » de 1732, ainsi que les procédés employés pour son installation. Il a voulu s'assurer de l'exactitude de la direction de la méridienne, la mesure et trouve des chiffres différents de ceux indiqués par les membres de l'Académie en 1682. Cassini de Thury (Cassini III) raconte dans la *Méridienne vérifiée* comment son père a effectué ses mesures et il écrit :

« Mon père fit d'abord construire quatre règles de fer, de 15 pieds chacune, bien dressées et tendues inflexibles par une règle posée de champ dans presque toute leur longueur. Il s'appliqua particulièrement à les assujettir à une mesure juste. Pour cet effet, il vérifia les toises dont nous étions déjà servis pour d'autres mesures sur l'étalon qui est fixé au pied de l'escalier du Grand Châtelet et les y ayant trouvées parfaitement conformes, il détermina sur le pavé de la grande salle méridienne de l'Observatoire un espace de 10 toises, auquel il ajusta ses règles de fer mises bout à bout ».

Pour la longueur totale de la méridienne, alors que Cassini I avait trouvé 97 pieds 6 pouces 4 lignes (14 044 lignes), Cassini II trouve 97 pieds 5 pouces 0 lignes (14 028 lignes), soit une différence de 16 lignes.

Pour la hauteur du gnomon, alors que Cassini I avait trouvé 30 pieds 7 pouces 1 ligne (4 405 lignes), Cassini II mesure 30 pieds 6 pouces 8 lignes (4 400 lignes), soit une différence de 5 lignes.

Cette différence entre les mesures du père et celles du fils peut s'expliquer par l'utilisation de deux toises différentes, la toise de Picard et la toise du Grand-Châtelet.

La plaque de cuivre pour l'œilleton est ronde, son diamètre représente la millième partie de la hauteur du gnomon, soit 4, 4 lignes.

Le petit diamètre de l'image du soleil au solstice d'hiver est à peu près de la largeur des bandes de marbre, c'est-à-dire 1 pied.

Le marbre fut choisi parce que c'est sur le blanc qu'on distingue le mieux l'image du soleil.

Hôtel de Bauffremont, 75, Paris, vers 1730 (Tome I, page 214)

« Il aurait été curieux de connaître le nom de celui qui a fait tracer une méridienne sur le parquet du salon au premier étage, au moyen de clous dorés » (Vacquier, 1920).

1 Du même auteur « Observatoire de Paris » in *Cadrans de Paris* CNRS éditions, pages 148-155 avec description des méridiennes et des œilletons. Lire également l'article « La méridienne de l'observatoire de Paris » de P. Descamp et S. Barouche in *L'Astronomie* n° 50 mai 2012, pages 38-43 : description et dimensions de la méridienne et de l'œilleton, qualité de la tache projetée, formules de la mesure de l'angle zénithal apparent du centre du soleil.

Dans cet Hôtel, 87, rue de Grenelle, construit pour Paul de Grivel, comte d'Ourouer, de nombreux personnages ont vécu. Mais lequel y a fait installer une méridienne ?

Actuellement, dans le grand salon octogonal du premier étage qui mesure 10,20, sur 7,73 m et donne sur le jardin, existe une méridienne horizontale de temps vrai et de temps moyen.

Elle peut dater de la construction de l'immeuble. Cela correspond à la date où Grandjean de Fouchy a réalisé la méridienne de l'hôtel du Petit-Luxembourg, mais elle pourrait aussi dater du prince de Grimberghe qui a habité l'hôtel de 1742 à 1750 et qui figure, comme Grandjean de Fouchy, sur la liste des membres de la Société des Arts. Lequel de ces personnages a fait installer cette méridienne ?

Un œilleton de 12 mm de diamètre est pratiqué dans une petite plaque en métal, large de 0,12 m, fixée au mur, du côté gauche de la porte-fenêtre, à 2,15 m de hauteur, approximativement, et inclinée de 48° 51'.

Une ligne droite de 6,70 m, partant du bord est entourée, en partie, par une courbe en huit.

La méridienne active mesure 4,67 m, la petite boucle 0,7 m. La largeur maximum de la petite boucle est de 0,105 m et celle de la grande 0,68 m (0,33 m + 0,35 m).

Les mois de l'année sont inscrits en abrégé, au moyen de clous, le long de la méridienne.



Photo, A. Gotteland © D. R

Cour des Cerfs, Château de Versailles, 78, Yvelines, vers 1737 (Tome I, page 221)

Louis XIV et Louis XV portaient aux sciences astronomiques et mathématiques un intérêt bien connu. En 1692, Louis XIV reçut de François Thiery, un superbe cadran solaire qui fut transporté à Versailles.

Deux cadrans solaires étaient disposés dans la Cour des Cerfs et servaient à régler la pendule de Passemont, sur laquelle se basaient toutes les pendules du château.

Un projet de « Cabinets de Chaise » et de « Garde-Robe de veille » ne fut pas suivi d'exécution car on s'était aperçu que la nouvelle construction aurait empêché les rayons du soleil de frapper à midi l'un des deux cadrans.

En effet, la largeur de cette cour, dans la direction nord-sud, n'était pas supérieure à 11 mètres. Son mur nord ne pouvait pas être éclairé toute l'année par les rayons du soleil de midi, arrêtés partiellement en hiver, par le bâtiment peu élevé qui lui faisait face ; ils n'éclairaient donc pas les cadrans solaires.

On décida alors de faire deux méridiennes. On ignore par qui elles furent calculées, mais le nom du sculpteur et la date de son ouvrage sont connus, grâce à la facture conservée.

Les deux méridiennes, verticales de temps vrai en pierre de liais, comportent la même ligne verticale de midi, marquée XII, et sont prolongées par un trait gravé sur un panneau intermédiaire.

Chaque méridienne possède son disque en métal doré, dentelé à l'extérieur et porté par de solides armatures métalliques.



Photo, Ch. Bruckmann © D. R

Ce disque métallique est percé au centre d'un trou de 4 cm. Une pièce métallique, également mobile, percée d'un trou de 1 cm, est fixée à l'arrière du disque par trois vis qui permettent de déplacer le petit trou à l'intérieur du grand, afin d'obtenir un réglage minutieux du point de lumière à midi sur la verticale de la méridienne.

Cathédrale Saint-Étienne, Bourges, 18, Cher, 1757 (Tome I, page 242)

Deux méridiennes de temps vrai ont été calculées par le chanoine Goumet, vérifiées et approuvées par l'Académie des Sciences et par le célèbre astronome Nicolas Delisle: la méridienne horizontale de temps vrai, incrustée dans les dalles du sol, et la méridienne filaire.

Pour cette dernière, il n'y a pas de ligne au sol, mais un document de 1874, « Annonce aux horlogers », nous permet de croire que cette méridienne était filaire. On sait que, dans le dessein de pallier les défauts de fonctionnement de la méridienne horizontale, un troisième œilleton avait été percé, dans une verrière haute en grisaille, côté sud de la nef. Dès juin 1992, il était apparu qu'un œilleton existait bien à 28,5 m environ de haut, dans la lancette de droite de la verrière haute de la nef, du côté sud de la huitième travée, depuis le porche ouest, dernière verrière à grisaille avant les personnages du chœur, la septième travée étant au-dessus des porches latéraux. L'œilleton de 50 mm de diamètre se trouve à 2,15 m au-dessus de la galerie extérieure, elle-même à 26,4 m environ au-dessus du dallage.

Cathédrale Saint-Cyr et Sainte-Julitte, Nevers, 58, Nièvre, 1781 (Tome I, page 273)

L'œilleton était constitué d'une ouverture, pratiquée dans une plaque métallique percée, placée devant la fenêtre la plus élevée du mur sur le croisillon du transept.

Ce dernier se trouvait à 42 pieds 1/6 du sol, soit 13,70 m de hauteur. La longueur totale de la méridienne était de 117 pieds 1/2, soit 38,20 m, et celle de la méridienne active de 32,10 m. Le solstice d'hiver se trouvait à 23,20 m du point équinoxial.



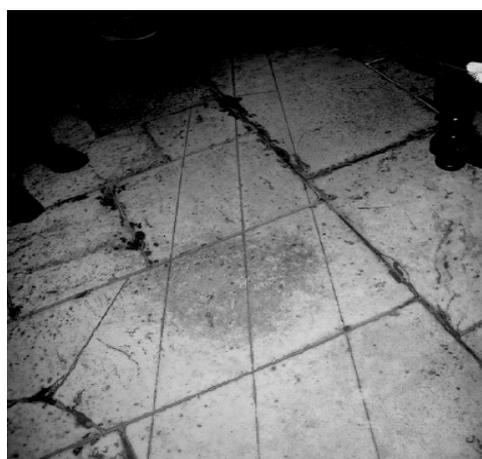
Photo, A.Gotteland © D.R

Maison de Dom Ferouillat, Fulvy, 89, Yonne, 1801 (Tome I, page 313)

Le gnomon est constitué d'une plaque de tôle carrée, de 17 cm de côté, scellée dans le cadre de la fenêtre et percée d'un trou de 1 cm de diamètre. Il se trouve à 1,623 m du sol.

La méridienne horizontale de temps vrai, tracée au sol, est en bon état. Devant une fenêtre, on voit trois lignes horaires, gravées sur les dalles de pierre, pour 11 h 45, 12 h et 12 h 15.

Mesurant 4,03 m de long, la partie terminale de la méridienne pénètre dans une autre pièce par l'ouverture d'une porte dans une cloison récente.



Photo, C. Mariono © D. R

Les trois lignes horaires sont traversées par quatre traits gravés. Le premier vers l'embrasure de la fenêtre, à 0,73 m du pied du gnomon, correspond au solstice d'été et au début de la méridienne active. Le second, à 1,75 m du pied du gnomon, correspond à l'équinoxe. Mais le troisième pose problème : à 0,215 m du dernier trait, il peut marquer soit la date du 7 décembre, soit celle du 6 janvier. Le dernier et quatrième, à 4,03 m du pied du gnomon, correspond à la fin de la méridienne au solstice d'hiver.

D'après les plans, cette méridienne est inachevée, car elle devait ressembler à celle de Tonnerre et indiquer le midi vrai légèrement décalé : Latitude : 47° 45' N - Longitude : 4° 10' E.

Parc scientifique du Pré de la Rose, Montbéliard, 25, Doubs, 1992 (Tome I, page 374)

Lors de l'élaboration du projet de Parc à Montbéliard, il a été décidé d'implanter une œuvre monumentale, appelée « Le Vaisseau d'Archipel ».

Grâce à son expérience de tailleur de miroir de télescope, M. Jean-Marc Becker a doté la méridienne d'une lentille en lieu et place du trou traditionnel. Actuellement elle se compose donc d'une grande structure verticale faite de mâts inclinés qui dessinent une surface réglée. À 30 m du sol, dans les « entretoises », un écran a été placé faire de l'ombre. Au milieu, une simple lentille, de 24 m de focale, plan convexe de 200 mm, forme une image de 223 mm de diamètre sur la méridienne. Sa luminosité est semblable à celle de la même surface directement éclairée. La flèche de la face convexe étant de l'ordre de 0,3 mm, il est évident que la focale est très sensible à la moindre erreur de courbure, la focale réelle étant de 23,97 m. La lentille a été placée devant un miroir sphérique de 200 mm. La perturbation que cette lentille devait entraîner sur le front d'onde a été calculée à l'aide d'un programme informatique. C'est avec l'appareil de Foucault que ce contrôle a été fait.



Photo F. Blateyron © D. R.

École Normale Eszterházy Károly à Eger, 1776 (Tome II, page 35)

Une ligne méridienne filaire horizontale et verticale de temps vrai, large de 12 cm, a été tracée au sixième étage par Miksa Hell, astronome d'origine viennoise. Une ouverture de 5 mm de diamètre permet d'éclairer la ligne du mur du côté sud, à près de 7,5 m. Encadrée des deux côtés par du marbre de Carrare et du semi-marbre gris des environs d'Eger, cette ligne se distingue bien.

Au sol, elle est placée dans un canal qui se trouve plus bas de 5 cm que le niveau du carrelage. Elle est protégée de la détérioration par 14 plaques de chêne

encastrées dans le plancher et qui peuvent s'ouvrir.

La longueur de la ligne est de 13,5 m sur le plancher et 2,5 m sur le mur nord. Le milieu de la ligne était marqué à l'origine par un mince fil d'acier tendu par des poids aux deux extrémités.

Aujourd'hui, ce fil d'acier est remplacé par une ficelle. Le 22 juin, l'image du soleil apparaît sur le sol au bout d'une plaque ouverte, alors que le 22 décembre, elle est à la hauteur d'1,5 m sur la partie de la méridienne qui se trouve sur le mur nord. Sur l'image du soleil projetée, on peut observer et mesurer les taches solaires éventuelles.



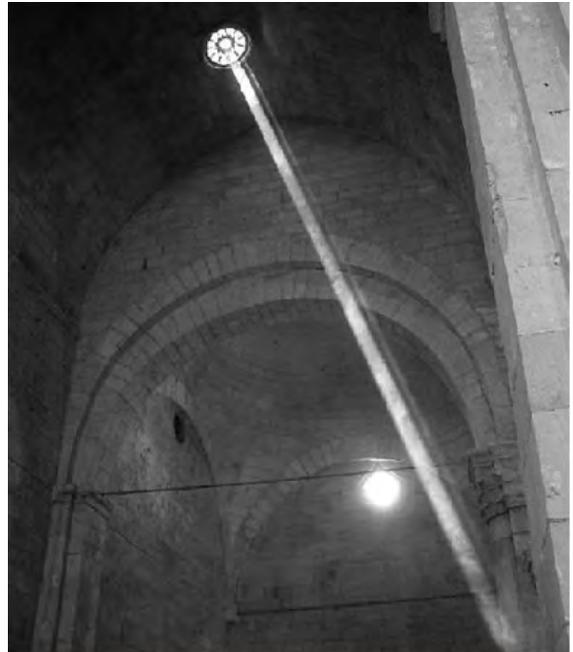
Photo, Dr. Pozder Péter, © D. R.

Église San Leonardo di Siponto, Foggia, FG, Pouilles, XIIe siècle (Tome II, page 40)

Sur le côté sud de la voûte, se trouve à 9 m de hauteur, une ouverture circulaire de 20 cm de diamètre. Le sol est récent et sans aucune inscription. L'image du soleil y est projetée à midi, le jour du solstice d'été. Un rayon de soleil pénètre exactement entre deux piliers situés à l'entrée latérale de l'église. Cela prouve, non seulement une

grande expérience astronomique, mais aussi une volonté précise d'ouvrir l'église sur la route des pèlerins. Latitude : 41° 28' N - Longitude : 15° 33' E

Photo, F. Azzarita © D. R. ►



Dôme de Florence, FI, Toscane, 1467 (Tome II, page 42)

Paolo dal Pozzo Toscanelli, astronome, mathématicien, cosmographe (1397-1482), trouva à l'intérieur de la lanterne du Dôme de Florence, vers 1467, une plaque de bronze munie d'un trou d'environ 50 mm de diamètre et à 90 m du sol. En ouvrant les vitres de la lanterne, le jour du solstice d'été, les rayons du soleil à midi se projetaient sur le sol de la chapelle Sainte-Croix.

À cet emplacement, Toscanelli posa une plaque de marbre de 243 mm de diamètre, seulement à titre de repère et non comme dimension effective de l'image lumineuse. D'autres observations furent effectuées qui permirent de poser une plaque circulaire d'environ 905 mm, correspondant à la dimension réelle du Soleil sur le sol. Mais à l'intérieur de la nouvelle plaque, celle de Toscanelli fut maintenue.

Photo, S. Barbolini © D. R. ►



Basilique San Petrone, Bologne, 1575 : La méridienne de J. D. Cassini (Tome II, page 50)

En 1653, la décision du Sénat de Bologne de prolonger l'église vers le sud, en y ajoutant une sixième voûte, rendait ainsi inutilisable la ligne méridienne d'E. Danti.

Plusieurs astronomes firent l'hypothèse de transporter l'œilleton sur la nouvelle paroi, pour reconstruire ainsi la ligne plus au sud. Mais l'orientation particulière de la Basilique semblait empêcher, avec ses deux colonnes, le tracé normal qu'il fallait obligatoirement diriger vers le nord.

La vieille méridienne d'Egnazio Danti semblait en être une pâle confirmation. Comme sa ligne déviait, en fait, par rapport à l'axe méridien et devenait inutilisable, Jean Dominique Cassini se proposa de placer l'œilleton plus haut que le précédent, de façon à faire une méridienne bien meilleure.

Tout d'abord, J.D. Cassini devait trouver la possibilité de tracer sur le sol de la Basilique une

ligne nord-sud, sans qu'il y ait d'obstacle comme des colonnes. De plus, une telle ligne devait garantir le fonctionnement de la méridienne du solstice d'été à celui d'hiver et vice-versa. Il observa l'instant où le Soleil irradiait le matin la façade externe de l'église et calcula la valeur azimutale de ce moment par rapport à celui de midi, fit un plan précis du temple et y reporta des valeurs angulaires.

Considérant ensuite le développement maximum de la méridienne dans la période hivernale, J.D. Cassini choisit sur la voûte le point idéal. La ligne méridienne serait presque entièrement contenue dans la nef gauche, sauf le dernier trait qui viendrait effleurer la partie extrême de la porte centrale de l'église. Une fois reconnu le point de départ de la ligne sur la voûte, on plaça sur la même ligne un marbre horizontal sur lequel on fixa une plaque de cuivre portant l'œilleton, qui devait être troué de façon à permettre aux rayons du soleil de se projeter sur le sol sans aucune difficulté.

Au centre de cet œilleton a été calé un fil souple en cuivre, muni d'un poids qui définissait au sol le « Punctum Verticale », c'est-à-dire le début de la ligne méridienne. La hauteur gnomonique du plan supérieur au sol était de « 1000 Once du Pied de Paris », c'est-à-dire « 71 Pieds et 5 Pouces du Pied de Bologne », soit 27,069949 m.



Photo, G. Paltrinieri © D. R

Au solstice d'été de 1655, le 21 juin, a été placé au sol, autour du point de projection et autour du point vertical, un large pavé nivelé avec une canalisation fermée d'eau. Dès que l'image du soleil se posait sur ce sol, on nota ses bords inférieurs et supérieurs, continuant le tracé jusqu'aux gradins de la chapelle latérale. Une solive en bois utilisée comme un compas, on la posée à l'extrémité du « Point Vertical » et avec l'autre on décrivit diverses « ouvertures de compas », à proximité des bords de l'ellipse tracée auparavant.

Comme le Soleil dessine toujours une hyperbole ou une ligne droite, mais jamais un cercle, il en résulte qu'un seul point du bord lumineux est tangent à la circonférence de la solive. Ce point correspond à la position du Soleil au midi local quand il atteint la hauteur maximale au-dessus de l'horizon ce jour-là. Après avoir retiré l'eau de la canalisation, on encastra deux sortes de marbres. Les premiers donnaient les centièmes de la hauteur gnomonique et les seconds la progression des angles zénithaux de 1° à 68°.

Entre les deux sortes de marbres a été posée une lame de fer qui constituait la « vraie ligne méridienne définitive ». Le long de ce parcours, sur les côtés de ces deux marbres, furent placées des plaques. Celles-ci donnaient les signes zodiacaux correspondant aux dates projetées et d'autres indiquaient les heures entières du lever du soleil et les distances zénithales correspondant aux secondes et tiers de degré de la circonférence terrestre. À la distance de 34 toises et 2 pieds (de Paris), là où est le milieu de l'image du soleil au solstice d'hiver, J. D. Cassini trouva qu'elle correspondait à la 600 000e partie de la circonférence de la Terre « qui est en raison de 57 222 toises au degré ».

La ligne méridienne commence à la perpendiculaire du trou et se termine près de la porte centrale de l'église au nord. La hauteur gnomonique est de 27,069949 m, composée de 100 parties (modules) de 270,69949 mm. La longueur de la méridienne correspond à 252 parties (modules), soit 68,216 m. L'œilleton est la centième partie du module ou un millième de la hauteur gnomonique, c'est-à-dire 27,0699949 mm.

Tour de l'Observatoire Poggi, Bologne, BO, Emilie, 1740 (Tome II, page 82)

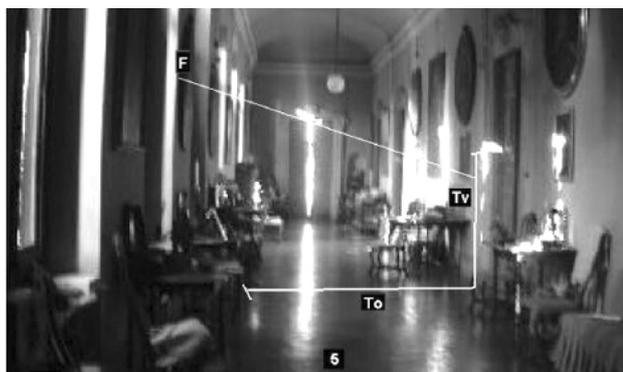
Ercole Lelli est l'auteur de la ligne méridienne construite en marbre et cuivre que l'on admire dans le sol. Il rénova l'œilleton et son tracé sur le sol. Sur une série de plaques étaient inscrits les signes du zodiaque.

A l'extrémité de la ligne, deux supports permettent d'insérer un fil tendu horizontalement, afin d'améliorer la détermination de l'instant du midi. Au-dessus de la ligne droite classique, se trouve le tracé en forme de huit qui permet d'obtenir immédiatement avec le Soleil les heures de midi du temps moyen local. Sa hauteur gnomonique est de 2,485 m et son œilleton a un diamètre de 6 mm.

Villa Zoppola Mazzola, Collebeato di Brescia, BS, Lombardie, vers 1750 (Tome II, page 87)

Longue d'environ 3,70 m, la méridienne est tracée sur le sol d'une galerie de cette villa, au premier étage. Elle continue verticalement sur 2 m environ sur la paroi opposée à l'œilleton de 10 mm de diamètre.

Photo, G. Agnelli © D. R. ►



Palais della Ragione, Padoue, PD, Vénétie, 1761 (Tome II, page 89)

Un cadran solaire sur la façade donne sur la place. Dans la salle méridienne, Giuseppe Toaldo et Bartolomeo Ferraccina ont fait placer un œilleton à la hauteur de 3,42 m et tracer sur le sol une méridienne horizontale de temps vrai, donnant sur la façade sud et la place des Herbes.

L'œilleton est un masque métallique en relief placé à 9 m de haut. Portenari rapporte dans sa « Della felicità di Padova »: Le site de cette grande machinerie a un tel rapport avec les quatre points cardinaux du ciel, qu'à l'équinoxe les rayons du soleil levant en entrant par la fenêtre de l'est, frappent les fenêtres du Ponent, placées dans le plafond et au moment des solstices, le rayon entre par les œilletons du Midi et touche les « opposti ».

La ligne méridienne, de 28 pieds 3 pouces, 4 lignes du pied de Paris, est une fine tige de marbre noir, entourée de marbre blanc, d'une largeur de 35 cm, traversant la salle « orthogonalement ».

Giuseppe Toaldo révèle dans l'orientation de la ligne une erreur qui doit être d'environ un pied. L'œilleton a un diamètre de trois lignes. L'image du soleil fait 9 pouces au solstice d'hiver.

Observatoire de Padoue, PD, Vénétie, 1780 (Tome II, page 97)

La méridienne de temps vrai

Giuseppe Toaldo, aidé par son neveu, Vincenzo Chiminello, entreprit la construction d'une méridienne de temps vrai de grande précision, dans la « Salle méridienne » de cet observatoire. Il y observait le moment exact du passage du Soleil au méridien.

L'œilleton a été placé dans la façade sud de l'édifice, à 342 cm de haut, dans une plaque de fer placée horizontalement sur un socle de marbre. Son diamètre est de 15 mm. Sur le socle, une

petite fenêtre donne accès à une niche dans le mur, à travers laquelle les rayons solaires atteignent l'œilleton. La ligne méridienne a été tracée au pied de la verticale de l'œilleton, déterminant le midi vrai et permettant de connaître les solstices et les équinoxes, donc d'obtenir la valeur de l'obliquité de l'écliptique. La longueur de cette ligne, encastrée dans le marbre, est de 7,62 m.

Musée d'Histoire naturelle la Specola, Florence, FI, Toscane, 1784 (Tome II, page 101)

Dans une salle nommée « Salle des Cigognes » le plafond présente du nord au sud de longues fentes, fermées par des planches de bois, qui permettaient les observations des astres à leur passage au méridien. Sur le sol de cette salle se trouve une méridienne filaire.

Selon une étude faite par la Dottoressa Miniati Mara sur cet instrument, Giuseppe Slop, astronome à l'Observatoire de Pise, en est l'auteur. Cette étude, publiée en 1984, dans son article « *Il Giornale di Astronomia, Origini della Specola fiorentina* », atteste un paiement à Giuseppe Slop pour cette méridienne.

Sa longueur est de 7,775 m entre le point du solstice d'hiver et le point vertical du trou gnomonique. Elle est de 6,585 m entre les centres du solstice d'hiver et du solstice d'été. Elle est constituée d'une mince ligne d'argent, encastrée au milieu de la ligne de cuivre et entourée d'une bande de marbre blanc, sans aucune graduation et avec des signes zodiacaux des deux côtés. Aux extrémités de la méridienne, dans des niches du mur, se trouvent deux supports de fer qui servent à soutenir le fil usé, à 6 cm du sol, pour déterminer l'instant du midi vrai, au moment où l'ombre de ce fil passe sur la ligne d'argent de la méridienne.

L'œilleton, d'un diamètre de 3 mm, percé sur une plaque d'argent, se trouve dans une petite fenêtre (15 cm x 13,5 cm) à 3,282 m du sol.



Photo, Stefano Barbolini © Avec l'autorisation du Directeur du Musée

Palais Agucchi, Bologne, BO, Emlie, 1787 (Tome II, page 106)

Sous la verticale du portillon, à 800 mm du sol, est fixée horizontalement une lame de cuivre de 323 mm sur 20,5 mm qui donne des divisions régulières. Ce segment est la dixième partie de la hauteur gnomonique et est divisé en 200 petites parties. Le diamètre de l'œilleton vaut huit de ces parties.

De la dernière partie, on peut déduire que la hauteur gnomonique est dix fois sa longueur, c'est-à-dire 3,23 m, et que l'œilleton a un diamètre de $3230,83 \text{ sur } 8/10 \times 200 = 12,92 \text{ mm}$. Sur le sol, commençant à la verticale de l'œilleton, le long de la paroi, est tracée la ligne méridienne qui traverse obliquement le salon et se termine à l'angle opposé. Le méridien est matérialisé par une plaque de cuivre large de 3 mm, composée de plusieurs segments de longueur variable, de 940 à 1050 mm. Il est encastré entre deux séries de marbres qui atteignent la largeur totale de 61 mm.

De chaque côté et sur toute la longueur de ces marbres, sont gravées deux séries différentes de nombres. Du côté est, sont indiquées les distances modulaires, avec un intervalle de dix modules, un module correspondant à 32,3083 mm. Comme le point vertical est situé dans l'épaisseur du mur, la ligne commence au module 6,7.

Église collégiale San Stefano, Novellara, RE, Emilie, 1789 (Tome II, page 113)

Bernardino Taschini, très intéressé par la gnomonique, a été enterré dans la chapelle du Saint Rosaire, dans laquelle il avait réalisé une méridienne horizontale de temps vrai.

Son œillette est elliptique et son axe nord-sud est de 9 mm et celui est-ouest de 12 mm. La distance au zénith est de 45°. Le rayon ou la distance altimétrique : œillette-sol est de 523 cm du 31/1 - au 10-11/11; 540 cm du 11- 12/11 au 1 - 2/2 centième partie : 5.23/5.40.

Couvent Saint-Joseph, Brescia, BS, Lombardie, 1792 (Tome II, page 120)

C'est le Père Rosina qui a tracé une méridienne de temps vrai dont l'œillette de 3 cm se trouve dans une plaque de tôle placée horizontalement à 7,135 m dans le mur méridional, au-dessus d'une fenêtre arrondie, autrefois noircie. Sa date était inscrite sur une plaque, placée verticalement au bout de la méridienne : BRIXIADV. NORMAE. CONFRATIS. OPERA. OBSERVAN. MINORITAE. MERIDIANI. SYBTAGMA. POSVERVNT. AN. 1792.

Cette méridienne se trouve dans une grande galerie d'un passage pour accéder du rez-de-chaussée au premier étage. Dans la « Galleria della meridiana », Galerie de la méridienne, de 19,6 m de longueur, se trouvent deux horloges. L'une d'entre elles, faite par Domenico di Pilzone Bettoni, était réglée chaque jour, grâce à cette méridienne.

La ligne commence au pied de la paroi sous l'œillette. En cuivre, elle est encastrée dans 28 plaques de marbre blanc de « Botticine », larges de 35 cm sur 72,5 cm, sauf la dernière au sud et l'avant-dernière au nord.

À la verticale du trou, un petit cercle noir est marqué par terre. Sur le côté occidental de la méridienne est inscrit : TANGENTES GRADUUM A VERTICE. Les degrés sont tangents à la verticale. Ce sont les « Unités modulaires » qui considèrent la hauteur gnomonique égale à dix modules. Chaque module est ensuite divisé sur la ligne en dix parties. Cependant l'instrument n'est pas, dans son état actuel, très précis du point vertical au module 10. Entre les modules 10 et 20, la distance est de 7,35 m.

Sur le côté oriental de la ligne sont indiquées les HORAE MERIDIE (Heures méridiennes). Les heures italiques pour l'instant du midi, en chiffres romains, sont accompagnées des dizaines de minutes en chiffres arabes. De chaque côté sont gravés les noms et les symboles des signes du zodiaque : descendant à l'est, ascendant à l'ouest.

- 1) L'œillette, après des années de la seconde moitié du XIXe siècle, a été remis à 3,3 cm.
- 2) La tuile en lames de fer a été faite avec regonflement conique et terminée par une plaque horizontale en cuivre de 15 cm.
- 3) La longueur totale de la méridienne entre deux solstices a été remise à 19,50 m.
- 4) L'inclinaison du plan sur lequel repose la méridienne, pratiquement constante vers le nord, et a été mesurée à environ 0,795%.
- 5) La hauteur du plan de l'œillette au sol est de 70,03 cm.

Cathédrale de Palerme, PA, Sicile, 1801 (Tome II, page 142)

La méridienne de temps vrai est une barre de laiton, encastrée dans une bande de marbre où sont réalisés des panneaux représentant les signes du zodiaque avec de la marqueterie polychrome.

Elle commence au pilier qui sépare la chapelle de Saint-François de la chapelle suivante et traverse en diagonale d'abord le bas-côté sud, puis presque tout le transept.

Sa longueur à partir du point vertical du trou gnomonique est de 21,812 m. La distance entre les deux solstices est de 18,726 m. À droite en entrant, dans la petite coupole près de la chapelle de Saint-François-de-Paule, l'œillette se situe à 11,776 m de hauteur. Il est fait d'une lame de métal, au fond d'un creux en entonnoir, dans un bloc en pierre locale nommée « ciaca », et son diamètre est

de 11,63 mm.

Dans la description de la méridienne de Nicolò Cacciatore, assistant de Piazzzi, on peut lire qu'après cette réforme, l'astronome calcula, à nouveau, la hauteur du gnomon et obtint : 45.8.5. (Paume sicilienne = 25,8098 cm)

Église Saint-Georges, Modica, RG, Sicile, 1895 (Tome II, page 211)

Pour installer l'œilleton dans la chapelle de l'Immaculée-Conception, il a fallu placer une fenêtre à l'extérieur, parfaitement orientée vers le sud, de façon à recevoir les rayons du soleil de juin et de décembre.

Cet œilleton a été muni d'une plaque de cuivre avec un trou d'exactly 4 cm et communiquait avec une petite chapelle à l'intérieur de l'église. Pour permettre le tracé au moyen d'un fil à plomb d'une verticalité précise de l'œilleton au sol, deux coins furent coupés et des marches d'un autel furent déplacées.

La hauteur du gnomon est de 14,18 m. L'image du soleil sur le sol de l'église mesure le midi-vrai et moyen-italien et l'entrée du Soleil dans les signes du zodiaque.

La courbe en huit pour le temps moyen est immense, certainement l'une des plus grandes existantes. Sa longueur est de 21,492 m et sa largeur de 3,011 m. Le long de la méridienne, on voit des graduations allant de 16.10 à 18.41, indiquant à midi vrai l'heure italique, comptée à partir du coucher du soleil. Leur complément à 24 heures est alors l'intervalle semi-diurne.

En réalité, ces graduations sont de 34 minutes inférieures à l'heure locale. Peut-être est-ce l'heure italique nationale, prise au méridien de Toulon. On a l'indication 17,26 au point vernal.

Calculée pour la latitude de $36^{\circ} 51' 32''$ N et la longitude de $2^{\circ} 18' 33''$ E, elle est comptée à partir du méridien du Vatican, le Monte Mario. L'obliquité de l'écliptique est de $23^{\circ} 27' 10''$. L'œilleton fonctionne encore bien, même si la visibilité de l'image solaire est gravement gênée

par une énorme fenêtre qui cache en partie la zone de lecture.



Photo G. Brinch © D. R.

Observatoire de Castelfranco Emilia, MO, Emilie, 1900 (Tome II, page 218)

L'œilleton, de 12 mm, est au centre d'un disque en tôle, d'un diamètre de 220 mm. Un bras métallique le maintient solidement sur le côté de la fenêtre vitrée au sud.

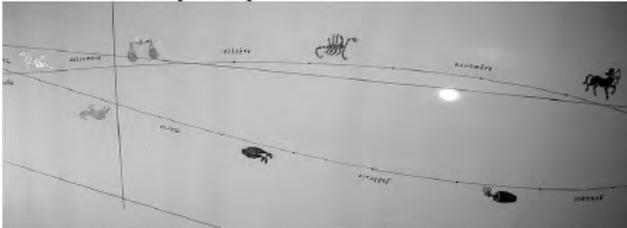
La hauteur gnomonique de la méridienne est de 2240 mm, son inclinaison de $4,582^{\circ}$ et sa déclinaison de $0,16^{\circ}$ E. Sur le sol en terre cuite, est tracée la ligne méridienne, simple rainure qui traverse obliquement la salle.

Une série de points la traverse, indiquant la date de l'entrée du Soleil dans les différents signes zodiacaux.

Castelfranco Veneto, TV, Vénétie Elsa Stocco, 2000 (Tome II, page 286)

Elsa Stocco, membre de la Sezione quadranti solari de l'UAI, a conçu le projet d'une méridienne à réflexion et l'a réalisée avec Sergio Tiatto au plafond d'une chambre, dans sa propre maison.

Tracée sur fond de terre d'ombre et terre de Sienne, elle mesure 380 sur 300 cm et comporte la ligne de midi (de 11 et 13 heures) vrai du soleil local, la courbe en huit du midi moyen, entourée des figures du zodiaque. Sur cette courbe les points indiquent les 1^{er}, 10^e, 20^e jours du mois.



Un miroir de 1,8 cm, de diamètre, inséré dans un support de marbre, a été installé sur l'appui d'une fenêtre, au sud à une distance de 179 cm du plafond. Latitude : 45° 39' N - Longitude : 11° 55' E.

Photos, E. Stocco © D. R. ►



Rasa Varese, VA, Lombardie 2003 (Tome II, page 293)

Sur la paroi rose d'une maison, au-dessus d'un balcon, Roberto Baggio, membre de l'Association culturelle Horologium, a réalisé un cadran solaire et une méridienne.

Celle-ci mesure 4 m de hauteur sur 1,80 m de largeur, et le style 55 cm. Le diamètre du disque en cuivre est de 5 cm.





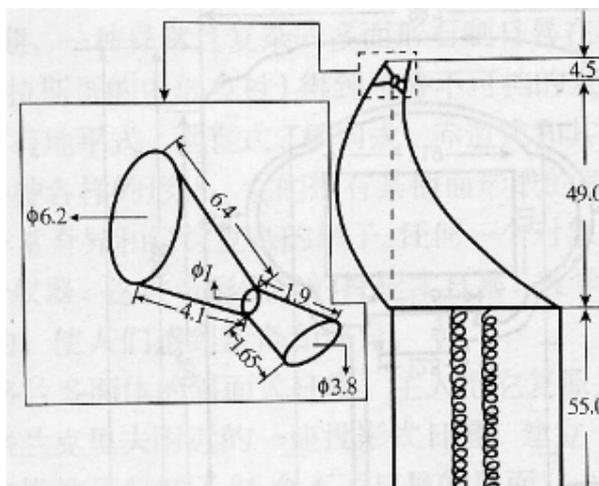
L'œilleton de Nanjing

Roland Trotignon

Le gnomon actuellement présenté à l'observatoire de Nanjing (Nankin) était à l'origine à Beijing (Pékin). Construit en la 11^{ème} année de l'Ere Zhengtong de la dynastie Ming (1446), il fut modifié durant la dynastie suivante la 9^è année de l'ère Qianlong de la dynastie des Qing (1744).

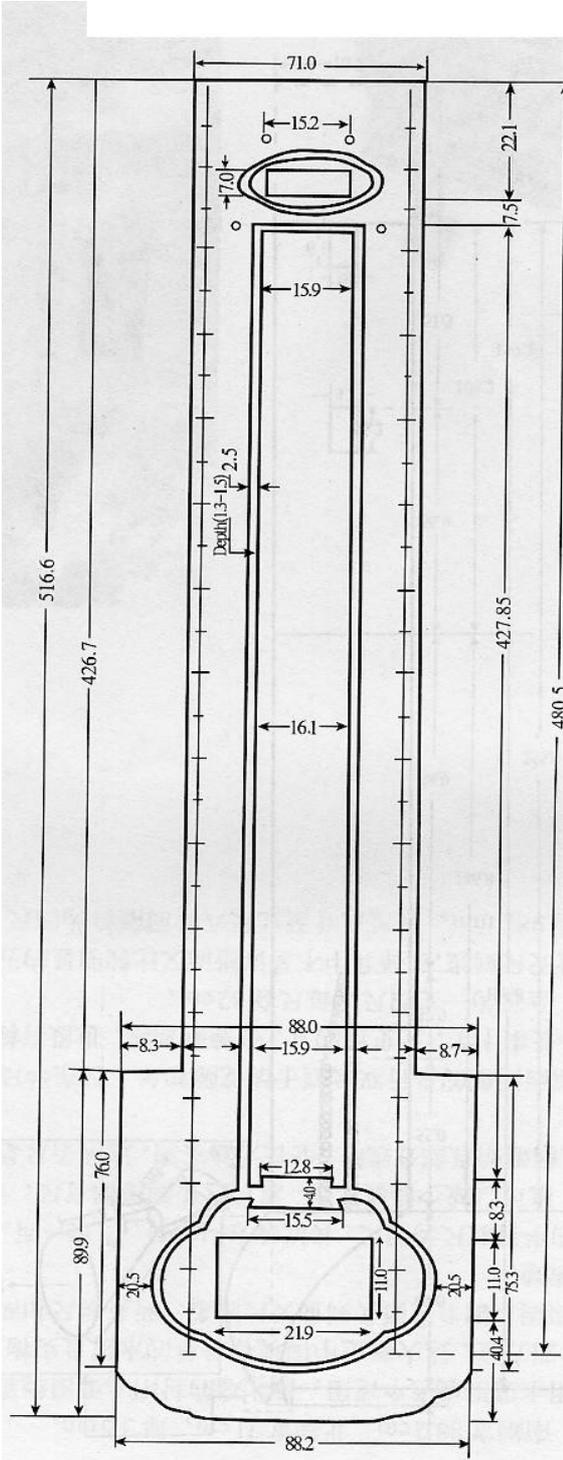
La hauteur du style sud passa de 8 à 10 pieds (1,98m). Une pièce galbée de bronze fut ajoutée au sommet. On y ménagera une ouverture de 2 fen, remplaçant ainsi la technique usuelle chinoise d'une barre horizontale dont on observait l'ombre sur la règle horizontale.

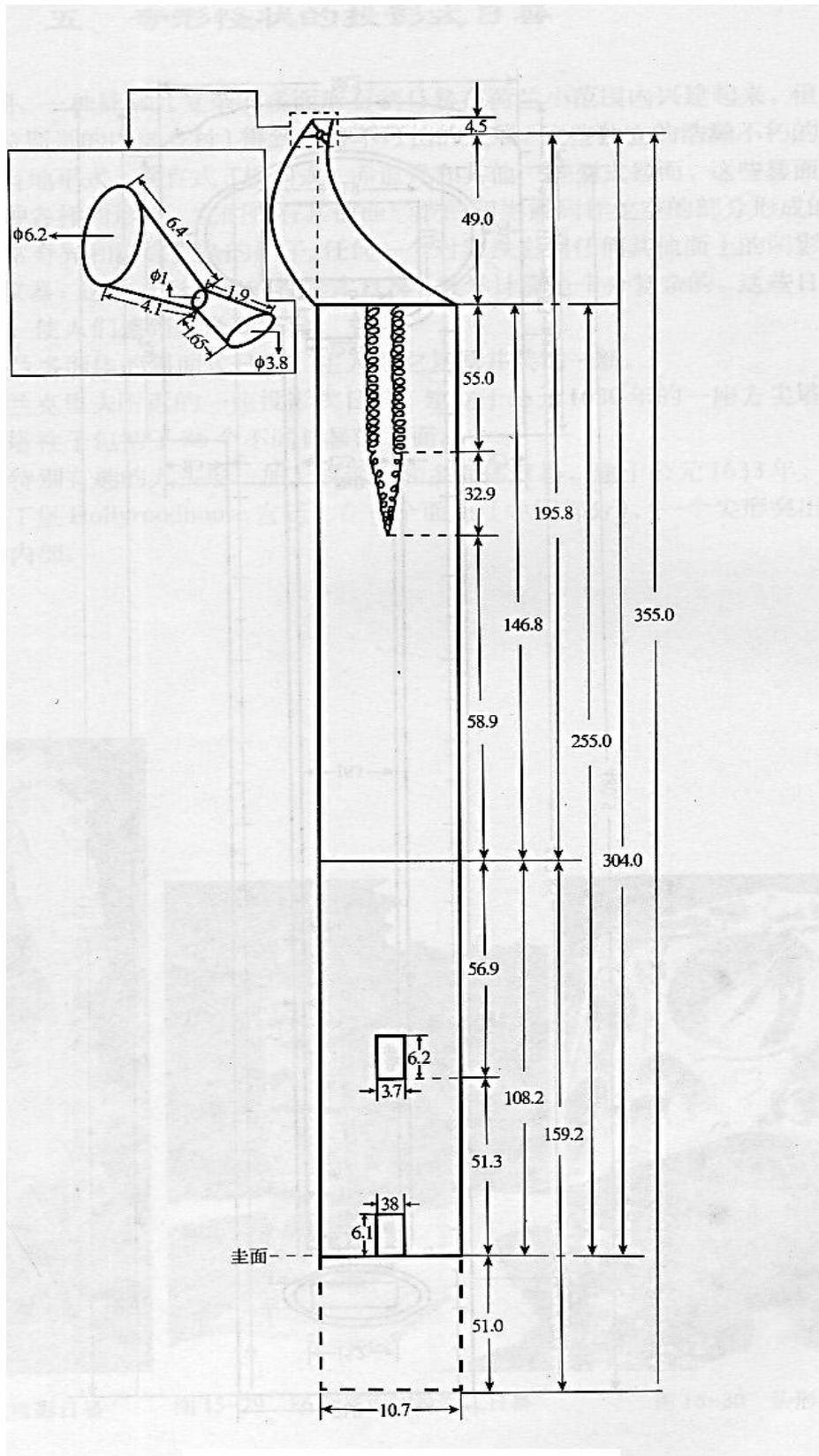
Du fait de l'augmentation de la hauteur du style, la règle horizontale longue de 1 coudée 6 pieds 2 pouces s'est avérée trop courte lors du solstice d'hiver. C'est pour cette raison que l'on a rajouté un style supplémentaire haut de 3 pieds 5 pouces.



L'œilleton aménagé au sommet de la pièce de bronze rapportée en 1744 est original. Son ouverture d'un diamètre d'environ 1 cm dans sa partie la plus étroite, est pratiquée entre deux évidements en forme de troncs de cône ménageant eux-mêmes une ouverture circulaire de 6,2 cm de diamètre sur la face éclairée par le soleil et de 3, cm sur la face située à l'ombre (voir la figure ci-dessus). Cette disposition permet d'avoir un œilleton de faible diamètre dans une pièce de bronze épaisse.

Rappelons que l'unique objectif de ces instruments était de déterminer avec la plus grande précision possible l'instant du solstice d'hiver, point de départ de la division de l'année en 24 intervalles égaux nommés « *jieqi* ». Les positions de ces *jieqi* par rapport aux dates des nouvelles lunes étaient déterminantes pour l'établissement du calendrier luni-solaire en usage en Chine.





Pages précédentes, schémas de la règle horizontale et du style (d'après Wang Dechang et Zhang Jianwei).

Les cotes sont données en centimètres.

Sources :

Pan Nai – Chinese astronomy in pictures (中国古天文图录) – Shanghai, 2009

Wang Dechang et Zhang Jianwei – 时间雕塑日晷 (*cadrans solaires, sculptures du temps*) – Anhui, 2006





Des œillets en série

Maurice Kieffer

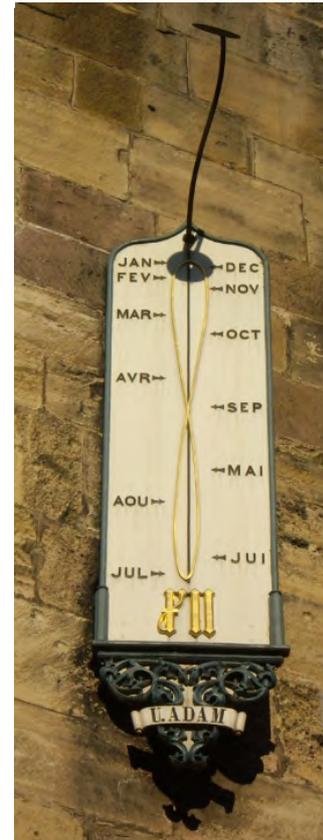
Au XIXe siècle les horlogers fournissaient des méridiennes fabriquées en série afin de régler leurs horloges. Comment avaient-ils résolu la problématique de l'œilleton ?



Méridienne industrielle
de type 2101 à Barr
(photo P. Juillot)

Notre inventaire comporte 183 lignes d'informations concernant ces méridiennes de série mentionnées comme « méridiennes industrielles ». Parmi celles-ci, 134 appartiennent au type 2101, correspondant à une méridienne de Temps Vrai, et 43 au type 9001, méridienne de Temps Moyen, signée U. Adam à Colmar.

A noter que les premières sont implantées dans plusieurs départements : Bas-Rhin (40), Haute-Marne (18), Haute-Saône (11), Haut-Rhin (10), Vosges (10), Marne (9), Moselle (8)... tandis que les secondes sont, à trois exceptions près, implantées dans le seul département du Haut-Rhin.



Méridienne industrielle
de type 9001 à Colmar
(photo P. Juillot)

Maurice Kieffer, habitant dans le Haut-Rhin, a mené l'enquête concernant la méridienne de type 9101.

Tout d'abord, afin d'effectuer un relevé, il s'est rendu à Bâle, chez un ami. En effet, ce dernier possède une méridienne de ce type achetée chez un antiquaire.

Le diamètre du disque est de 150 mm pour un œilleton de 8 mm. L'angle d'inclinaison est de 30° et la longueur du style droit fictif de 475 mm. Cette valeur devrait être, d'après les calculs de 506,5 mm. La position de l'opercule est donc incorrecte. Le support a été déformé.

En outre, la méridienne est dotée d'un disque bombé. Hors il s'avère que sur aucune photo de méridienne 9001 on ne retrouve cette particularité. Partout ce ne sont que des disques plats.

Suite à cette première approche, M. Kieffer a photographié de profil le style de la méridienne de Dornach.

Dans ce cas, la mesure de l'inclinaison du disque de l'œilleton par rapport à la table verticale est correcte. Elle correspond bien à un angle de 90° - la latitude du lieu (voir photo ci-contre).

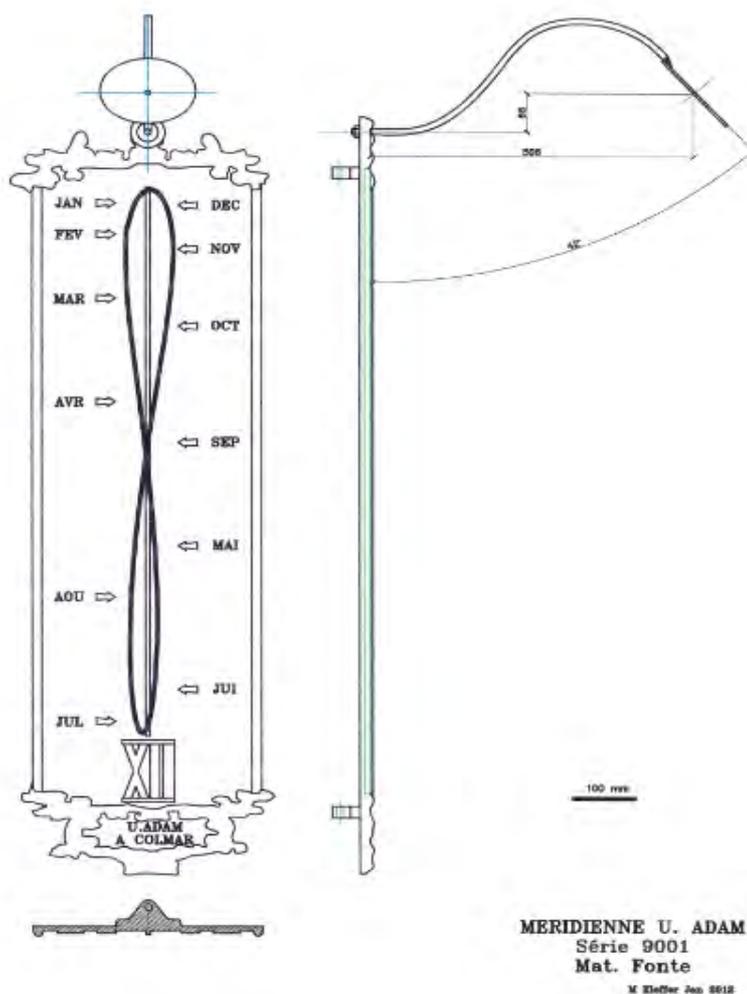
Enfin il prend contact avec le service technique de la ville de Rouffac. Le responsable connaît bien le sujet. Celui-ci précise que le diamètre du disque est de 150 mm pour un œilleton de 10 mm.

Il confirme également qu'après la restauration de la méridienne de l'église Notre-Dame de l'Assomption, celle-ci a été réinstallée le 21 juin 2006 exactement à son emplacement initial, le réglage lors de la mise en place étant facilité à cette date du solstice d'été.

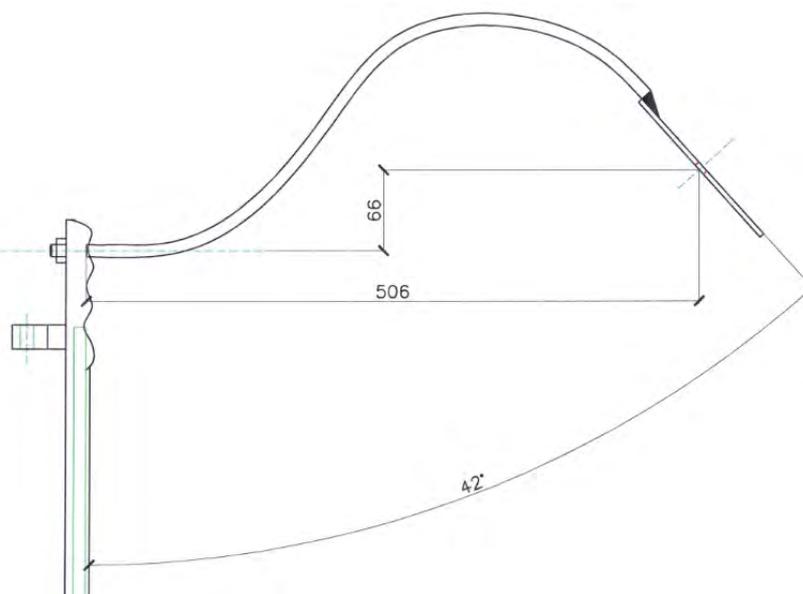
Afin de synthétiser de toutes ces informations, Maurice Kieffer a reproduit graphiquement, à l'aide du logiciel Autocad, la méridienne ci-dessous.



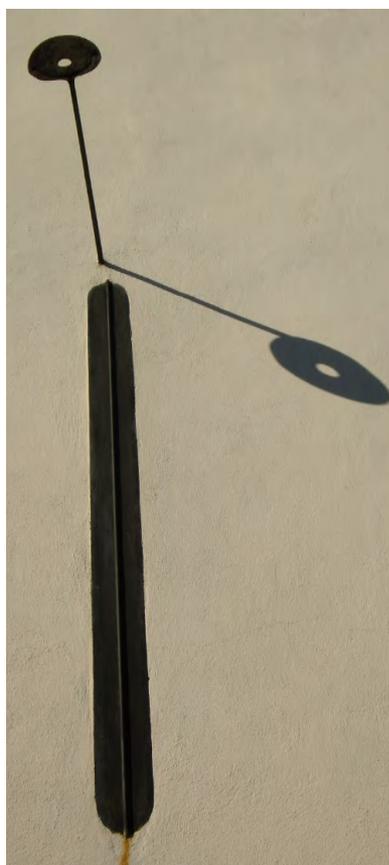
Style de la méridienne de Dornach (photo M. Kieffer)



Détail de la position du disque calculée et dessinée par M. Kieffer.



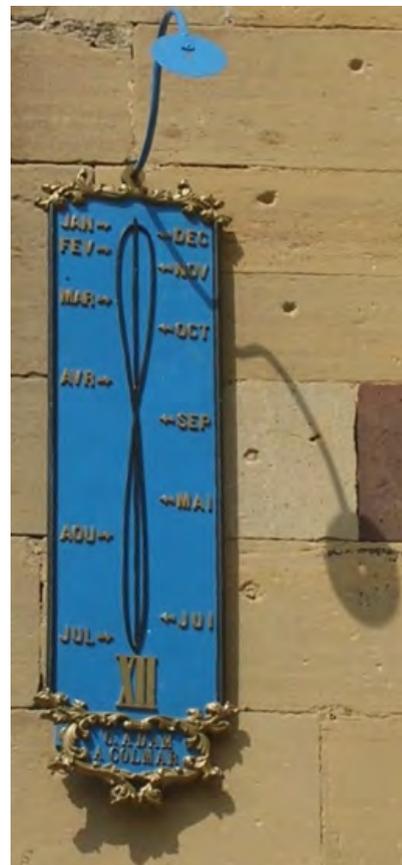
Quelques photos de méridiennes industrielles



Méridienne industrielle à Marlenheim (photo de P. Juillot)



Méridienne industrielle à Mulhouse (photo de M. Kieffer)



Méridienne industrielle à Rouffac (photo de M. Kieffer)





Les héliochronomètres

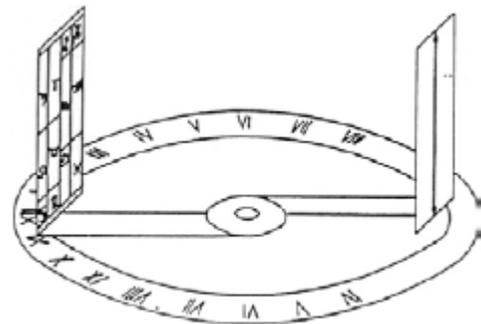
P. Gagnaire, M. Brialex, Ph. Sauvageot

Informations relatives à l'oeilleton dans le cadre d'un héliochronomètre.

• les héliochronomètres (P. Gagnaire)

Les lignes ci-dessous sont extraites de l'article de Paul Gagnaire, publié dans la revue *Astronomie* de février 2004 : « Cadrans de temps moyens », suivi de l'article d'Alain Ferreira dans *Astronomie* de mars 2004 : « Les cadrans à équation ».

C'est en 1826-1827, qu'un jeune prêtre de 33 ans, l'abbé Guyoux, curé du petit village de Montmerle-sur-Saône, dans l'Ain, se souvint d'un dessin d'alidade tournant dans un plan équatorial, paru dans un ouvrage de Clavius en 1581. Il fallait poursuivre le Soleil mais, ainsi, on pouvait obtenir, à tout moment, le temps vrai, sur un cercle finement gradué en minutes. La performance devait même s'améliorer encore, par interpolation facile, jusqu'à 20 ou 30 secondes.



Cadran à alidade de Clavius



Cadran de type « Guyoux »
Photo Maurice Kieffer in *L'Astronomie* Mars 2004

D'autres que l'abbé Guyoux avaient déjà dû avoir l'idée ou devaient l'avoir en même temps. En témoigne l'instrument que le musée Whipple présente sous sa cote 707 en le datant de la première moitié du XIXe siècle. Mais notre abbé alla jusqu'au bout du raisonnement en traçant, sur la platine de l'instrument, la courbe en 8, à cheval sur la droite de temps vrai où la poursuite fait arriver la tache de Soleil. Et il remplaça les 2 trous de Clavius par une lentille basculante, focalisant la tache de lumière. Ainsi prit naissance un cadran, simple à construire, extrêmement précis, avec de fines graduations dont on peut approcher son visage comme on met sa montre sous ses yeux. De plus, installé dans le plan de l'équateur, il fonctionne toute la journée et peut se déplacer en latitude selon un réglage simple. Enfin, la courbe en 8 qui se déforme sur les cadrans, en fonction de leur déclinaison, prend ici sa forme polaire la plus simple.

On connaît encore une quinzaine de cadrans Guyoux et presque autant de cadrans créés par ses émules : Bénévolo, l'abbé Berthiaud, Baradelle, J.-B. Ville.

En 1860, un ingénieur parisien, M. Fléchet, eut l'idée d'un ultime perfectionnement : il remplaça la plaque plane où arrive la tache de Soleil par une calotte sphérique dont tous les points sont équidistants de la lentille qui engendre alors une tache lumineuse toujours nette et bien ronde. Il baptisa son instrument "chronomètre solaire".

Héliochronomètres de type Fléchet
en bronze par Pilkington & Gibbs. Collection Bernard Rouxel ►



● Héliochronomètre réalisé par Michel Brialix

Description générale

Pour garantir une bonne précision dans la lecture horaire : il faut réaliser une construction la plus précise possible avec du matériel de bricoleur.

Le support est constitué de deux plateaux articulés et bien plans. Le premier de ces plateaux représente la base horizontale, le deuxième le plan parallèle au plan de l'équateur terrestre (le réglage est assuré au millimètre près et maintenu en position par une bride).

Sur ce deuxième plateau sont positionnés le cadran horaire et l'axe de rotation du cadre mobile (alidade). Cet axe de rotation doit être rigoureusement parallèle à l'axe de rotation de la Terre, donc perpendiculaire au plateau qui le porte. Toujours sur ce plateau, il faut tracer la ligne méridienne perpendiculaire à l'axe de la charnière des plateaux.

Ce support étant réalisé, il faut construire l'alidade. C'est un cadre en contreplaqué le plus



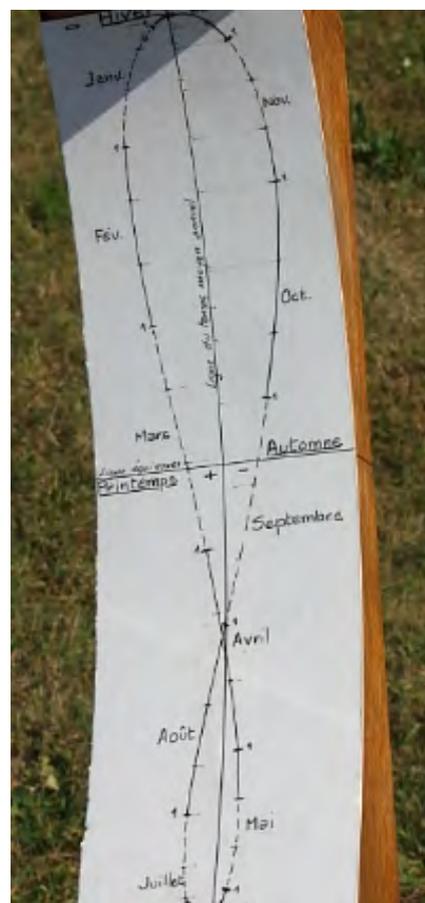
rigide possible renforcé par des équerres aux angles. J'ai ajouté une base d'appui importante autour de l'axe de rotation pour assurer une bonne perpendicularité de l'alidade durant toute la journée. Le tracé de la ligne des équinoxes par rapport au plan équatorial est à la même hauteur que l'axe du trou de 2,5 mm. Le huit de l'équation du temps a été tracé sur une portion de cylindre de rayon 340 mm et vérifiée sa qualité géométrique avec une ficelle passée dans le trou de 2,5mm. Le tracé précis de l'équation du temps a été obtenu avec les éphéméride de la SAF 2010 et un tableau de calcul réalisé sous Excel.

L'œilleton

Avec un trou de diamètre 2,5 mm et un plan de projection se trouvant à 340 mm, la tache lumineuse a un contour suffisamment net. Ainsi mon héliochronomètre me donne entière satisfaction. J'observe le très léger contour rougeâtre décrit par M. Baillet lors de la réunion de la CCS en octobre 2011>>.

Avant de mettre en station ce cadran solaire comme une monture équatoriale (suivant la latitude et son orientation vers le Nord géographique), il faut régler le cadran de lecture horaire en fonction de l'heure d'été ou d'hiver

et la longitude Est ou Ouest converti en heures et minutes par rapport à la méridienne du plateau.



● Héliochronomètre W. Homan

Exemple de conception d'œilleton sur un héliochronomètre "de série", fabriqué par W. Homan, 20 Renfrew street, à Glasgow, en Angleterre. Cet instrument est des plus simple.

Il se compose:

- d'un plateau circulaire pivotant, portant les heures (figure 1).
- de 2 montants en opposition, distants de 150 mm, comportant chacun une demi-

courbe en 8 et un œilleton d'environ un millimètre de diamètre (figures 1 et 2).

- Au dos, un quart de cercle monté sur glissière permet d'incliner le plateau d'un angle égal à celui de la latitude du lieu (figure 2).

- Les parties fixes sont assemblées par des vis.



Fig 1



Fig 2

Figure 3 : sur le montant portant les mois de mars, avril, mai, juin, juillet, août et septembre, un œilleton est percé en bas (figure 3).

L'heure et la date sont indiquées par la projection de la tache lumineuse issue du montant en opposition dont l'œilleton est situé en haut (la hauteur du soleil est au-dessus du plan de l'écliptique).

La distance mesurée entre la ligne horizontale en haut et le bas de la courbe est d'environ 65 mm.

Le distance mesurée entre la ligne horizontale en haut et l'œilleton en bas est d'environ 63 mm.

Figure 4 : sur le montant portant les mois d'octobre, novembre, décembre, janvier et février, un œilleton est percé en haut.

L'heure est indiquée par la projection de la tache lumineuse issue du montant en opposition dont l'œilleton est situé en bas (la hauteur du soleil est sous le plan de l'écliptique) (figure 4).

La distance mesurée entre ligne horizontale en bas et le haut de la courbe est d'environ 65 mm.

Le distance mesurée entre la ligne horizontale en bas et l'œilleton en haut est d'environ 63 mm.



Signature du manufacturier



Tous les éléments sont fixés par vis





La Méridienne de Paris et “ses” œilletons

Pascal Descamps & Samira Barouche

P. Descamps (UMCCE-Observatoire de Paris) nous fait l'honneur de publier dans notre revue l'analyse qu'il a réalisé avec S. Barouche (IUT Mesures physiques de St.Denis) sur la méridienne de l'observatoire de Paris. Ce travail se poursuit, en particulier avec un collègue italien, et il se peut que le contenu de cet article devienne légèrement obsolète dans quelques temps, notamment en ce qui concerne la lentille qui fait actuellement office de gnomon. Une mise à jour sera sûrement à effectuer dans quelques mois. Elle fera l'objet d'un article dans un prochain Cadran Info.

Au XVIII^e siècle, les lignes méridiennes de laiton, tracées au sol dans le plan du méridien local, fleurissaient un peu partout, dans les intérieurs des églises ou des maisons royales. Elles sont comme des cadrans solaires extrêmement simplifiés et réduits à n'indiquer qu'une seule heure, celle du midi vrai. Ainsi, se pressait-on en ces endroits, publics ou privés, pour régler sa montre ou son horloge sur la marche du Soleil.

Pendant, les très grandes lignes méridiennes ont été tracées dans un tout autre but : la mesure des paramètres de l'orbite terrestre – ce que l'on appelait alors la *théorie du Soleil* – tels que l'obliquité de l'écliptique, l'excentricité de l'orbite terrestre, les positions du périhélie et de l'apogée et leur déplacement, la durée exacte de l'année tropique... Pour l'essentiel, elles étaient attachées à contrôler la précision des paramètres de la réforme grégorienne du calendrier de 1582. Elles étaient alors de véritables instruments astronomiques de précision, bâties pour la plupart à partir des principes et méthodes élaborées en 1655, en la basilique San Petronio de Bologne, par Jean-Dominique Cassini (1625-1712), qui les éleva au rang d'*héliomètre* pour mieux en signifier la fonction purement instrumentale.

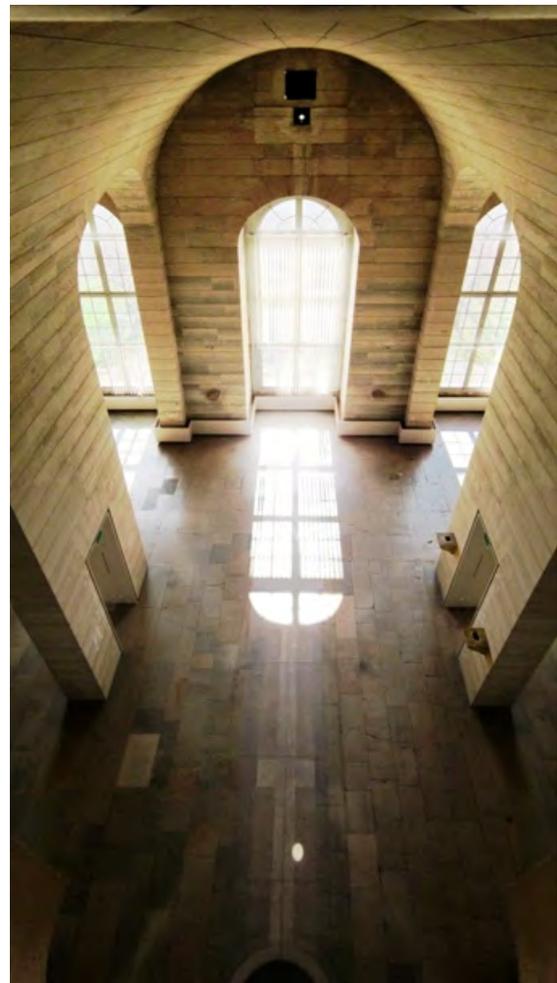


Fig 1

La ligne méridienne de l'Observatoire de Paris fait partie de cette famille des grandes lignes méridiennes. Bien qu'étant la plus modeste en taille, elle sut néanmoins se hisser parmi

les instruments les plus précis de son époque et fut en mesure d'accomplir ce pour quoi elle avait été principalement conçue : mesurer la variation de l'obliquité de l'écliptique. Ce fut l'œuvre de Jacques Cassini en 1729. Elle demeure à ce jour le seul instrument de ce type construit au sein d'un édifice non religieux.

Sur la figure 1, nous découvrons la salle Cassini avec son gnomon à la verticale de la ligne méridienne et l'image du Soleil projetée au sol à la date du 12 mars (crédit photo : P. Descamps, Y.Gominet). On notera au haut de la façade, le trou initialement percé trop haut. En bas de l'image se trouve le puits zénithal.

Description générale

L'actuelle grande salle du second étage de l'Observatoire de Paris, qui porte de nos jours le nom de « *salle Cassini* », fut naturellement choisie par Jean-Dominique¹ Cassini pour l'installation de sa grande ligne méridienne.

Peu après son arrivée à Paris en 1669, Cassini fit percer la façade méridionale d'un trou faisant communication directe avec l'intérieur du bâtiment et devant faire office de *gnomon*, c'est-à-dire d'indicateur solaire (Figure 1). Par cette ouverture, la lumière du Soleil pénétrerait la salle spacieuse pour s'y projeter sur le sol.

L'œilleton initial avait été placé à une hauteur de 10,17 m ; c'était bien trop haut et lorsque le Soleil de midi atteignait sa hauteur méridienne la plus basse de son mouvement annuel, au solstice d'hiver, son image sortait alors de la salle par la grande fenêtre de la façade septentrionale. Il fut finalement abaissé de 23 cm le 12 mars 1682, pour être amené à une hauteur de 9,9377 m.

L'imposante masse du bâtiment, davantage forteresse qu'observatoire, construit sur des fondations profondes de près de 28 m au-dessus des carrières de Paris, mettait du temps à trouver son équilibre ; c'est pourquoi Cassini décida de ne pas carreler la grande salle et se contenta d'esquisser une grande ligne méridienne.

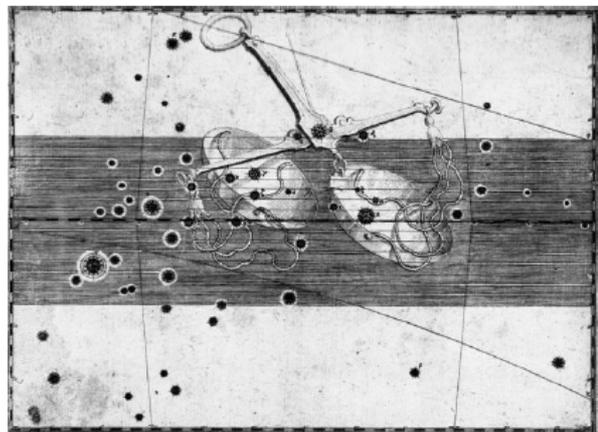


Fig.2 : Figure du signe de la balance extraite de *l'Uranometria* de Bayer (1648)



Fig 3 : photo de la dalle en marbre blanc gravée du signe de la balance. (Crédit photo : Bibliothèque de l'Observatoire de Paris et P. Descamps)

¹- Cassini obtint ses lettres de naturalisation le 14 juin 1673. A partir de cette date, pour l'état-civil français, il fut prénommé Jean-Dominique, qui est la francisation de son prénom italien, Giovanni Domenico. Cependant il continua à signer ses écrits sous la forme Gio. Domenico ; c'est toujours de cette façon qu'il est reconnu et désigné de nos jours en Italie.



Fig.4 : Tache solaire sur le pavé de la grande salle Cassini de l'Observatoire de Paris. En haut, à gauche, près de l'équinoxe et à droite près du solstice d'été dans l'écrevisse (le cancer).



Enfin, c'est son fils, Jacques Cassini (1677-1756), qui après avoir réalisé en 1712 une petite méridienne, aujourd'hui disparue, dans l'actuelle Grande Galerie de l'observatoire, décide en 1729 de reconstruire au second étage la ligne méridienne à peine ébauchée. Il n'est pas mû par un quelconque désir d'achever le projet de son père, ni par celui de doter l'Observatoire d'un vaste cadran solaire, mais par un dessein proprement scientifique, en prise avec l'une des grandes interrogations se faisant jour en ce début de siècle nouveau, celui de savoir notamment si l'obliquité de l'écliptique, l'une des grandeurs les plus fondamentales de l'astronomie de position, est sujette à variation et quelle pouvait en être la quantité annuelle.

Jacques Cassini construit la méridienne de l'Observatoire en suivant les grands principes canoniques que son père avait fermement établis, quelque quatre-vingt ans plus tôt, lors de l'édification de la grande méridienne de la basilique San Petronio de Bologne. La ligne méridienne est constituée de 32 règles de laiton dont la longueur de chacune est égale au dixième de la hauteur du gnomon. Ces règles sont enchâssées dans des bandes de marbre blanc qui permettent une meilleure visibilité de la tache. Des dalles de marbre blanc supplémentaires bordent la ligne, ornées des figures des douze signes du zodiaque directement inspirés des représentations issues de l'édition de 1648 – la seule disponible à l'Observatoire de Paris - de l'*Uranométrie* de Johann Bayer (Figure 2).

La ligne de laiton est munie de deux graduations : l'une, tournée vers l'ouest, donne directement la hauteur apparente du centre du Soleil ; l'autre, tournée vers l'est, indique la tangente de la distance zénithale du centre du Soleil. Celle-ci est en outre multipliée par un facteur mille, ce qui l'apparente à une distance sur la ligne prise du pied du gnomon jusqu'au centre de l'image du Soleil ; l'unité de cette distance est donnée par le diamètre de l'ocillon, lui-même valant la millième partie de la hauteur, soit 9,9377 mm.

Le principe fondamental d'une ligne méridienne repose sur celui de la *camera obscura*, qui démontre et utilise le trajet rectiligne des rayons lumineux (Figure 3). Cassini adopta comme taille de l'ocillon la millième partie de sa hauteur au-dessus du sol. Cette



Fig 4 suite : La tache dans le bélier à l'équinoxe (si ce n'est pas l'inverse). On remarque le changement de forme et de taille entre ces trois positions sur la ligne. (Crédit photos : Y. Gominet & P. Descamps)

règle² empirique de Cassini représente un excellent compromis entre les besoins antagonistes de netteté et de luminosité de l'image du Soleil reçue sur le pavé : si l'œilleton est beaucoup trop petit, l'image gagne en netteté mais perd en éclat, de plus elle s'expose également à subir les premiers assauts de la diffraction de la lumière par les bords de l'orifice dont l'effet paradoxal est d'augmenter artificiellement les dimensions de la tache lumineuse ; inversement si l'œilleton est trop grand, l'image est certes beaucoup plus lumineuse mais présente des contours considérablement dégradés par une pénombre envahissante. L'œilleton fut percé dans une plaque de cuivre posée horizontalement, au droit de la façade intérieure. Cette position horizontale permet de facilement corriger les mesures de l'effet de la pénombre (voir encadré).

Le cône de lumière s'appuyant sur l'œilleton laisse sur le sol de la salle une trace lumineuse de forme elliptique. Plus ce cône tombe obliquement, plus l'ellipse sera grande et allongée. Ainsi, au solstice d'hiver, où le Soleil culmine au méridien à près de 18° de hauteur à Paris, elle s'étend dans sa plus grande dimension sur près d'un mètre de long; en revanche, au solstice d'été, la tache atteint une forme pratiquement circulaire, mesurant à peine 10 cm d'extension (Figure 4), soit dix fois plus petite qu'au solstice d'hiver mais avec un éclairement (éclat par unité de surface) vingt-sept fois supérieur - la tache concentre en effet la même quantité de lumière totale mais sur une surface plus restreinte.

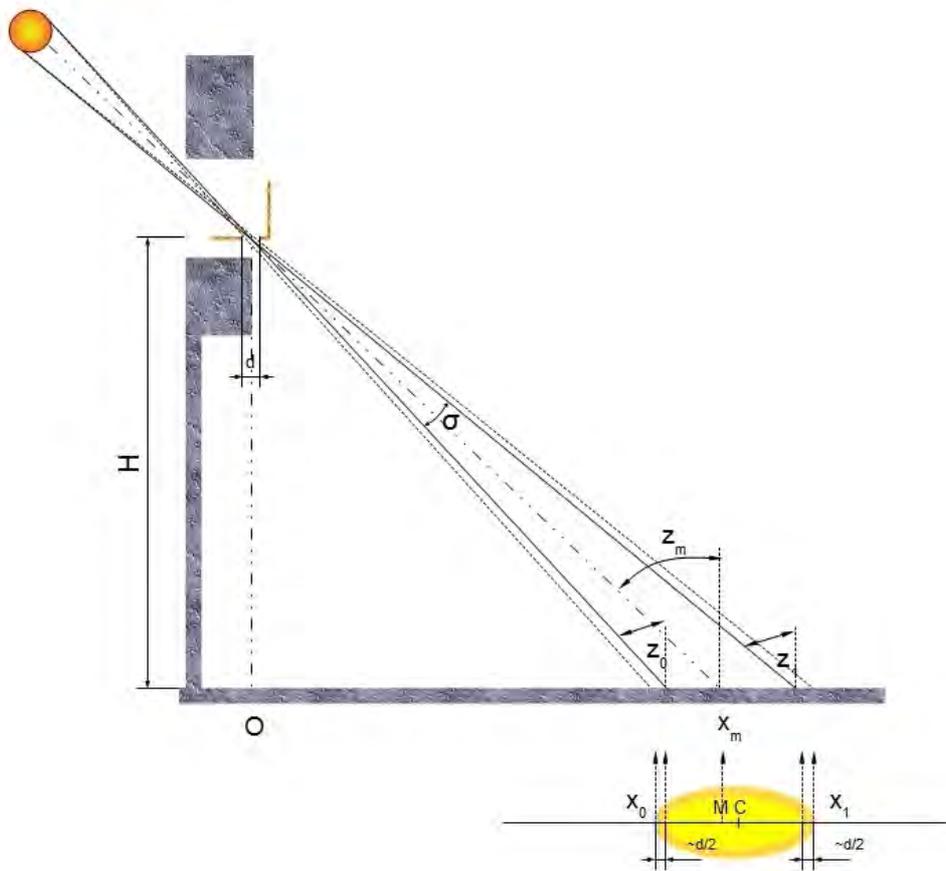


Fig.5 : Principe de la *Camera Obscura* (ou chambre noire) – terminologie introduite par Kepler -, connue depuis l'Antiquité. A partir du XVIe et jusqu'au XVIIIe siècle, la camera obscura bénéficia d'un vif regain d'intérêt, non seulement auprès des astronomes, dans leurs observations du Soleil, mais également auprès des artistes tels que le peintre Johannes Vermeer (1632-1675). La vue de gauche est tirée du *De Radio Astronomico et geometrico* (1546) par Reinerus Gemma-Frisius (1508-1555). C'est la première illustration publiée d'une camera obscura montrant avec exactitude la projection de l'image inversée d'une éclipse de Soleil qu'il observa le 24 janvier 1544 à Louvain. A droite, l'éclipse partielle de Soleil du 29 mars 2006, vue sur la grande méridienne de la basilique Santa Maria Degli Angeli de Rome à 10:58 UTC (crédit photo : Costantino Sigismondi). La distance zénithale était alors de 38°28' ; la graduation de droite affiche la tangente de la distance zénithale : $100 \tan(38,46) = 79,44$. On vérifie que la tache lumineuse est bien la projection de l'image du Soleil dont une partie est grignotée par la Lune éclipseante.

²- Dans le courant du XIXe siècle, diverses formules furent proposées pour dimensionner au mieux le diamètre du gnomon ; appliquées au cas de la méridienne de l'Observatoire de Paris, elles donnent une valeur optimale de 6,6 mm pour obtenir une image nette en bout de ligne, par conséquent assez proche de celle donnée par la règle de Cassini, 9,9377 mm.

Principe de la mesure de la hauteur du Soleil sur la méridienne de l'Observatoire de Paris

Un œilleton circulaire de diamètre d , percé dans une plaque en cuivre placée à l'horizontale, fait office de gnomon. La plaque est mise à l'équerre par son milieu afin de créer une large zone d'ombre au sol. La position horizontale de l'œilleton présente de multiples avantages : outre le fait que la hauteur de son centre peut ainsi être très précisément déterminée, il en va de même du vertex de la ligne méridienne – point origine des hauteurs situé à l'aplomb du centre de l'œilleton. Cependant, l'avantage principal résultant de cette configuration tient dans le mode de correction de la légère pénombre encerclant l'image lumineuse du Soleil dont le diamètre linéaire, en première approximation, est alors augmenté du diamètre de l'œilleton. Il n'en irait pas de même si l'œilleton avait une toute autre position, verticale ou inclinée.



La figure 6 présente la géométrie générale de la ligne méridienne ainsi que l'image elliptique du Soleil entourée d'une zone de pénombre. Le centre C de cette image ne correspond pas au centre M du Soleil sur la ligne mais il s'en écarte très peu, tout au plus de 7 mm au solstice d'hiver, ce qui représente un peu moins de $4''$ de degré. La quantité à déterminer est l'angle zénithal apparent z_m du centre du Soleil. La méthode généralement utilisée est celle imaginée par Cassini à Bologne, en 1655 : elle consiste à mesurer les positions x_0 et x_1 des bords supérieur et inférieur de l'image solaire auxquelles on ajoutera ou enlèvera le rayon de l'œilleton, $d/2$, afin d'obtenir les valeurs des distances zénithales z_0 et z_1

des bords supérieur et inférieur du Soleil. On obtient alors directement la valeur de z_m ainsi que celle du diamètre du disque solaire de la façon suivante :

$$z_m = \frac{(z_0 + z_1)}{2} \text{ et } \sigma = z_0 - z_1$$

Delambre proposera en 1814 (*Astronomie théorique et pratique*, vol.1, Ch.IV, p.33-54) une méthode différente et plus précise, qui ne requiert aucune approximation sur la dimension de la pénombre.

$$\tan z_m = \frac{x_0 + x_1}{2H} \left(1 - \frac{\sin^2 \sigma / 2}{\cos^2 z_m} \right)$$

La controverse sur la variation de L'obliquité de l'écliptique

La mesure de l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire l'inclinaison de l'axe de rotation terrestre sur son plan orbital, est l'une des plus anciennes mesures astronomiques effectuées. À l'ouverture du XVIII^e siècle, le chevalier de Louville (1671-1732), donna en 1716 une communication à l'Académie Royale des Sciences, dans laquelle il assurait que l'obliquité avait diminué de 20' depuis Pythéas, en 350 avant J.-C., donc d'environ 1' par siècle. Cette proclamation, associée à des arguments historiques pas toujours très convaincants, souleva un rejet général de la part des astronomes de l'Académie. Cependant son secrétaire perpétuel, Bernard de Fontenelle qui avait toujours le sens de la formule et de l'envolée lyrique, semblait ébranlé dans ses convictions : « Quant-au grand dérangement physique que l'hypothèse de M. de Louville apporterait un jour à la Terre, il est vrai qu'il n'est guère vraisemblable pour le commun des hommes, mais les Philosophes le digéreraient plus aisément ». Ce dérangement physique auquel Fontenelle fait allusion est la perspective d'une coïncidence parfaite entre le plan de l'écliptique et celui de l'équateur en à peine 140 000 ans ; nous irions alors vers un équinoxe éternel !

Lorsque Jacques Cassini présenta à l'Académie son projet de construction d'une ligne méridienne à l'Observatoire, il avait en vue principalement de remesurer l'obliquité de l'écliptique et surtout sa variation. Sa première mesure intervint à l'occasion du solstice d'hiver de l'année 1731. Il trouva une hauteur méridienne du Soleil au jour du solstice d'hiver 1731 valant 17°41'30", qu'il compara à celle qu'il déduisit d'une observation similaire faite par son père en 1671, 17°41'3", pour en déduire une diminution de 27" en l'espace de 60 ans, soit une diminution de 45" par siècle. Il présenta à l'Académie ces premiers résultats³ en 1732, l'année même de la mort de Louville dont l'éloge qu'en donna Fontenelle nous indique, qu'à cette époque, l'idée de la variation de l'obliquité était toujours tenue comme « singulière et [...] sujette à contestation ». Cependant, le peu de publicité et de visibilité – dirions-nous aujourd'hui – donnée par Cassini à ses propres mesures – le climat général ne s'y prêtait peut-être pas ou attendait-il d'autres relevés futurs pour en confirmer la réalité ? – ont contribué à l'indifférence, voire à l'oubli, dans lequel tomba aussitôt cette toute première confirmation de

³- Jacques Cassini, *De la Méridienne de l'Observatoire*, in Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1732, p.452-471. Nous avons également pu évaluer la précision du relevé de la hauteur à la ligne méridienne du côté du solstice d'hiver à partir des données de Cassini pour le solstice de décembre 1730 : elle se monte à environ 5", ce qui témoigne du soin extrême qui avait été apporté à son tracé.

la diminution de l'obliquité, affectée d'un taux de variation très proche de surcroît de celui qui sera finalement accepté un siècle plus tard.

Au siècle suivant, Delambre finalement pouvait ainsi conclure sur l'apport des méridiennes au XVIIIe siècle⁴ : « Il y a grande apparence qu'on ne fera plus de gnomons nouveaux ; mais il faut conserver au moins les anciens ; et il ne coûterait pas beaucoup pour les consulter tous les ans. Il paraît pourtant qu'on les néglige. [...] Tout ce qu'on peut dire en leur faveur, c'est que, s'ils n'ont pas fait connaître la quantité précise de la diminution d'obliquité, ils ont au moins mis cette diminution hors de doute. Le Monnier qui la contestait opiniâtrement, a été obligé de l'admettre, mais la moindre qu'il a pu. Les astronomes ne la croient que de 45" ou 46" par siècle. Le temps seul pourra décider cette question difficile. ».

La méridienne de nos jours

Le gnomon actuel n'est plus celui de 1729. La plaque en cuivre, à travers laquelle avait été percé l'œilleton, a disparu. Depuis le pavé de la salle Cassini, le visiteur peut simplement constater la présence, haut placé, d'un trou de lumière très intense ; c'est en réalité une simple lentille, un verre-objectif de 85 mm de diamètre, qui fait maintenant office de gnomon (Figure 4). On ne peut dater précisément le remplacement de la plaque par une lentille.

L'usage d'une lentille comme gnomon n'est pas naturel. Il est justifié à l'Observatoire car elle ne sert qu'à rendre l'image du Soleil plus lumineuse en focalisant sa lumière dans cette vaste salle déjà largement ouverte à la lumière diffuse du jour grâce à ses très hautes fenêtres (de près de sept mètres de haut). Jadis, les observations étaient effectuées dans une totale obscurité, créée au moyen de rideaux de coutil, lourds et opaques.



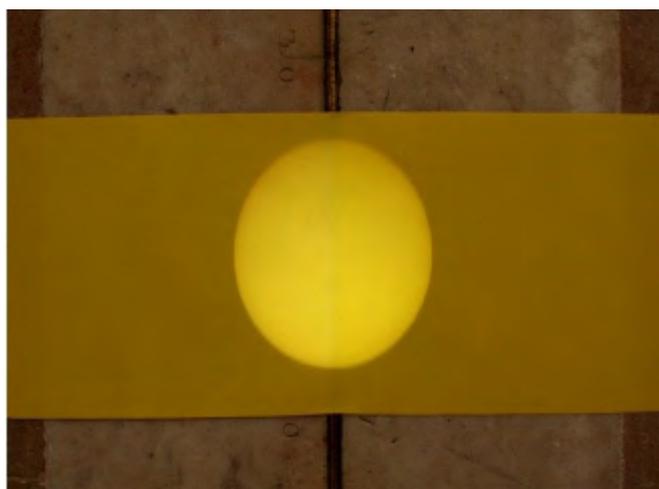
⁴ - Jean-Baptiste Delambre, *Histoire de l'Astronomie au XVIIIe siècle*, 1827, 396.

Fig.8 : Vues depuis l'intérieur de la salle Cassini (en haut à gauche et à droite) et depuis l'extérieur (en bas à gauche) de la lentille simple du gnomon de l'Observatoire de Paris (crédit : J. Bertier & S. Barouche). La vue de droite a été prise le 12 mai 2011. On note la forte obstruction due au muret le surplombant ; même raboté, ce muret occasionne la disparition totale de la tache une dizaine de jours autour du solstice d'été.

De nos jours, la méridienne ne fait plus de mesures, elle s'offre juste au regard du passant. Cependant, sitôt sorti de la zone étroite de focalisation, l'image devient de plus en plus floue ; C'est le revers de la lentille : la tache solaire apparaît très floue du côté du solstice d'hiver et des équinoxes puis, au fur et à mesure que l'on s'approche du solstice d'été, les contours de l'ellipse solaire deviennent plus tranchés. Nous avons pu déterminer approximativement les deux périodes de l'année où l'image du Soleil vient parfaitement se focaliser sur le sol. Il s'agit du 5 mai et du 6 août (Figure 5). Il est fort probable que cette lentille soit celle utilisée par Cassini et Roemer en 1681, lors de la détermination du solstice d'été à la ligne méridienne provisoire.

Nous avons réalisé différents relevés de la hauteur méridienne du Soleil et des instants de passage au méridien à partir de la ligne. Il en résulte que d'un solstice à l'autre, les temps de passage sur la ligne présentent un retard systématique de l'ordre de la seconde sur les instants prédits par les éphémérides de l'IMCCE. Ce retard est cependant plus important, de quelques secondes, vers le solstice d'hiver, ce qui représente seulement une dizaine de millimètres sur le sol. Ceci indique que la ligne décline légèrement vers l'est d'un angle d'environ 1'. Ce faible azimuth de la ligne témoigne du grand soin avec lequel la ligne a été tracée respectivement à la direction vraie du méridien.

En ce qui concerne la mesure de la hauteur méridienne, des erreurs importantes, jusqu'à 2' à 3' d'angle, apparaissent. Elles s'expliquent principalement par le basculement vers le sud de la façade méridionale du bâtiment constaté dès le 7 août 1778 par Jean Dominique Cassini IV qui note⁵ : « j'ay tendu un fil de soie verte avec un plomb du centre du trou de la plaque du gnomon, pour reconnaître si le centre répondait toujours au point de zéro. [...] nous avons trouvé que le fil à plomb [...] s'écartait vers le sud de 3 ³/₄ lignes ». Ce basculement représentait alors 8,5 mm. Nous avons refait la mesure à l'aide d'un fil à plomb positionné au niveau du gnomon le long de la façade intérieure ; une déviation de 15 mm vers le sud a été notée (Figure 4). Ces mouvements constatés dans le bâtiment par Cassini IV ont mené aux grands travaux de restauration des voûtes de l'Observatoire réalisés entre 1786 et 1791.



⁵ - Charles Wolf, in *Histoire de l'Observatoire de Paris de sa fondation à 1793* (1902), p.93.

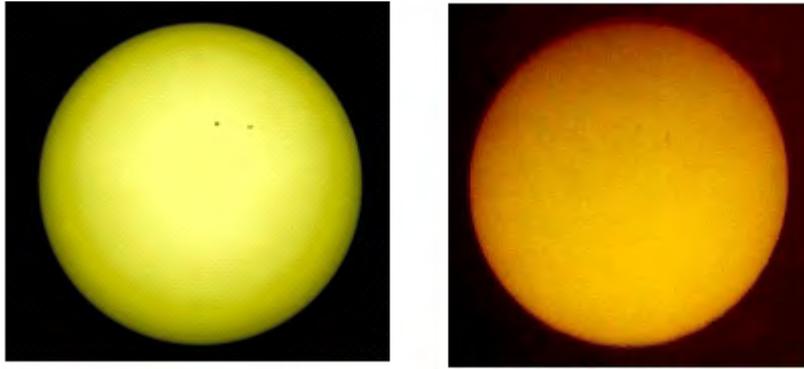


Fig.9 : Image du Soleil prise le 5 mai 2011. L'image prise sur la ligne méridienne a été redressée et comparée à une image faite par le satellite SDO (Solar Dynamics Observer). On y distingue très bien la présence de deux piqures sombres, que l'on peut identifier comme étant deux taches solaires. L'image du Soleil produite par la lentille est donc parfaitement focalisée ce qui donne pour la lentille une longueur focale de 11,8 m qui correspond à la distance entre le gnomon et le sol à cette date de l'année où le Soleil a une hauteur méridienne à Paris d'un peu plus de 57° (crédit : S. Barouche et P. Descamps).

Fig.10 : Mesure au fil à plomb du déversement vers le sud d'environ 15 mm de la façade méridionale de l'Observatoire de Paris. Au temps où fut construite la ligne méridienne, son point origine tombait parfaitement à l'aplomb du gnomon (crédit : J. Normand). ►



Conclusion

La méridienne de l'Observatoire de Paris apparaît comme l'une de ces très grandes lignes méridiennes qui vont éclore au XVIIIe siècle au sens où elles sont construites dans un but

astrométrique avec le souci d'atteindre des précisions rivalisant avec la seconde de degré. Elle demeure comme la seule à avoir été construite d'une part dans un établissement dédié à l'astronomie et d'autre part hors d'une église qui à l'époque était le seul type d'édifice suffisamment élevé et tout en longueur de façon à accueillir des gnomons élevés.

On ne pourrait mieux conclure qu'en reprenant les propres mots de Cassini IV⁶: « Quant à la grande salle méridienne, elle n'est utile que dans sa longueur nord et sud, car on n'a point exécuté le projet qu'on avait eu dans la création, d'en former une espèce de cadran. Je ne tiens donc qu'à conserver le gnomon et la ligne méridienne, qui, sans être d'un grand usage dans l'astronomie moderne, méritent néanmoins de subsister, comme ancien monument et comme le premier de tous les instruments qui, dès les tems les plus reculés, a

⁶- Jean-Dominique Cassini, in *Mémoires pour servir à l'histoire des sciences et à celle de l'Observatoire* (1810), p. 50.

servi à déterminer les mouvements du soleil. D'ailleurs, cette ligne tracée et divisée avec soin sur une lame de cuivre incrustée dans une bande de marbre blanc, sur une longueur de 90 pieds, nous représente une portion visible de cette fameuse méridienne qui traverse la France et qui a donné lieu à de si mémorables travaux; tâchons donc de la conserver. »



A l'occasion du tricentenaire de la mort de J.D. Cassini, l'IMCCE ouvre un nouveau portail consacré à la grande ligne méridienne de l'Observatoire de Paris à l'adresse suivante : http://www.imcce.fr/hosted_sites/meridienne/. Il sera possible en particulier de calculer et simuler la tache lumineuse du Soleil sur la ligne méridienne pour une date quelconque à partir des éphémérides de l'IMCCE. Ce site sera également accessible depuis l'exposition d'hommage à Cassini que lui consacrera l'Observatoire de Paris à partir de mai 2012.

Dans ce numéro de Cadran info, vous trouverez la présentation de ce site dans l'article « 25- Sites concernant les œillets ».





Objectif : pas d'œilleton

Michel Vercasson

Cela peut paraître paradoxal dans une publication consacrée aux œillets, mais pourquoi ne pas envisager le remplacement des œillets par des objectifs photographiques.

Il y a plusieurs années, j'ai présenté à la commission des cadrans solaires une maquette destinée à montrer la faisabilité d'un appareil pompeusement appelé « héliochronomètre ».



Photo n° 1

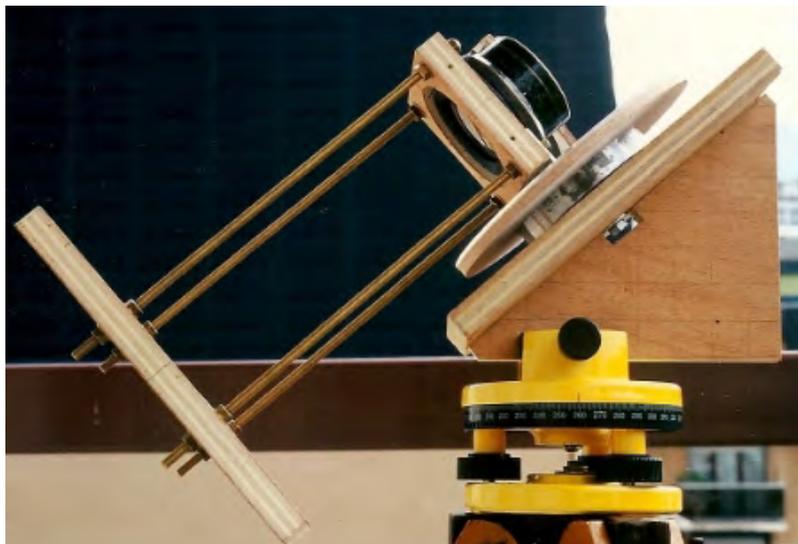
Dans le but d'en améliorer la précision, j'ai remplacé l'œilleton habituel projetant une tache lumineuse sur une surface sphérique par un objectif photographique projetant une véritable image du Soleil sur un plan perpendiculaire à son axe.

Les photos 1, 2, 3 et 4 montrent clairement le principe de l'appareil. Il se compose d'une chambre photographique à claire-voie mobile autour d'un axe polaire dont la rotation peut être mesurée sur un cercle gradué en heures.



▲ Photo n° 2

Photo n° 3 ►



L'objectif utilisé, le seul dont je disposai, est un vieil anastigmat dissymétrique à quatre lentilles : le SAPHIR produit autrefois par la firme BOYER. Sa distance focale est de 210

mm et son ouverture permet de régler l'éclairement entre F/4,5 et F/32, ce qui permet de régler l'éclairement de l'image du Soleil sans modifier son diamètre.

Cet objectif, initialement destiné à la photographie au format 13 x 18 cm, présente un champ de netteté mesuré sur la diagonale du format d'environ 55° ; il est donc largement suffisant pour englober les positions extrêmes du Soleil aux solstices.

Dimensions de l'image du Soleil

Dans la mesure où la distorsion de l'objectif peut être négligée, celui-ci réalise une projection, au sens géométrique du terme, à partir de son point nodal image.

Un calcul simple permet d'obtenir les dimensions du spot lumineux (voir schéma en fin d'article).

L'image axiale aux équinoxes est un cercle d'environ 1,95 mm de diamètre.

Au solstice, l'image a la forme d'une ellipse de 2,13 x 2,32 mm et il faut remarquer que la distance entre l'image du centre du Soleil et le centre de l'ellipse est négligeable : 0,002 mm.

Il est évident que, pour la réalisation d'un héliochronomètre de précision, il conviendrait d'utiliser un objectif rectilinéaire dont la distorsion soit très faible, voire de tenir compte de la distorsion résiduelle pour le tracé de la courbe en 8 si le constructeur voulait bien fournir les éléments nécessaires.

Figures du spot

Les photos 5 à 10 comportent un quadrillage millimétrique qui permet d'évaluer les dimensions et les déplacements du spot.

La photo 5 montre le spot au voisinage des équinoxes ; la photo 6 en est un agrandissement.

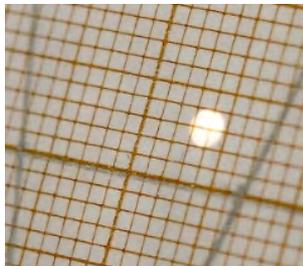


Photo n° 6



Photo n° 4

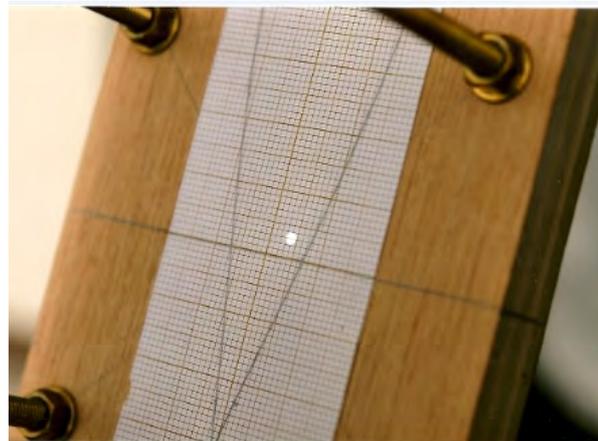
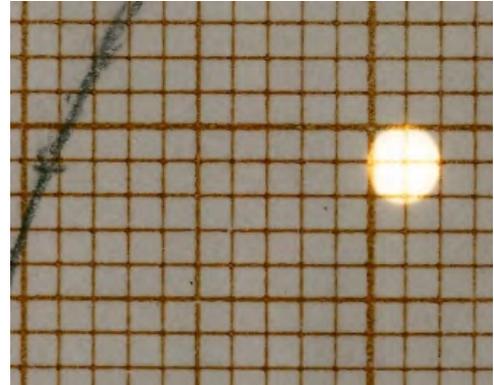
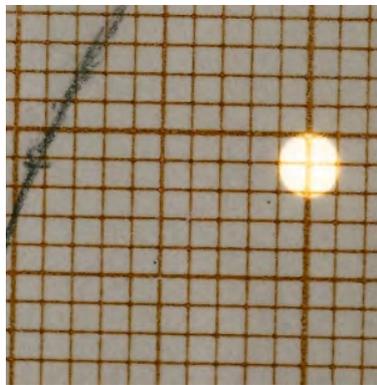
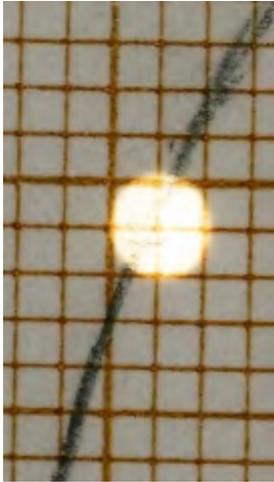


Photo n° 5

L'aspect elliptique du spot est dû à l'obliquité de la prise de vue.

Les photos 7, 8, 9 et 10 montrent le spot au voisinage du solstice d'hiver. Les photos 8 et 9 ont été prises avec un intervalle de temps d'une minute.

Sur la photo 8, l'aspect elliptique est évident et on peut constater un bon accord de ses dimensions avec les résultats du calcul théorique.



◀ Photo n° 7

Photo n° 8 ▲

Photo n° 9

En conclusion, le remplacement d'un œilleton par un objectif photographique est susceptible d'apporter une amélioration grâce à une meilleure définition de l'image du Soleil. Son usage paraît toutefois se limiter à des appareils de haute précision et ne pourrait sans doute pas être généralisé.

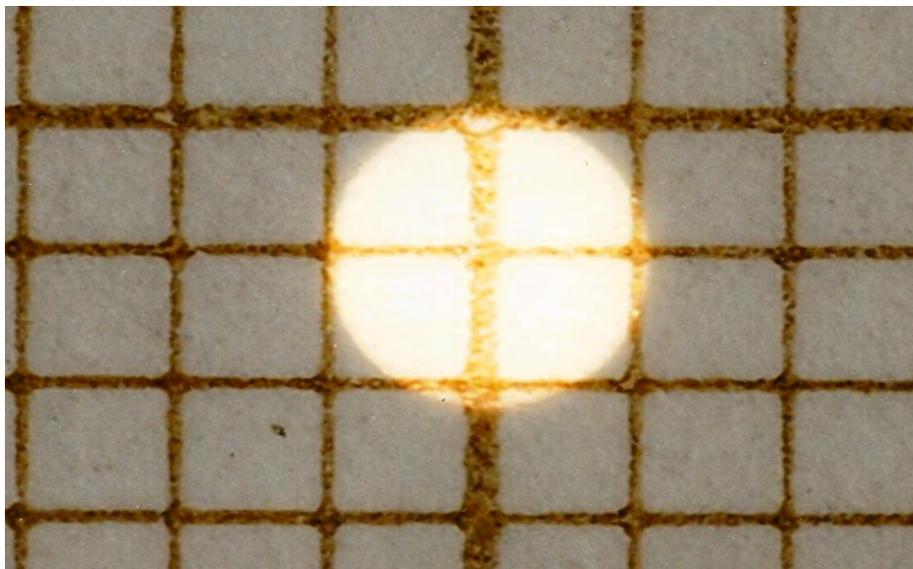
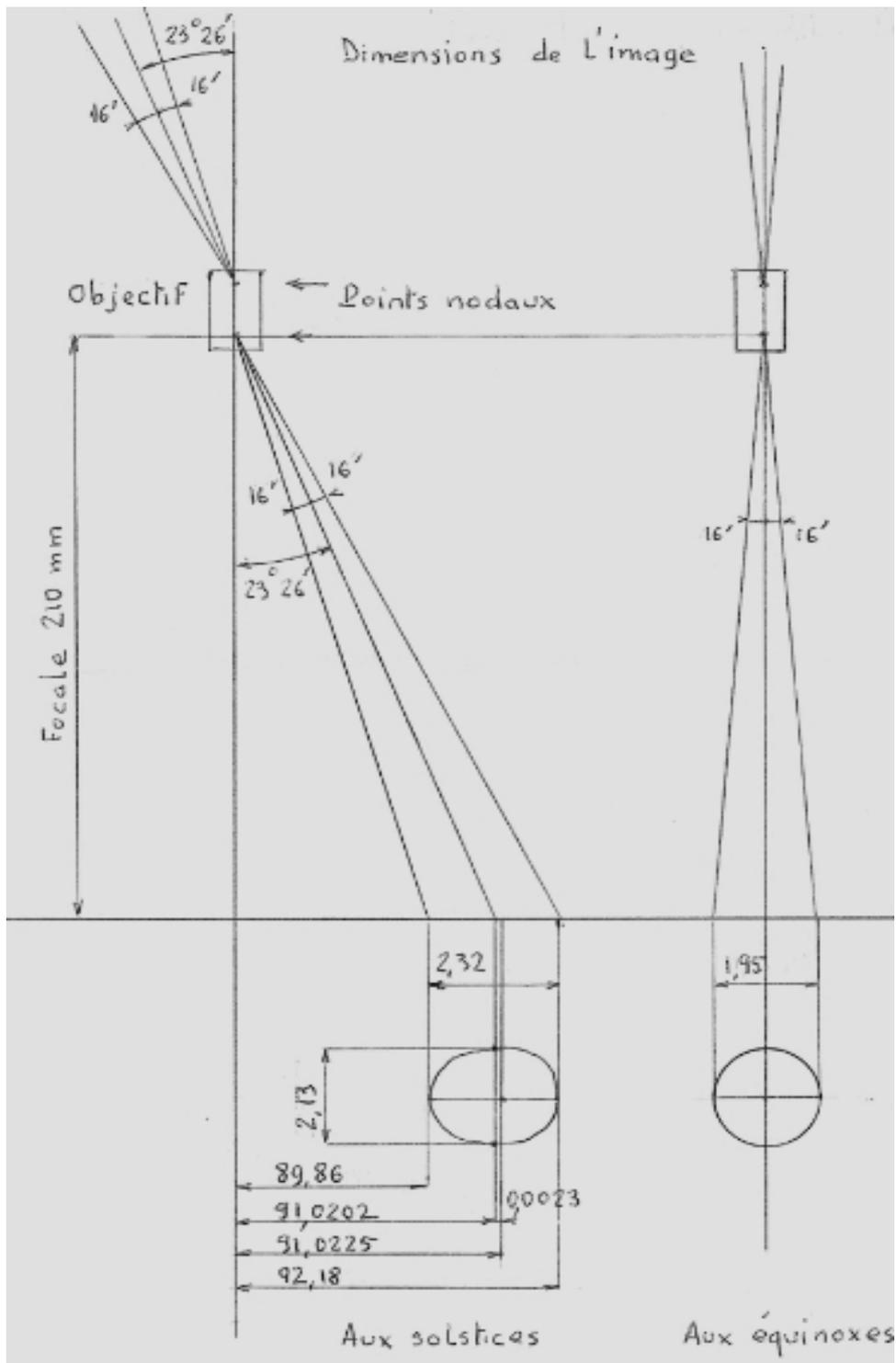


Photo n° 10

Dimensions de l'image du Soleil : schéma





La méridienne de Villers-sur-Mer

Denis Savoie

En avril 2011 s'est ouvert au sud de Deauville, à Villers-sur-mer, le Paléospace¹, un musée qui comprend notamment 300 m² d'exposition permanente consacrée à la paléontologie (falaise des Vaches noires), au marais de Villers-Blonville et au méridien de Greenwich.



Il se trouve en effet que la première ville française que coupe le méridien international est Villers-sur-Mer ; il fut donc décidé de consacrer au musée une salle dédiée à l'histoire de la mesure des longitudes sur Terre². Pour animer et embellir cette salle d'astronomie de façon originale, l'idée de créer une méridienne intérieure suscita un vif intérêt.

Il ne s'est pas construit une telle méridienne en France depuis le XVIII^e siècle ; c'est donc l'occasion de détailler sa réalisation et montrer en quoi elle est innovante.

Les travaux de construction du bâtiment, lequel est orienté Nord-Sud, débutèrent à l'automne 2009. Mais c'est bien en amont qu'il fallut réfléchir à l'agencement de la salle méridienne, à la position de l'œilleton, à son diamètre et surtout comment tracer avec une grande précision à l'intérieur de la salle, fermée par un toit, le méridien du lieu.

Le plus facile fut de déterminer les coordonnées géographiques du lieu :

latitude = 49° 19' 41''

longitude = 0° 0' 47,85'' E = - 0 m 3 s

Le Paléospace n'est donc pas exactement situé sur le méridien international de Greenwich puisqu'il s'en faut de 3 secondes de longitude Est, ce qui représente sur le terrain environ 962,6 m.

1 – L'œilleton et la tache de lumière

Un point très important dans une méridienne intérieure – et qui a posé bien des problèmes dès le XVI^e siècle – est celui du diamètre de l'œilleton³. Profitons-en pour le rappeler encore une fois : la « règle » de Cassini, qui consiste à choisir un œilleton dont le diamètre est égal au millième de la hauteur de l'œilleton au-dessus du sol, n'est pas bonne. Cela donne une tache de lumière assez petite, et surtout trop peu lumineuse. Il faut au

¹ <http://www.paleospace-villers.fr/>

² Le contenu scientifique de cette salle a été réalisé par Daniel Gambis (*Service International de Rotation de la Terre*, Observatoire de Paris) et Denis Savoie (SYRTE).

³ Sur ce problème comme sur tous ceux posés par les méridiennes et leur histoire, voir l'excellent ouvrage de J. L. Heilbron, *Astronomie et églises*, éd. Belin, Paris, 2003. Le recensement mondial des méridiennes se trouve dans l'ouvrage de A. Gotteland, *Les méridiennes du monde et leur histoire*, 2 vol., éd. Le Manuscrit, Paris, 2008.

contraire choisir un œilleton assez large, qui laisse passer suffisamment les rayons solaires. Jérôme de Lalande⁴, dans son *Encyclopédie méthodique*, justifiait déjà par des arguments parfaitement clairs l'inadéquation de cette « règle » : « M. Cassini jugea que le diamètre du trou devait être en général la millième partie de la hauteur du gnomon ; mais je crois qu'il est souvent utile de le rendre plus grand, pour avoir plus de lumière ; l'inconvénient qui en résulte par l'augmentation de l'image, n'est pas considérable ; en augmentant le trou du gnomon d'une méridienne de 3 lignes, on n'ajoute que 3 lignes au diamètre de l'image, quelque grande qu'elle soit, et à quelle distance qu'elle soit du trou, et cependant on peut augmenter beaucoup la lumière ».

Plusieurs cas de figures peuvent se présenter : sur une méridienne au sol, l'œilleton peut être horizontal dans le toit (cas de Villers-sur-Mer), ou vertical sur un mur (cas de la méridienne de l'église Saint-Sulpice à Paris, de la méridienne de Tonnerre dans l'Yonne et de la méridienne de l'observatoire de Paris). Dans tous ces cas, la tache de lumière est elliptique, et ceci d'autant plus que la tache est éloignée de l'œilleton. Le cas très défavorable étant les alentours du solstice d'hiver pour une méridienne horizontale avec un œilleton horizontal, on peut remédier à cette très forte déformation de la tache solaire en arrêtant la méridienne au sol et en la prolongeant sur un mur, cas de Saint-Sulpice à Paris et de Villers-sur-Mer.

Au voisinage du solstice d'été, par contre, la tache est relativement circulaire. A Villers-sur-Mer (fig. 1), le diamètre de l'œilleton a été fixé à 1,5 cm (dans une plaque de métal de 0,1 cm d'épaisseur), le sol étant à 406,6 cm de la verticale de l'œilleton (la « règle » de Cassini aurait donné un diamètre de 0,41 cm).

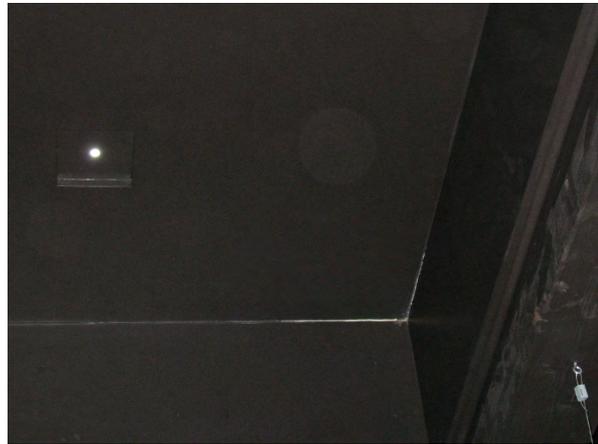


Figure 1 : Œilleton de 1,5 cm de diamètre percé dans une plaquette métallique placée sur le toit du Paléospace (photo D. Savoie)

Il n'en reste pas moins qu'en prenant un diamètre suffisant d'œilleton, on reste confronté au problème de la lecture du midi vrai : apprécier l'instant (donc à la seconde

près) où le milieu de la tache solaire coupe la méridienne relève de la gageure. C'est pour cela que les astronomes qui effectuaient des mesures (en général de hauteur du Soleil) avec une méridienne notaient l'instant où le premier bord de la tache touchait la ligne, puis l'instant où le deuxième bord cessait de toucher la ligne, la moyenne des deux instants donnant de passage

⁴ Jérôme de Lalande, *Encyclopédie méthodique*, op. cit., p. 384. Sur le calcul des dimensions d'une tache solaire elliptique issue d'un œilleton, voir D. Savoie, « Œilleton et tache de lumière », *CadranInfo* n° 24, octobre 2011, p. 49-57. Dans cet article, on montre notamment l'écart entre une tache solaire issue d'un œilleton « cassinien » et un œilleton mesurant le double du diamètre. Dans le même numéro 24 de *CadranInfo*, trois articles complètent celui cité *supra* et constituent les plus sérieuses études sur le problème des œilletons : M. Goutaudier, « Œilleton et tache de lumière », p. 58-67 ; et G. Baillet, « Œilleton, ombre, pénombre », p. 72-87 et « Œilleton et familles de courbes », p. 88-101.

On consultera avec intérêt l'article de G. Ferrari, « L'image du soleil dans les cadrans solaires à chambre obscure », *CadranInfo* n° 21, mai 2010, p. 55-65, qui s'intéresse particulièrement à la luminosité de la tache solaire dans les grandes méridiennes italiennes. Sur la méridienne de Cassini à Bologne, voir G. Paltrinieri, *La meridiana della Basilica di San Petronio in Bologna*, Bologne, 2001.

du centre de la tache.

A Villers-sur-Mer, on a imaginé un nouveau système de lecture : la ligne méridienne est bordée, de chaque côté, d'une courbe très peu évasée et qui correspond à l'enveloppe de la tache de lumière en fonction de la date. De la sorte on lit midi solaire lorsque la tache est exactement comprise entre les deux enveloppes (fig. 2). Le calcul d'une telle enveloppe nécessite de savoir calculer les dimensions de la tache solaire à midi solaire – ce qui ne présente aucune difficulté –, puis de faire varier la hauteur du Soleil en fonction de la date en ne s'intéressant qu'à la variation du demi petit axe de l'ellipse. Bien entendu, un calcul rigoureux⁵ doit intégrer en plus de la réfraction, la variation du diamètre solaire, lequel passe de 0° 32' 30'' début janvier à 0° 31' 28'' début juillet.

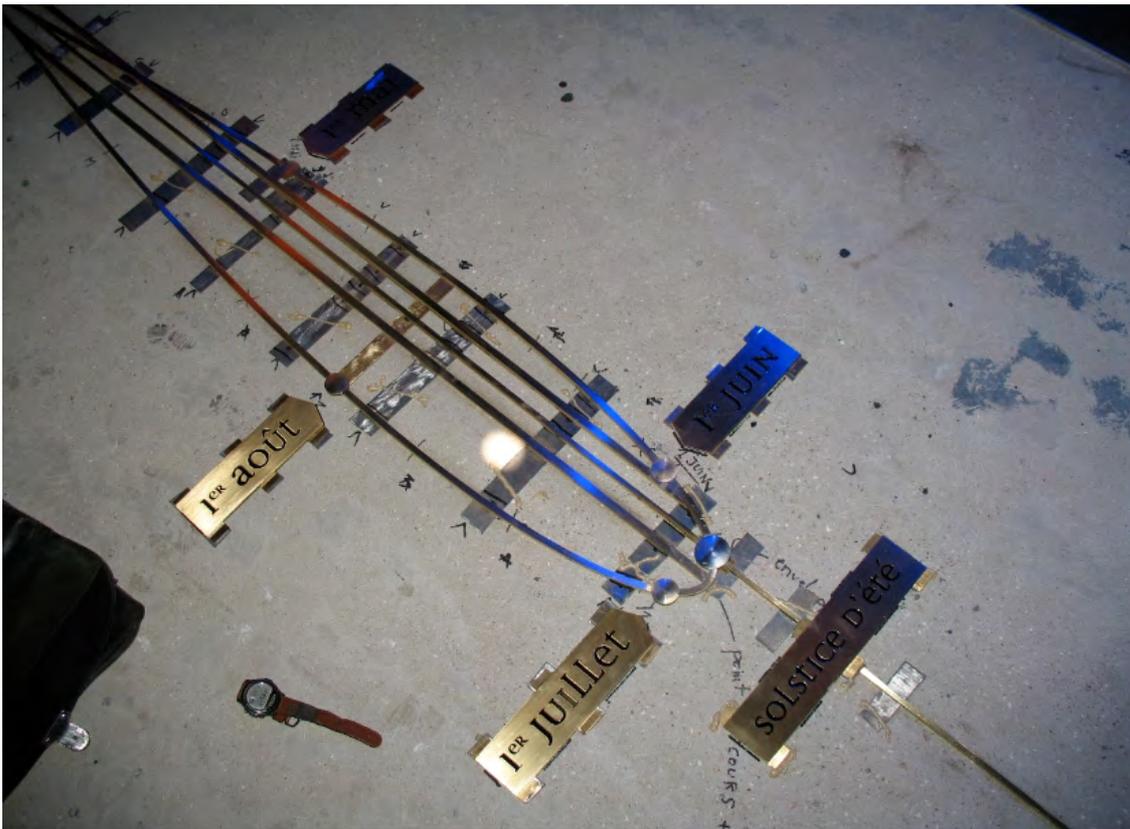


Figure 2 : Structure en laiton posée au sol pendant la phase de test. On voit nettement la tache de lumière circulaire qui s'apprête à tangenter le bord occidental de l'enveloppe, la ligne méridienne proprement dite étant la droite que l'on voit à droite (photo D. Savoie)

A Villers-sur-Mer, la largeur de la tache au solstice d'été varie de 5,6 cm (c'est le petit axe de l'ellipse orienté Est-Ouest, le grand axe, qui mesure 6,1 cm, est orienté Nord-Sud) à 11,6 cm lorsqu'elle arrive au pied du mur à la mi-novembre et à la fin janvier (le grand axe mesure alors 28 cm) (fig. 3). Sur le mur (situé à 997,5 cm de l'œilleton) qui prolonge la méridienne verticalement, la largeur de la tache est relativement circulaire au solstice d'hiver puisque sa largeur est de 11,4 cm, le grand axe mesurant 12,3 cm.

⁵ Il a été tenu compte de la réfraction dans tous les calculs. Au solstice d'hiver par exemple, la hauteur géométrique du Soleil à midi vrai est de 17° 14' 19'' et de 17° 17' 31'' si l'on tient compte de la réfraction. Cela altère donc la position de la tache solaire de façon non négligeable.

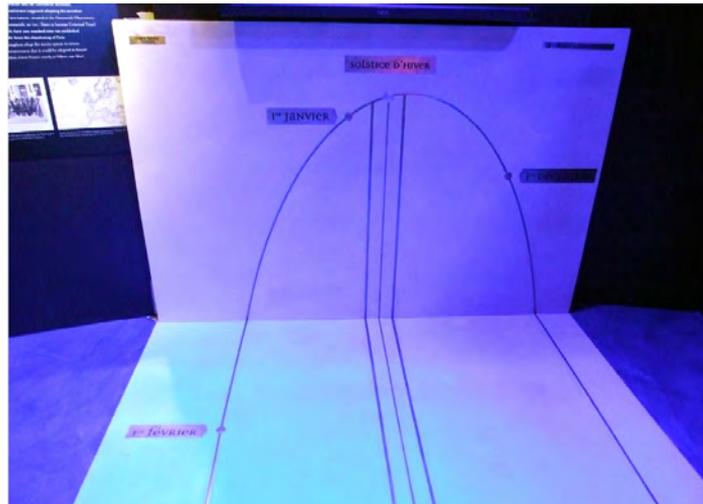


Figure 3 : Détail de la partie verticale de la méridienne. La tache de lumière y est située une partie des mois de décembre et janvier (photo E. Tricot)

2 – Tracé de la méridienne intérieure

Les grandes méridiennes historiques, principalement en France et en Italie, ont été tracées en utilisant la position de la tache de lumière (projetée par un œilleton), essentiellement aux solstices, c'est-à-dire à des périodes de l'année où la déclinaison du Soleil ne varie pratiquement pas. Cette solution n'est cependant pas sans inconvénient ; c'est au solstice d'été, à midi solaire, que l'azimut du Soleil varie le plus vite, de sorte que le déplacement au sol de la tache de lumière est relativement rapide. Il faut donc être très vigilant pour matérialiser l'instant même du passage au méridien. Au solstice d'hiver par contre, l'azimut varie beaucoup plus lentement ; mais on peut être confronté à cette période de l'année au problème de la très faible luminosité de la tache, d'autant plus que la luminosité ambiante, comme à l'église Santa degli Angeli de Rome, rend très difficile la locali-



Figure 4 : La tache de lumière est très difficile à observer vers le solstice d'hiver sur la célèbre méridienne de l'église Santa Degli Angeli à Rome (photo D. Savoie)

sation précise de la tache et ses contours (fig. 4). Il va de soi qu'une méridienne tracée dans un bâtiment doit, autant que faire se peut, être située dans une ambiance très sombre, sur un sol plutôt clair.

C'est le cas à Villers-sur-Mer où tous ces éléments ont été pris en compte bien en amont, de sorte que la lisibilité de la tache lumineuse y est excellente.

Jérôme de Lalande, qui a fait de nombreuses mesures astronomiques avec la méridienne de Saint-Sulpice à Paris, explique dans son *Encyclopédie méthodique*⁶, comment on procède pour tracer une telle ligne :

« Mais la seule méthode exacte et rigoureuse qu'il y ait pour tracer une méridienne est la méthode des hauteurs correspondantes. On détermine par ces hauteurs le moment du midi vrai sur une bonne pendule, on marque la place de l'ombre ou de l'image du soleil au moment où la pendule marque l'heure, la minute et la seconde trouvées ; on tire par cette place, et par le pied du style, une ligne qui est la véritable méridienne. On ne sait pas au moment du midi quel est l'instant où il faut marquer l'ombre, mais on marque plusieurs points à différentes minutes. Et le soir, après les hauteurs correspondantes, on sait quel est le point où tombait le véritable midi ».

A Villers-sur-Mer, il n'était pas question d'attendre les solstices pour tracer la méridienne, d'autant que la météorologie du ciel normand pouvait renvoyer à des années cette réalisation... Il fut donc décidé d'utiliser un moyen moderne rapide et très fiable pour matérialiser le méridien dans le bâtiment : un gyroscope à laser. Cet instrument, que les tunneliers appellent le « chercheur de Nord » – ici le *Gyromat 2000* –, permet de s'orienter sans référence extérieure et de matérialiser le Nord géographique directement, avec une précision instrumentale de 2,6''.

Le voisinage du méridien international de Greenwich imposait, il va sans dire, de compléter la méridienne par une courbe en huit indiquant le midi Temps Universel (12 h TU), c'est-à-dire le temps moyen de Greenwich augmenté de 12 heures. L'angle horaire du Soleil à cet instant⁷ vaut donc à Villers-sur-Mer ($-E + 3$ secondes), E étant l'équation du temps calculée à midi TU pour 2020. Le décalage en longitude étant très faible, la courbe enserme harmo-



Figure 5 : Vue de la méridienne terminée (photo E. Tricot)

nieusement la ligne méridienne (fig. 5). Le nœud de la courbe est atteint vers le 13 avril et le 30 août. On a ajouté des plots qui indiquent le début de chaque mois, auxquels on a adjoint des plots sur la ligne de temps vrai indiquant les solstices et les équinoxes (pour ces derniers, on a matérialisé la tache). La méridienne de Villers-sur-Mer se rapproche beaucoup de celle tracée en 1785-1786 à Tonnerre par A. de Guémadeuc, J. –B. Daret et Dom C. Férouillat, dans la salle de l'ancien hôpital Marguerite de Bourgogne, ornée elle aussi d'une courbe de

⁶ Jérôme de Lalande, *Encyclopédie méthodique*, t. 2, Paris, 1785, p. 381.

⁷ Sur le calcul d'une telle courbe, voir D. Savoie, *La Gnomonique*, Les Belles Lettres, Paris, 2007, chap. XVIII et p. 61 pour les valeurs de la réfraction (constantes prises à 10° C, 1010 millibars). Pour tenir compte de la réfraction dans le calcul d'une courbe en coordonnées rectangulaires, il y a lieu de modifier les formules afin de travailler directement avec l'azimut et la hauteur du Soleil.

temps moyen⁸.

3 – Travaux et vérification



Figure 6 : Tracé au sol des points à l'aide du tachéomètre (photo J.-P. Bodin)

Les travaux ont commencé au début de l'année 2011 par la réalisation d'un sol en béton parfaitement plan, la fixation de l'œilleton et l'installation d'une plaque verticale perpendiculaire au méridien. Une fois la verticale de l'œilleton matérialisée sur ce sol, on a ensuite tracé la méridienne puis reporté l'ensemble des points, mais de façon temporaire⁹ (fig. 6). Car sur ce sol en béton a été coulée sur une partie de la salle une résine noire ; on a laissé un espace au centre de la salle pour couler une résine claire (l'écart entre béton et sol en résine est de 0,7 cm).

Les problèmes qui se posaient aux XVII^e et XVIII^e siècles pour la réalisation des méridiennes intérieures ne sont plus les mêmes aujourd'hui ; certains sont infiniment plus faciles à résoudre, d'autres soulèvent des difficultés à première vue insurmontables. Par exemple le nivellement du sol (comme sa solidité) ou encore la mesure précise de la distance de la hauteur de l'œilleton s'obtiennent avec une haute précision en utilisant des instruments à laser.

Le problème le plus complexe à Villers-sur-Mer Fig. 6a été la protection, sur le toit, de l'œilleton ; celui-ci est surmonté d'une fenêtre en plexiglas bombé¹⁰, ce qui est loin d'être idéal. Les contraintes liées à l'architecture, aux normes de sécurité, etc, en font un compromis, temporairement acceptable.

La société Cornille Havard, de Villedieu-les-Poêles, bien connue par sa fabrication de cloches, a ensuite implanté sur le sol en béton ainsi que sur le mur la structure en laiton (ligne, enveloppes, courbe en huit, plots, indications).

⁸ Sur cette superbe méridienne horizontale qui mesure près de 18 m, voir A. Gotteland, B. Tailliez, G. Camus, *La méridienne de l'hôpital de Tonnerre*, éd. A l'image de l'Abeille, 1994.

⁹ Les travaux de topographie ont été effectués par le géomètre topographe Jean-Philippe Bodin.

¹⁰ Le plexiglas peut provoquer, en plus du fait qu'il n'est pas plan, une déviation des rayons solaires, qui traversent une couche, certes mince, mais possédant un indice de réfraction. Ajoutons à cela que l'œilleton est porté par un système temporaire qui sera prochainement changé.

D'avril à mai a commencé l'inévitable et toujours « angoissante » période de test de la méridienne (fig. 7) : il faut s'assurer que la tache de lumière coupe à la seconde près la ligne méridienne, que ses dimensions concordent avec les calculs et que cette même tache coupe la courbe en huit à midi TU (soit 13 h temps légal en heure d'hiver et 14 h temps légal en heure d'été) (fig. 8). Les résultats étant très satisfaisants puisque la précision atteint la seconde de temps, et après quelques retouches de détail sur la position de certains plots, le sol (et le mur) en résine claire a été coulé début juin, scellant le tracé en laiton définitivement (fig. 9).

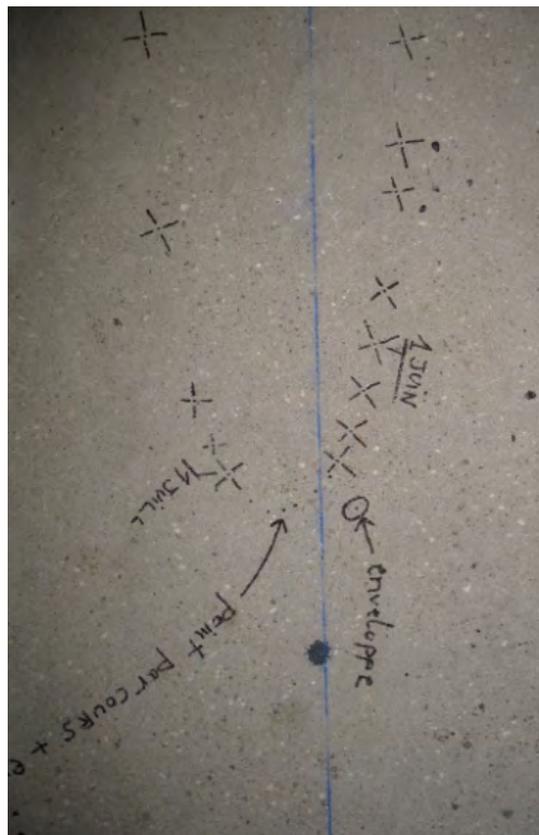


Figure 7 : Tracé temporaire sur le sol en béton de la méridienne (en bleu) et de quelques points de la courbe en huit aux alentours du solstice d'été (photo D. Savoie)



▲ Figure 8 : Tache du Soleil coupant le méridien le 22 mars 2011 à 13 h 07 temps légal (photo A. Aumont)

Plusieurs vidéos permettent *in situ* de comprendre le fonctionnement de la méridienne. Des médiateurs scientifiques sont en plus présents sur place pour guider et expliquer au public les enjeux de ce cadran solaire particulier¹¹ (fig. 10).

Même s'il est probable que l'abandon prochain des sauts de secondes intercalaires¹², donc de tout lien entre UT1 et le temps légal, se traduira à terme par un écart dans la lecture du Temps Universel sur la courbe en huit, la méridienne de Villers-sur-Mer restera toujours un repère intangible pour midi solaire.

¹¹ Je remercie Adeline Aumont, Karine Boutillier et Stéphane Croutte pour leur aide efficace tout au long de la réalisation de cette méridienne.

¹² Lors de l'assemblée générale tenue à Genève début 2012, les membres de l'IUT ont reporté à 2015 le vote sur la suppression des secondes intercalaires.

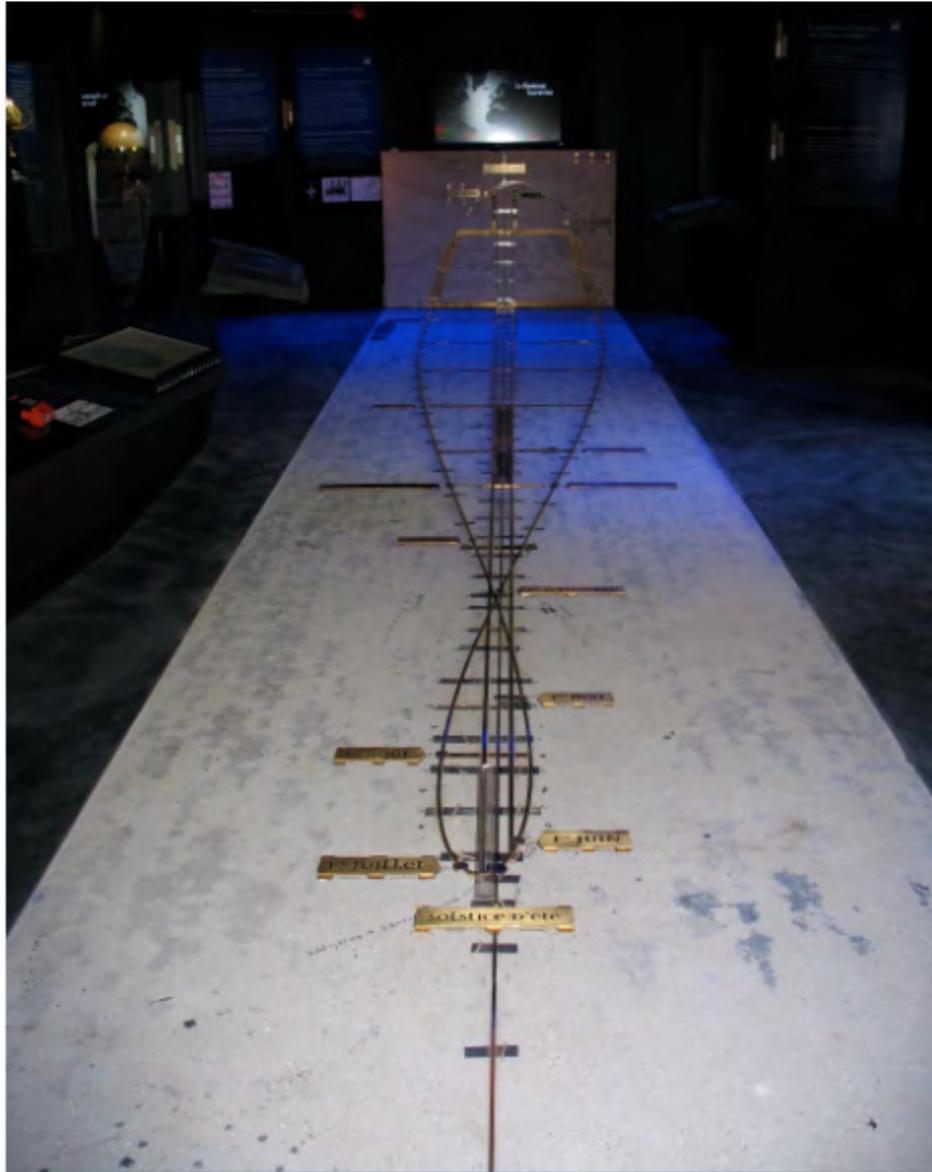


Figure 9 : Vue générale de la méridienne avant le coulage de la résine au sol. L'ensemble mesure 11 mètres (photo A. Aumont)



Figure 10 : Passage de la tache solaire sur la courbe en huit de midi TU le 7 août 2011 (photo E. Tricot)





Cadrans solaires à œillette et/ou à croix

Yves Opizzo

Yves Opizzo, gnomoniste et cadranier, membre de notre commission des cadrans solaires, nous confie son expérience dans le domaine de la réalisation de cadrans solaires à œillette et/ou à croix lumineuse.

1. Présentation

La lecture de l'heure ou d'une autre information avec un cadran solaire est bien souvent assez délicate. Il est inutile ici d'entrer dans les détails de la lecture elle-même, que tout un chacun maîtrisait il y a un siècle ou deux. Par contre, il est possible de tenir compte de la difficulté physique de la lecture. Nos yeux ont bien souvent du mal à déterminer avec précision la position d'une ombre un peu floue dans un champ de lumière faible. Lorsque le Soleil brille de tous ses feux, le problème est facile à résoudre, car l'ombre devient beaucoup plus nette et franche. Avec un peu d'habitude, il devient aisé de trouver le milieu de cette ombre, qui donnera la meilleure précision possible. Alors pourquoi se compliquer la vie et la tâche avec un œillette ou un système similaire ? Il y a une double réponse à cette question.

Tout d'abord, justement lorsque les conditions ne sont pas idéales, relever un point de lumière dans un disque d'ombre se révèle plus aisé que le contraire.

Ensuite et surtout, l'œillette se trouve par définition au point utile du cadran, le seul, dans la plupart des cas, à donner une information juste, dès lors que celle-là n'est pas le TVL.

2. Quelques définitions

Peut-être faut-il donner quelques définitions de base, pour éviter les malentendus par la suite. Cette courte liste n'est pas exhaustive, tant s'en faut.

Le TVL est le Temps Vrai Local, c'est-à-dire l'angle horaire du Soleil multiplié par 15 plus 12.

L'angle horaire est l'angle mesuré sur l'équateur entre le sud géographique et le grand cercle joignant les deux pôles et le Soleil. Cet angle est négatif le matin, nul à midi (Soleil plein sud) et positif l'après-midi. Un jour vaut vingt-quatre heures et trois cent soixante degrés, $24 \text{ h} = 360^\circ$, ce qui donne $1 \text{ h} = 15^\circ$ ou $1^\circ = 4 \text{ min}$. En multipliant l'angle horaire par 15, nous obtenons des heures. Mais des heures négatives le matin seraient bien peu pratiques, il convient donc d'ajouter 12, pour obtenir 12 h 00 à midi vrai, lorsque le Soleil est donc plein sud.

Le TVAL, (Temps Vrai d'un Autre Lieu) est un artifice, permettant de lire approximativement le temps légal avec un cadran solaire. La différence de longitude avec le méridien de référence (Greenwich pour la France) est simplement ajoutée, ce qui revient à faire tourner les droites horaires d'un certain angle.

Le style polaire est une tige parallèle à l'axe du monde. Son inclinaison dépend donc de la latitude du lieu. Elle serait de 90° aux deux pôles, et de 0° à l'équateur, où il serait donc

horizontal. Ce style a l'avantage sur tout autre de donner le TVL (et le TVAL) sur toute sa longueur. Cela provient du fait que toutes les droites horaires divergent depuis le centre du cadran, qui est justement le point d'où émerge du mur le style polaire. Cela n'est vrai que dans le cas général, où le mur est plus ou moins tourné en direction du sud géographique. Pour un cadran dit polaire, les droites horaires divergent depuis un point situé à l'infini, et dans ce cas le style polaire se trouve parallèle à la table du cadran. Il y a bien évidemment une infinité de variantes où le centre du cadran n'est pas rejeté à l'infini mais très éloigné, inaccessible. Dans tous ces cas, le style a besoin d'au moins un support, qui projette donc une ombre parasite sur la table du cadran. Le point utile peut alors devenir essentiel pour obtenir une lecture correcte.

Le point utile du style est le point dont l'ombre peut donner de nombreuses autres informations, une bonne dizaine au minimum, comme la déclinaison solaire ou lunaire. Ce point est souvent matérialisé par une boule sur le style polaire, ou par le support du style, soudé au bon endroit, ou bien entendu par un œilleton.

Il y a aussi le style droit, c'est-à-dire perpendiculaire au mur. Le pied du style droit n'est jamais rejeté à l'infini, ce qui simplifie beaucoup les calculs divers dans les cas difficiles. Notons que l'ombre entière du style droit peut dans certains cas donner une information intéressante : l'azimut du Soleil ou de la Lune. En fait, cette ombre donne toujours la valeur de l'azimut pour le cadran dit horizontal équivalent (CHE).

3. Principe de l'œilleton

Essayons maintenant de voir plus clair dans tout cela. Il devrait être évident qu'un œilleton ne saurait avoir de l'intérêt si le cadran solaire n'est censé indiquer que le TVL, sauf lorsque le Soleil brille peu, comme déjà mentionné.

a. Explications théoriques

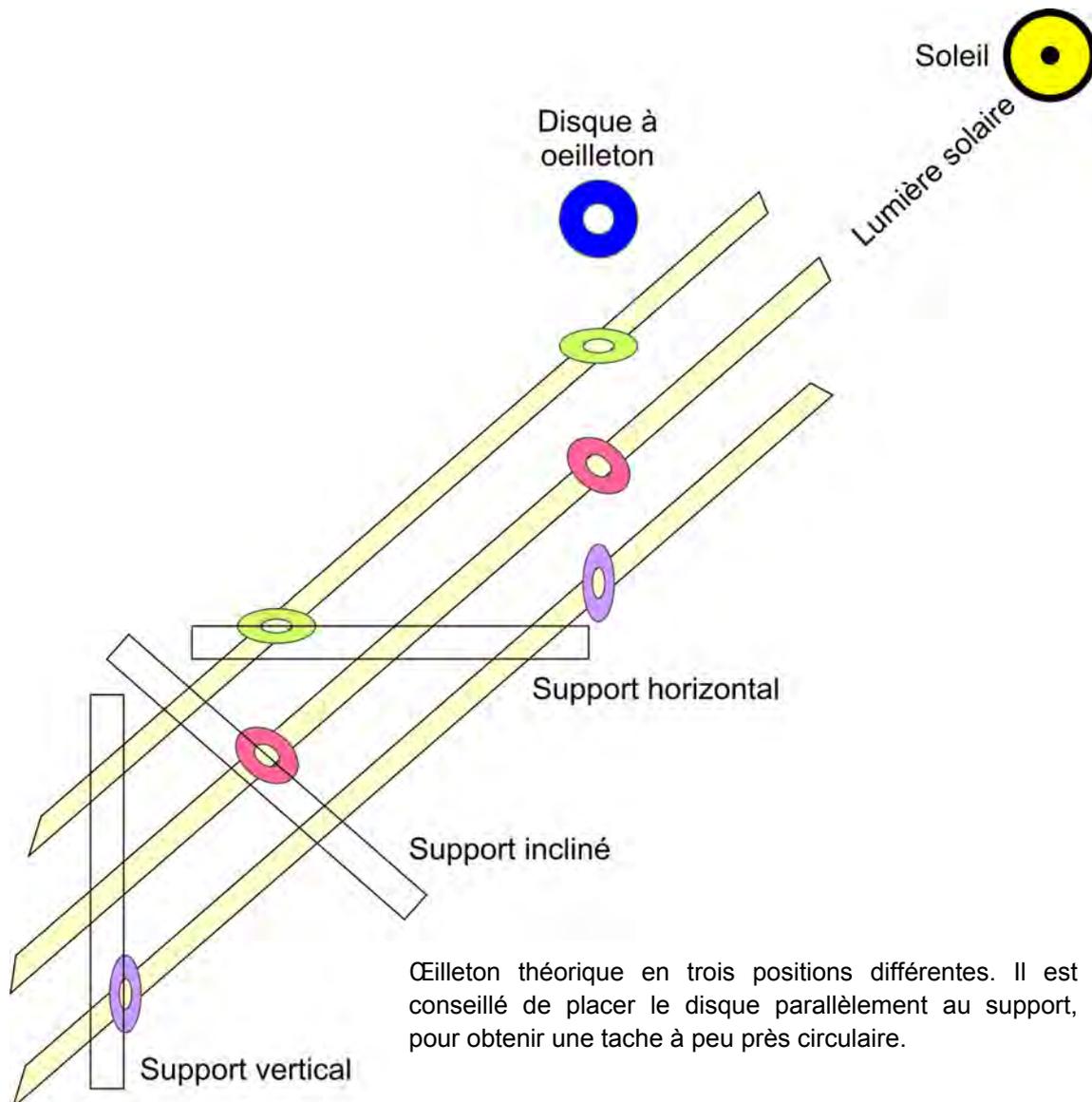
Mais qu'est-ce qu'un œilleton ? C'est un disque, ou une pièce quelconque, de métal la plupart du temps, percé d'un trou. L'idée de base est assez simple. Comme il est plus facile à l'œil humain d'appréhender un point de lumière dans une ombre que le contraire, le disque projette cette ombre et le trou laisse passer la lumière. En théorie, cela donne donc sur la table du cadran une tache lumineuse facile à voir dans une partie ombrée. Il faut malheureusement parler de partie ombrée et pas de cercle d'ombre, à cause d'une loi physique fort simple à expliquer : la projection lumineuse d'un objet se fait toujours parallèlement à la lumière.

En conséquence, l'ombre d'une boule est toujours (ou presque) une ellipse et quasiment jamais un cercle. De la même façon, l'ombre d'un disque dans le plan du style polaire donnera une ellipse, tout comme le trou de l'œilleton. La tache de lumière sur la table du cadran n'est donc pas un cercle et trouver son centre n'est pas très aisé, à cause de la pénombre.

Il y a fort heureusement la possibilité de placer ce disque percé parallèlement au mur. Dans ce cas, l'ombre deviendra presque toujours circulaire, tout comme la tache lumineuse. Mais pourquoi seulement presque toujours ? Parce que des phénomènes lumineux gênants pour nous se manifestent, qui sont bien connus avec la *camera obscura*. Il s'ensuit que la forme du trou dans le disque n'aura pas d'importance dès que la distance entre le disque et le support du cadran sera suffisamment grande. Il est donc essentiel de donner au trou en question un diamètre suffisant pour ne pas obtenir une tache allongée sur le mur.

L'empirisme fonctionne bien, et des essais ne peuvent pas faire de mal. De façon grossière, il est possible de prendre environ un centimètre de diamètre pour un mètre de distance.

Si par exemple le cadran au sol s'étale sur une dizaine de mètres, soit environ cinq mètres de part et d'autre du style, le trou devrait mesurer à peu près cinq centimètres pour éviter le désagrément mentionné. Mais le phénomène se produira, quoi qu'il en soit, dès que la lumière du Soleil sera rasante au niveau du disque. L'idée de munir l'œilleton d'un système de diaphragme est excellente et fonctionne fort bien, comme l'a montré Jean-Michel Ansel.



Normalement, lorsqu'un gnomoniste crée un cadran muni d'un œilleton, la précision espérée est grande, de l'ordre de la minute ou moins. Nous verrons un peu plus loin qu'une amélioration de l'œilleton permet d'atteindre la seconde, dans des cas spéciaux toutefois. Pour créer un cadran solaire de grande précision et de grande taille – ce qui n'est pas forcément équivalent – la méthode la plus sûre est celle du théodolite, largement expliquée dans le livre « Le Rêve d'une ombre ».

Dans le cas où l'œilleton se réfère à une heure éloignée de midi vrai, ou si tout le cadran est servi par un seul œilleton, ce qui est fréquent, il faut calculer h autrement, par la formule suivante :

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$

avec H = angle horaire vrai de l'astre, donc tenir compte le cas échéant de l'heure d'été, de la longitude du lieu et de l'équation du temps pour calculer H. Attention : le . est le signe de multiplication.

L'exemple de Ténériffe montré plus loin semble être idéal dans ce cas, puisque le sol est complètement irrégulier, bouleversé même. Il est donc difficile de donner une hauteur constante à l'œilleton, mais seulement une moyenne, donnée ici à cent cinquante centimètres.

$\varphi \approx 28,5^\circ$; si $H = -30^\circ$ (TVL = 10:00:00), nous avons aux équinoxes ($\delta = 0^\circ$) :

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin 0^\circ + \cos 28,5^\circ \cdot \cos 0^\circ \cdot \cos -30^\circ \\ &= 0 + 0,878817 \cdot 1 \cdot 0,866025 = 0,761078 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } h &= \arcsin 0,761078 \\ &= 49,56^\circ \end{aligned}$$

La distance théorique de l'œilleton au sol est alors de :

$$HT = OT / \sin h = 150 / 0,761078 \approx 197 \text{ centimètres.}$$

Mais comme le sol n'est pas horizontal, cette distance est nettement plus courte dans le cas réel de Ténériffe. Si le point de lumière tombait dans un trou, la distance pourrait être plus importante. Cela impose de procéder à quelques essais, pour tenter d'optimiser la taille de l'œilleton.

Il faudrait procéder aux mêmes calculs pour les deux solstices ($\delta = \pm 23,44^\circ$) et pour quelques autres angles horaires le matin, en n'oubliant pas que les hauteurs de l'après-midi seront symétriques, à la variation journalière de la déclinaison près.

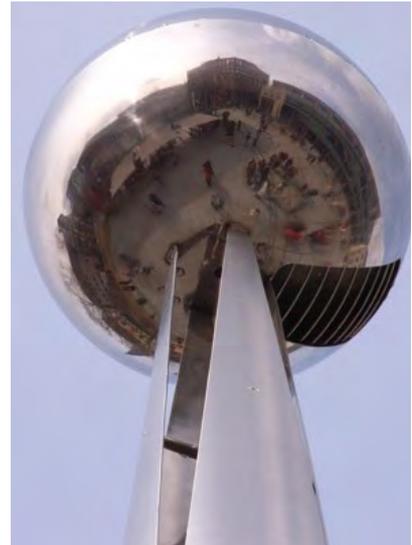
b. Exemples fixes

Dès que le support du cadran, comme par exemple à Aschaffenburg ou bien plus encore à Ténériffe, n'est pas parfaitement plan, il n'y a pas de meilleure méthode que celle de projeter un rayon laser avec un théodolite, justement à partir du point utile. Et dans ce cas, un œilleton ne peut que faciliter la lecture, puisque le sol lui-même devient chaotique.

- Aschaffenburg, en Bavière

Le cadran d'Aschaffenburg est le plus grand créé par l'auteur en 2012.

Il mesure un peu plus de quarante mètres de large, pour un style haut de six mètres cinquante. La place sur laquelle se déroulent les diverses lignes horaires ou de déclinaison n'est pas du tout plane, mais suffisamment irrégulière pour rendre un cadran aussi grand très imprécis avec toute méthode autre que celle mentionnée ici.



Style du cadran d'Aschaffenburg, par Christian Tobin et l'auteur. L'œilleton est bien visible, bien que caché dans la boule en inox. L'ombre et la lumière sont ainsi très fonctionnels. Diverses informations sont gravées dans le bas du style.

Détails du style avec une grille laissant passer la lumière solaire aux alentours (+ ou – deux à trois heures) de 12 h 00 UT.



L'immense courbe en huit en acier inoxydable est entièrement insérée dans le sol, comme les lignes horaires en granite et les courbes de déclinaison.

Cela donne un résultat splendide, réellement exceptionnel.

La qualité de l'œilleton est ici quasi parfaite. Il a fallu plusieurs essais « en vraie grandeur », donc sur place, pour optimiser le système de trou et de grille.



La ville d'Aschaffenburg, « la Nice de Bavière », près de Francfort, mérite le détour, et pas seulement pour ce cadran solaire colossal, vu ici depuis la mairie.

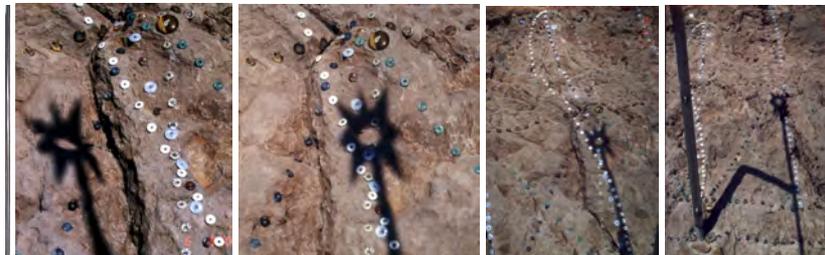
Le style renferme un complexe système électronique et informatique pour projeter de nuit un rai de lumière au sol, mais ce n'est pas ici le thème.

Il a par contre un œilleton, mais très spécial, puisque la lumière du Soleil ne peut le traverser que pour deux ou trois heures environ, autour de la grande méridienne de Temps Universel (courbe de Fouchy). Nous reparlerons de cette idée intéressante un peu plus loin, dans une variante toutefois beaucoup plus complexe. Le reste du temps et de jour, c'est l'ombre de la boule dans laquelle se cache l'œilleton qui donne l'information.

Grâce à cet œilleton et à la qualité générale du travail, ce cadran atteint une précision stupéfiante pour une telle taille, avec environ dix secondes. Normalement, l'ombre et la lumière se perdent dans un flou plus ou moins étendu, rendant la lecture très difficile lorsque le style dépasse une hauteur d'environ trois mètres.

- Mariposa à Ténériffe (Tunez, Arona)

Il sera toujours préférable de rendre le disque percé aussi parallèle que possible au support. Le cadran de Mariposa (Ténériffe) est un exemple parfait pour cela, puisque le sol volcanique n'est que trous et bosses. Le trou percé doit être dans ce cas un peu plus gros que la semi-règle donnée précédemment, car la tache de lumière est parfois difficile à voir dans les roches tourmentées.



Le style à cailleton de ce cadran très compliqué est absolument nécessaire pour obtenir une lecture correcte. Bien noter à quel point l'ombre se déforme sur la roche naturelle, totalement irrégulière.

Mais le résultat vaut la peine, comme il est possible de le constater sur ces documents. Ce cadran solaire est sans aucun doute le plus complexe construit par l'auteur, avec environ 2700 pierres semi-précieuses collées directement sur le rocher, pour donner les diverses indications voulues (TVL, midi moyen, babyloniennes, italiennes, levers et couchers extrêmes du Soleil et de la Lune, déclinaisons maximales de la Lune et, en hommage aux Guanches, les heures temporaires, qui étaient – peut-être – d'usage à leur époque, avant l'arrivée des conquérants espagnols). La précision obtenue est excellente, avec tout au plus trente secondes d'écart avec une montre.



Les îles Canaries sont un lieu privilégié pour le climat, mais aussi pour la spiritualité qui se dégage de tous les tagorors et autres montagnes sacrées des Guanches. Le cadran de Mariposa doit y contribuer un peu. Son style est si bien placé parallèlement à l'axe du monde, que, de nuit, il est facile de voir la Polaire quelque part au bord du cercle interne, selon la date et l'heure.



De nuit, la Polaire serait visible dans le tube, et sa lumière se reflétant sur la paroi interne donnerait l'impression d'être nettement plus intense. C'est un spectacle fascinant. Le cadran représente un gigantesque papillon (*mariposa* en espagnol), caché dans les roches, donc difficile à voir d'un simple coup d'œil. Il est aussi une véritable démonstration de perspective avec toutes ces pierres collées formant des lignes parfaites, mais uniquement vues depuis l'œilleton.

- Furtwangen en Forêt Noire

Le cadran de Furtwangen est une œuvre à part, car il est placé devant le Musée Allemand de l'Horlogerie. En conséquence, il était nécessaire d'obtenir la meilleure précision concevable, avec donc un œilleton placé sur un style vertical assez court. La place sur laquelle se dessine le cadran est vaste, mais à cause des bâtiments situés tout autour, n'était vraiment disponibles qu'un espace de 12 mètres sur 10 mètres environ. Le style est donc assez petit, ce qui, comme déjà vu, n'est pas un handicap pour la précision, tout au contraire bien souvent. Il est possible que ce cadran ait établi un record du monde, avec une divergence de tout au plus trois secondes avec le temps de la montre. La devise, cachée près du style, plaît à beaucoup de monde, l'auteur inclus :

SCIENTIA, CONSCIENTIA, ARS.



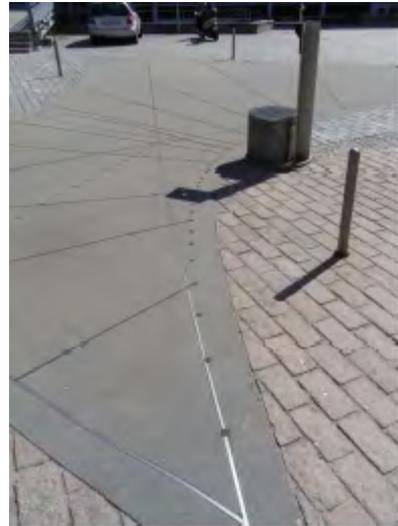
Le cadran de Furtwangen avec son style d'environ un mètre de haut. L'œilleton mesure à peu près quatre centimètres, en accord avec la taille assez modeste du cadran.

Détail de l'ombre avec la tache de lumière précise, près de la courbe de Fouchy. Il sera bientôt 11 h 00 UT, à quelques secondes près, cinq tout au plus.





Détail de l'œilleton



Superbe courbe en huit en inox,
intégrée dans le sol en bitume

- Deutsches Museum München DMM

Au sixième étage de ce musée extraordinaire, en plein air, Christian Tobin et l'auteur ont organisé une exposition permanente de plus de vingt cadrans solaires fonctionnels, en 1997-1998, juste avant de créer celui de Furtwangen, vu précédemment. Non sans humour, le directeur du musée de Furtwangen avait poussé la barre encore plus haut qu'à Munich, où la précision de la méridienne construite là est de l'ordre de cinq à dix secondes. Il nous fallait faire encore mieux, et la gageure a été relevée avec succès.

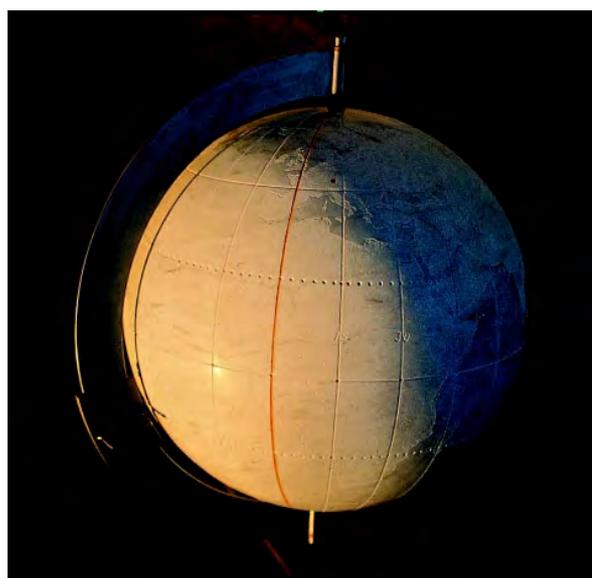
Mais le cadran au sol de Munich reste lui aussi exceptionnel de précision, et son esthétique est irréprochable. Deux colonnes de section carrée, d'environ quinze centimètres chacune et de deux mètres de hauteur, en aluminium, sont placées très précisément dans le méridien local. Elles sont écartées d'environ un millimètre, ce qui fait que la lumière solaire passe au travers pendant un temps assez court, de l'ordre de quinze minutes environ. Cela donne une méridienne TVL très précise, qui n'a pas besoin d'œilleton. Par contre, une courbe de Fouchy est tracée au sol, et seul un œilleton peut ici donner une précision convenable. Au sommet de cette stèle se trouve donc un support d'acier, percé d'un trou de trois ou quatre centimètres. Le résultat est réelle-

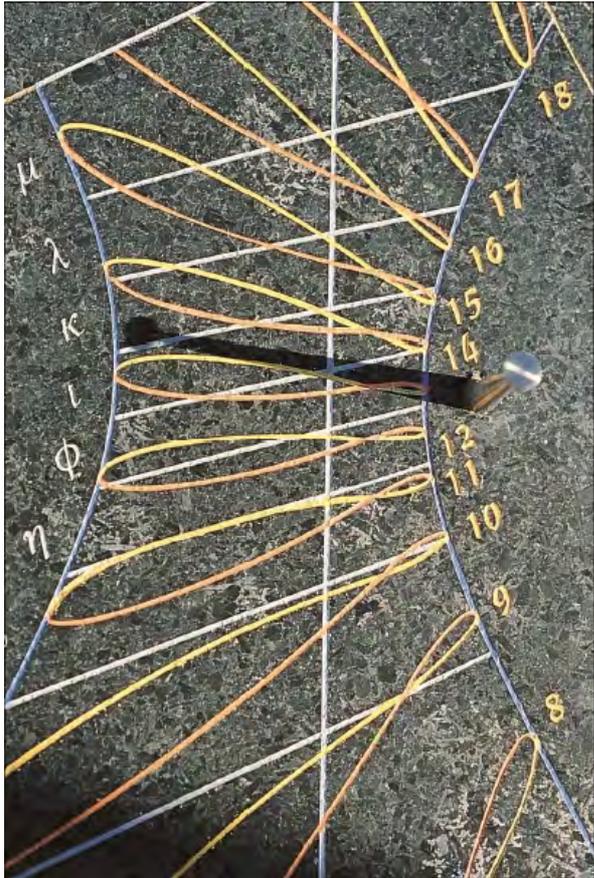


ment superbe et fonctionnel, puisque l'imprécision est vraiment de l'ordre de cinq à dix secondes, tout au plus.

Page précédente en bas à droite : la stèle du Deutsches Museum München (DMM) avec son œilleton au sommet.

Ci-contre, globe à croix optique, dont nous reparlerons par la suite, avec les améliorations possibles.

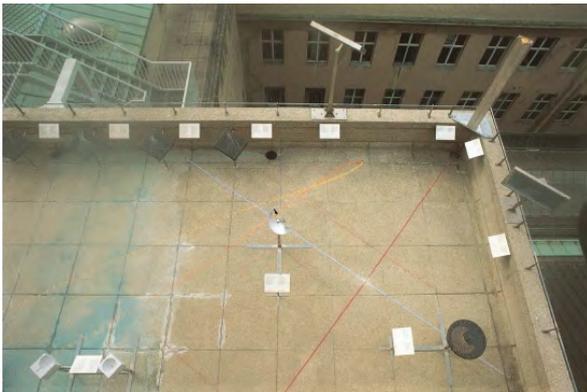




Le petit style, de 5 cm tout au plus, est muni d'un disque parallèle à la table. Cela procure une ombre presque toujours circulaire, quasi aussi sûre que la lumière d'un œillette.

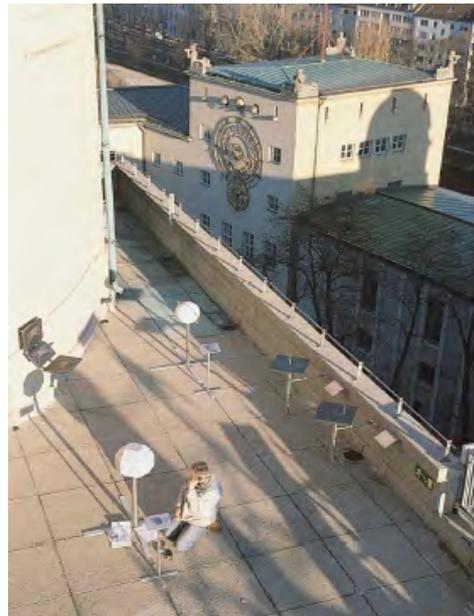


Ce principe est appliqué sur ce multiface franchement phénoménal, spécialement calculé pour le DMM, avec 25 cadrans différents et 25 styles à disque parallèle à la table.



L'exposition permanente au DMM présente plus de vingt cadrans originaux, tous parfaitement fonctionnels. La méridienne TVL est ici en rouge et celle UT en jaune et orange.

L'autre côté de la terrasse ►



- L'obélisque de Haigerloch

Cette œuvre mérite une place à part, pour plusieurs raisons :

Tout d'abord, elle a remporté le premier prix du concours « Le Ombre del tempo » en 2005, comme l'apolyciel – dont nous allons un peu parler – en 2009. Les cadrans solaires au sol d'Aschaffenburg et de Ténériffe ont reçu le deuxième prix respectivement en 2007 et 2003.

Ensuite, elle est située à l'entrée de l'entreprise « Theben Werk », dont le nom prédestiné, donné par le fondateur de l'entreprise – amateur de l'Égypte ancienne – au siècle dernier, a incité à la création d'un obélisque.

Enfin, elle possède quatre cadrans solaires, un sur chaque face de l'obélisque, en verre bleu de sûreté de un centimètre d'épaisseur, qui sont munis tous les quatre d'un œilleton. En effet, l'œilleton n'est pas réservé à des cadrans plein sud ou à des méridiennes. Les quatre faces sont parfaitement alignées sur les quatre directions cardinales, avec une pente d'environ 85° comme il se doit.



L'obélisque de Haigerloch, en verre de sécurité bleu de un centimètre d'épaisseur, est devenu un symbole important pour la « petite ville sur la falaise aux lilas », avec ses six mètres cinquante de hauteur et ses trois tonnes. L'œilleton de la face Sud possède le même diamètre que les autres, cinq millimètres. Il aurait fallu percer un trou de huit à dix millimètres pour éviter le phénomène de pénombre mentionné lorsque le Soleil atteint sa déclinaison maximale en juin-juillet.

Dans ce cas, tout doit être calculé auparavant, et toute erreur est fatale, il faut recommencer. Le verre est gravé au sable, ce qui permet d'obtenir une qualité irréprochable, tout en gardant un très léger « bougé » agréable. Une fraise ne donne pas le même effet, car le résultat est idéalisé et froid, comme un plan d'ordinateur peut l'être. Notons que les cadrans sont un peu difficiles à voir, volontairement. Mais que Soleil brille, et ils manifestent leur présence. L'obélisque est éclairé en bleu (la couleur de l'entreprise) de l'intérieur la nuit, ce qui donne une stèle déjà imposante, d'une grande élégance.



Les quatre faces possèdent chacune un cadran solaire montrant le TVL, trois courbes de déclinaison et les heures temporaires, en hommage aux Egyptiens. Les quatre styles sont à œilleton

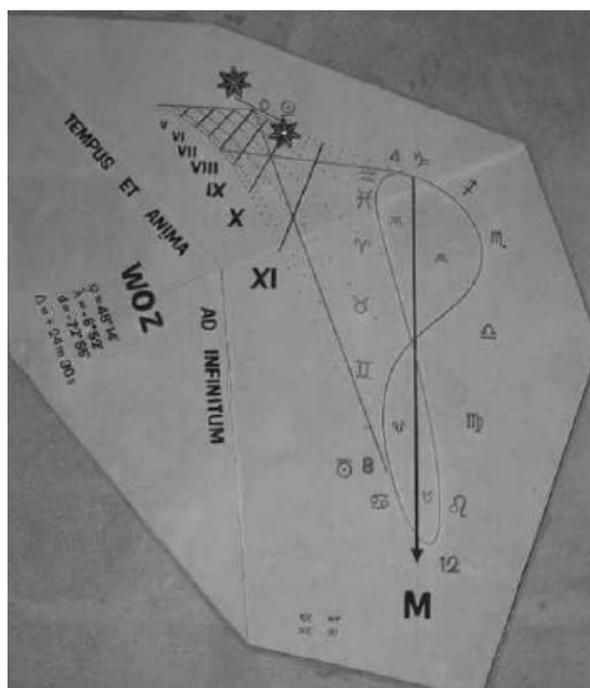
- Cadran à l'école Waldorf de Frommern

Ce cadran de neuf mètres carrés environ est peint à « l'ancienne modernisée », c'est-à-dire « a fresco » moderne, avec des produits chimiques peut-être moins sûrs que les coloris naturels utilisés depuis l'antiquité, sur le mur Est de l'école Waldorf. C'est l'œuvre de Raphaël Kohler, sur des plans de l'auteur, aidés de plusieurs personnes dont le père de Raphaël, Henri Krysiak, pour le travail de fin d'études.

Le style droit en laiton est muni d'une étoile complexe, percée de nombreux trous de tailles diverses pour l'esthétique et d'un gros pour l'œilleton lui-même. Il est intéressant de noter que les plus petits trous percés ne sont visibles absolument que sur la plaque de laiton, et pas sur le mur, car l'effet de pénombre supprime tout contraste dans le peu de lumière passant par ces petits trous.

Cela démontre bien qu'il est important de faire auparavant des essais, pour être certain de l'efficacité du système. Il a fallu réaliser le plan à l'échelle 1/1 sur des feuilles de calque et placer le tout sur le mur, en haut d'un échafaudage fort heureusement approprié. En hiver en Allemagne, ce n'est pas vraiment des plus simples.

Le cadran « a fresco » moderne, c'est-à-dire peint avec des produits modernes sur un enduit encore frais. Les pigments entrent dans l'enduit, ce qui garantit une bonne tenue au temps et aux intempéries. De plus, les couleurs sont vives et plus stables qu'avec d'autres techniques. Qu'en sera-t-il dans quelques dizaines d'années ?



- Cadran en trois parties à Hechingen

Cette œuvre a été créée par l'auteur avec Joachim Schiemann en 2009. Les propriétaires de la maison voulaient continuer l'idée des occupants précédents, à savoir créer une ambiance japonaise pour ne pas dire Zen. Un ensemble a donc été développé sur cette idée : quatre bambous (en acier inox V4, à cause d'une piscine adjacente !) supportent trois plaques de polycarbonate gris, comportant chacune un cadran solaire gravé au sable.

Le résultat est magnifique, avec une touche à la fois exotique et discrète. En effet, vue du ciel, ce qui n'est pas si simple, l'œuvre a la forme Aï de Aïkido, que l'auteur – 4^e Dan – pratique et enseigne depuis bien longtemps avec assiduité. Aï signifie harmonie en japonais. L'Aïkido est la voie du Ki (de la perception) dans l'harmonie. Voici ce symbole :



Les trois plaques cadrans solaires sont respectivement tournées vers le sud-est, sud et sud-ouest en allant de la gauche vers la droite.

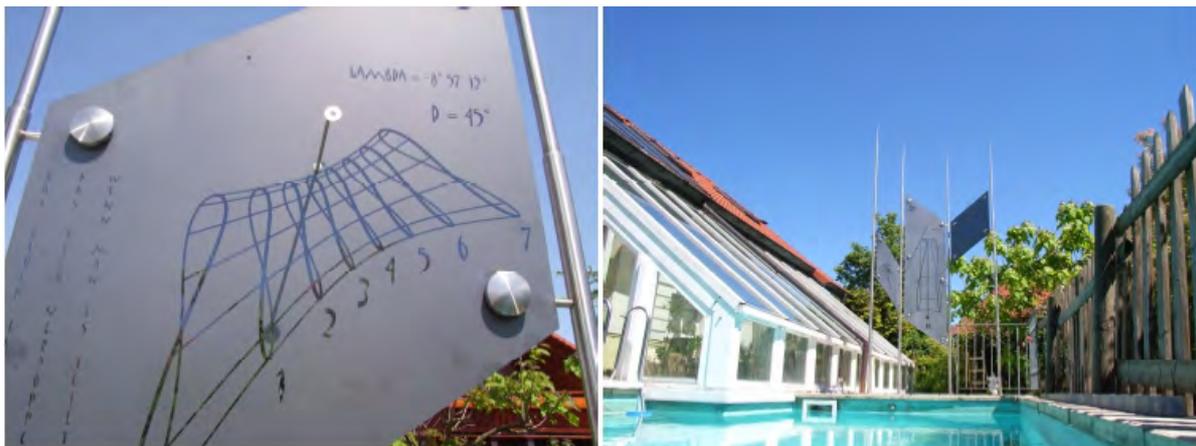
La face du matin est donc à gauche et, pour ne pas être gênée par les autres, se trouve placée plus bas. Cela donne un effet somptueux, en trois dimensions, avec une forme trapézoïdale ou plutôt de parallélogramme pour les tables, ce qui accentue encore l'effet d'harmonie et de mouvement.

Les deux petites faces sont munies de courbes en huit pour les heures les concernant, tandis que la plus grande reçoit une triple méridienne, celles de midi vrai et de midi légal d'hi-

ver et d'été. La précision est excellente, de l'ordre de la minute, grâce aux trois œilletons bien parallèles aux faces considérées.



Les trois cadrans en polycarbonate gris, accrochés à leurs « bambous » en inox. L'angle entre les quatre bambous donne la forme de base du symbole Ai. Au sol, une plaque d'inox rectangulaire achève ce symbole, tout en permettant une bonne tenue des bambous. Le résultat est superbe.

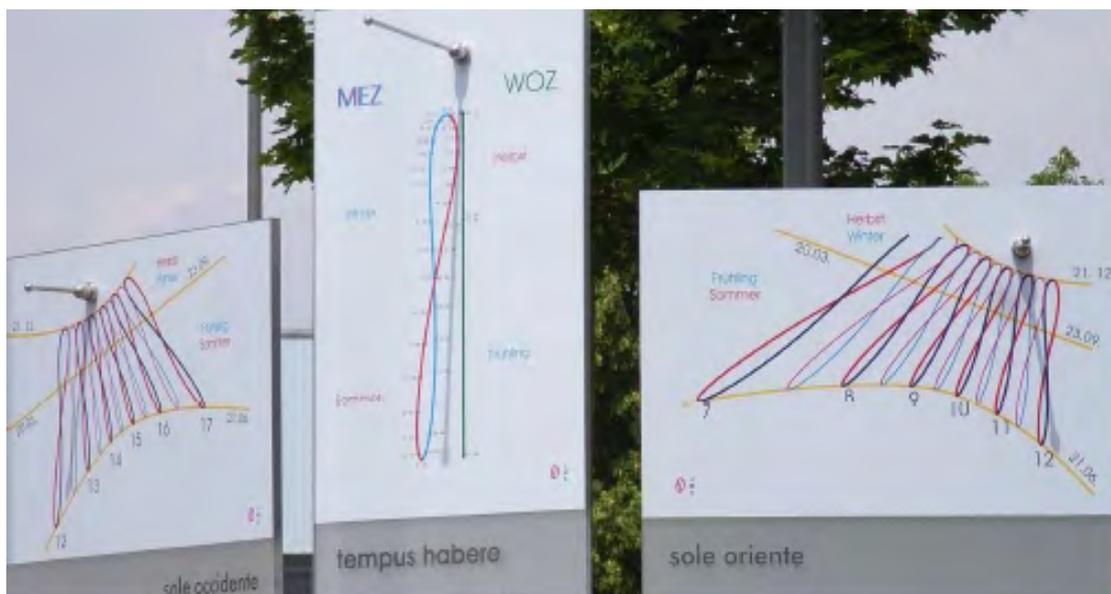


Chaque plaque possède une devise personnelle, en allemand, mais écrite de haut en bas, avec des caractères plus ou moins japonais. Remarquer les œilletons, parallèles aux plaques, et surtout l'ombre parfaitement circulaire, avec un point de lumière au centre. La piscine apporte encore de l'harmonie.

- Pliezhausen

Seulement pour montrer combien un œilleton peut être utile, voici un exemple similaire, avec trois cadrans indépendants, mais chacun avec un style à boule. L'ombre est évidemment toujours une ellipse, et la lecture est moins aisée.

Page suivante : Cadran triptyque à Pliezhausen. L'entreprise, qui fabrique des systèmes hydrauliques de classe, voulait impérativement un style repliable, pour éviter le vandalisme et montrer son savoir-faire. C'est une bonne idée, mais l'ombre est moins facile à utiliser. C'est très beau tout de même. Object Design, Jean-Michel Ansel et l'auteur.



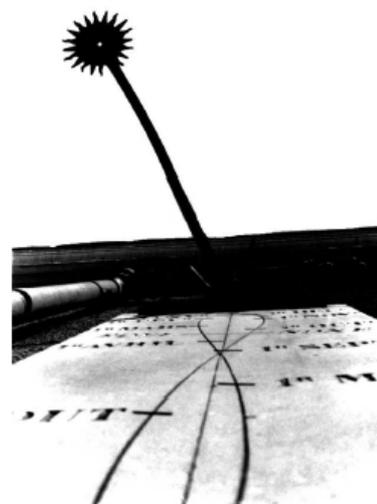
- Divers

Pour terminer cette partie, voici deux exemples du passé, l'un en Alsace, l'autre dans les Alpes-de-Haute Provence (à Serres). Le premier se trouve dans de nombreux villages. Un fabricant au XIX^e siècle fabriquait cette méridienne en série.



◀ Méridienne fabriquée en série en Alsace, au XIX^e siècle. Elle donne le TVL et le TSM, (Temps Solaire Moyen).

Cette méridienne est située sur la Mairie de Serres, dans les Alpes-de-Haute-Provence. Elle date elle aussi du XIX^e siècle et donne TVL et TSM ▶



c. Exemples portables, équinoxiaux, anneaux de paysans, instruments divers

Il serait dommage d'oublier dans ce court inventaire les cadrans portables munis d'un œilleton. Les cadrans équinoxiaux, qui existent depuis au minimum quatre cents ans et certainement plus, possèdent bel et bien un œilleton réglable selon la date ou, mieux dit, selon la déclinaison solaire.

La plupart d'entre eux ont un double défaut : le premier provient du fait que le méridien de l'instrument se trouve, par définition, dans le méridien local. Et lorsque le Soleil passe au méridien local, à midi vrai plus ou moins quinze minutes environ, instant privilégié en gnomonique, l'œilleton se trouve dans l'ombre du méridien de l'instrument.

Prototype d'un cadran équinoxial affranchi des deux problèmes mentionnés. Celui-ci est muni d'une lentille, mais un œilleton fait tout aussi bien l'affaire. Il est possible ici de régler la latitude et la longitude, ainsi que l'équation du temps et l'heure d'été. Le cadran est donc susceptible de donner l'heure de la montre, avec une précision de l'ordre de deux ou trois minutes.



C'est un inconvénient gênant, qu'il est possible de réduire un peu en jouant sur l'orientation jusqu'à trouver le point de lumière, mais c'est un inconvénient indéniable. Le deuxième défaut est moins ennuyeux, parce qu'il se produit aux équinoxes. A ces périodes, et pour quelques jours, le Soleil se trouve dans le prolongement de l'équateur. Avec l'instrument, l'œilleton se trouve à nouveau à l'ombre, et cette fois toute la journée. Il faut alors jouer en balançant l'instrument, ce qui peu aisé. Voici un nouveau modèle, prototype qui devrait être construit, dans lequel les deux défauts ont été supprimés. L'œilleton est remplacé par une lentille, mais ce n'est pas nécessaire. Le produit final aura un œilleton normal, réglable en déclinaison solaire et lunaire.

Il y a aussi tous les anneaux dits de paysans, qui étaient en fait des cadrans de moines, munis eux-aussi d'un œilleton réglable en déclinaison. Ils sont encore bien plus vieux que les cadrans équinoxiaux. Les plus anciens connus doivent dater de la fin du Moyen-Age, mais des précautions s'imposent là. Il est certain que ces cadrans sont une amélioration de cadrans de hauteur romains, qui n'avaient pas d'œilleton.

Il y a également des variantes de cadrans capucins munis d'un œilleton fixe. Mais le principe est toujours le même : la lumière du Soleil passe par un trou (œilleton) et donne l'information cherchée par le point lumineux obtenu sur le cadran (ou sur une pinnule).



Capucin à œilleton



Bracelet



Anneau de paysan

Alors, quand ce dernier est-il apparu ? Il est difficile d'être affirmatif. L'Organon de Ptolémée, détaillé par notre confrère Gérard Baillet, était muni d'un œilleton, il y a presque 2000 ans. Cela prouve que les Grecs avaient des connaissances astronomiques très poussées ; ils ont utilisé un dispositif semblable à notre œilleton, avec des scaphés par exemple.

Est-il possible d'oublier les fameux « héliostats » des gares du XIX^e siècle ? Ce sont bel et bien des cadrans solaires de grande précision munis d'un œilleton fixe, simplement réglable en inclinaison, et donnant un point lumineux sur une courbe de Fouchy précise.



Anneau équinoxial en laiton massif, à œilleton, d'après un développement de l'auteur

Et puis il y a un superbe outil mis au point par Dietrich Ahlers, qu'il convient d'appeler en français déclinomètre. Cet appareil, magnifique de surcroît, permet d'obtenir aisément la déclinaison gnomonique d'un mur. Il faut le régler à la latitude et à la longitude du lieu, puis, à une heure choisie, par exemple une minute plus tard que l'instant actuel. Il suffit alors de placer l'objet bien horizontalement et verticalement à la fois sur le mur, et de chercher le Soleil en tournant l'axe azimutal. A l'heure prévue, si le point de lumière tombe bien sur la courbe de Fouchy, l'axe azimutal indique directement la déclinaison gnomonique du mur. Ce n'est pas réellement un cadran solaire, mais un instrument très ingénieux, utilisant justement un œilleton.

Page suivante, photographie du « Deviator » de Dietrich Ahlers, appelé aussi déclinomètre.

L'œilleton, le point de lumière et la courbe en huit sont bien visibles.
Les réglages en latitude et en longitude sont à faire au calme, avant de régler l'heure au lieu de la mesure.



d. Superbe problème

La photographie ci-contre est l'œuvre de Hans Scharstein. Lors d'une éclipse partielle de Soleil en Allemagne, la lumière passant par de petits trous de forme arbitraire redonne la forme du Soleil éclipsé en partie, à cause du - ou grâce - au phénomène de Camera Obscura. Les trous sont suffisamment petits pour se comporter comme une lentille, qui projette ainsi un objet lumineux au loin. Ce phénomène parfois gênant permet aussi des photographies spectaculaires. Mais il faut s'en méfier fortement pour créer un cadran solaire de grande précision.



e. Méridiennes à oculus

L'effet « Camera Obscura »

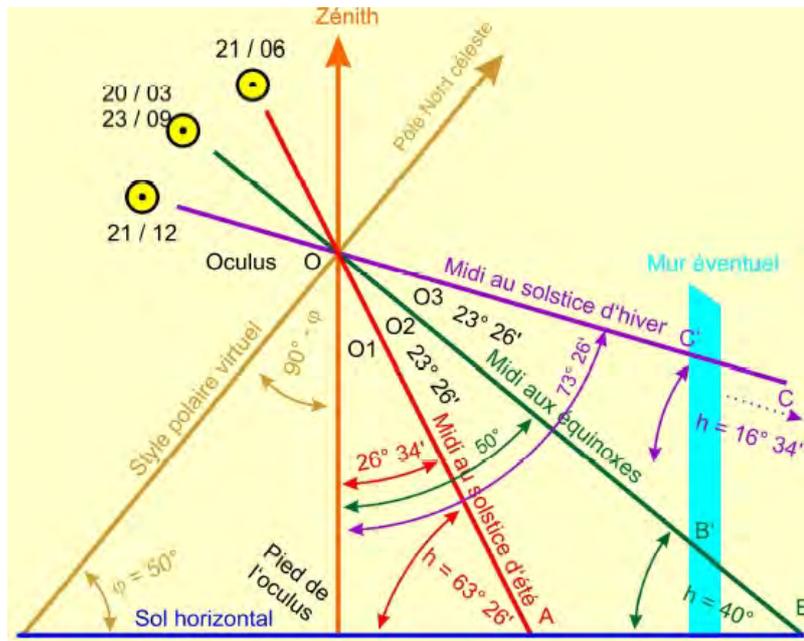
L'oculus est un trou creusé dans un mur ou dans le toit d'une église ou d'une cathédrale, voire une zone blanche dans un vitrail, laissant passer la lumière solaire, tout spécialement autour de midi vrai.

Si le trou est long, donc creusé ou spécialement construit dans un mur, alors la méridienne tracée au sol, peut-être aussi sur un mur, sera éclairée par une tache de lumière allon-

gée, et cette tache ne sera pas visible très longtemps. Le même principe a été expliqué ici-même pour le Deutsches Museum München.

Si l'angle de passage de la lumière est suffisamment étroit, la tache lumineuse ne se formera qu'un laps de temps assez court. Ce temps a toutefois une limite inférieure claire, due au diamètre apparent du Soleil, d'environ trente minutes d'arc, soit un demi-degré.

Nous avons vu tout au début de cet article que un degré est équivalent à quatre minutes de temps. Il faut donc au Soleil environ deux minutes pour se déplacer de son diamètre dans le ciel. Quel que soit l'angle donné au tube, au trou ou à tout

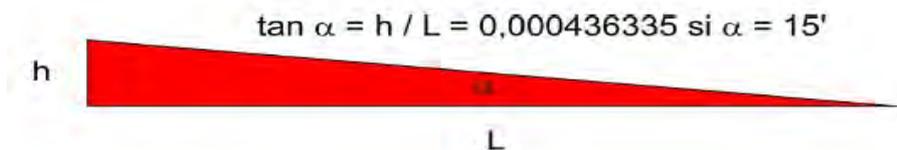


Méridienne à oculus théorique, d'après Paul Gagnaire

autre artifice, la lumière du Soleil passera par cet artifice pendant environ deux minutes, ou davantage. Il ne peut en être autrement. Les histoires racontées sur les peuples anciens qui auraient créé un système solaire s'éclairant exactement au bon instant, pendant seulement quelques secondes, sont des légendes. La précision désirée, excellente sans difficulté, est obtenue autrement, par le passage de la tache lumineuse sur un trait matérialisant par exemple le méridien, ou la courbe en huit (de Fouchy) ou une autre information. Mais il faut attendre pour cela que le phénomène soit bel et bien là. Il serait possible toutefois de créer une ligne méridienne en forme de cône et non pas une simple ligne.

Ce cône aurait exactement l'ouverture souhaitée et, dès que le disque solaire atteindrait l'ouverture, une manifestation claire se produirait au sol, à savoir de la lumière. L'idée est intéressante et sauf erreur jamais exploitée jusqu'à présent. Comme les formules ne sont pas des plus complexes, il est justifié de les donner ici.

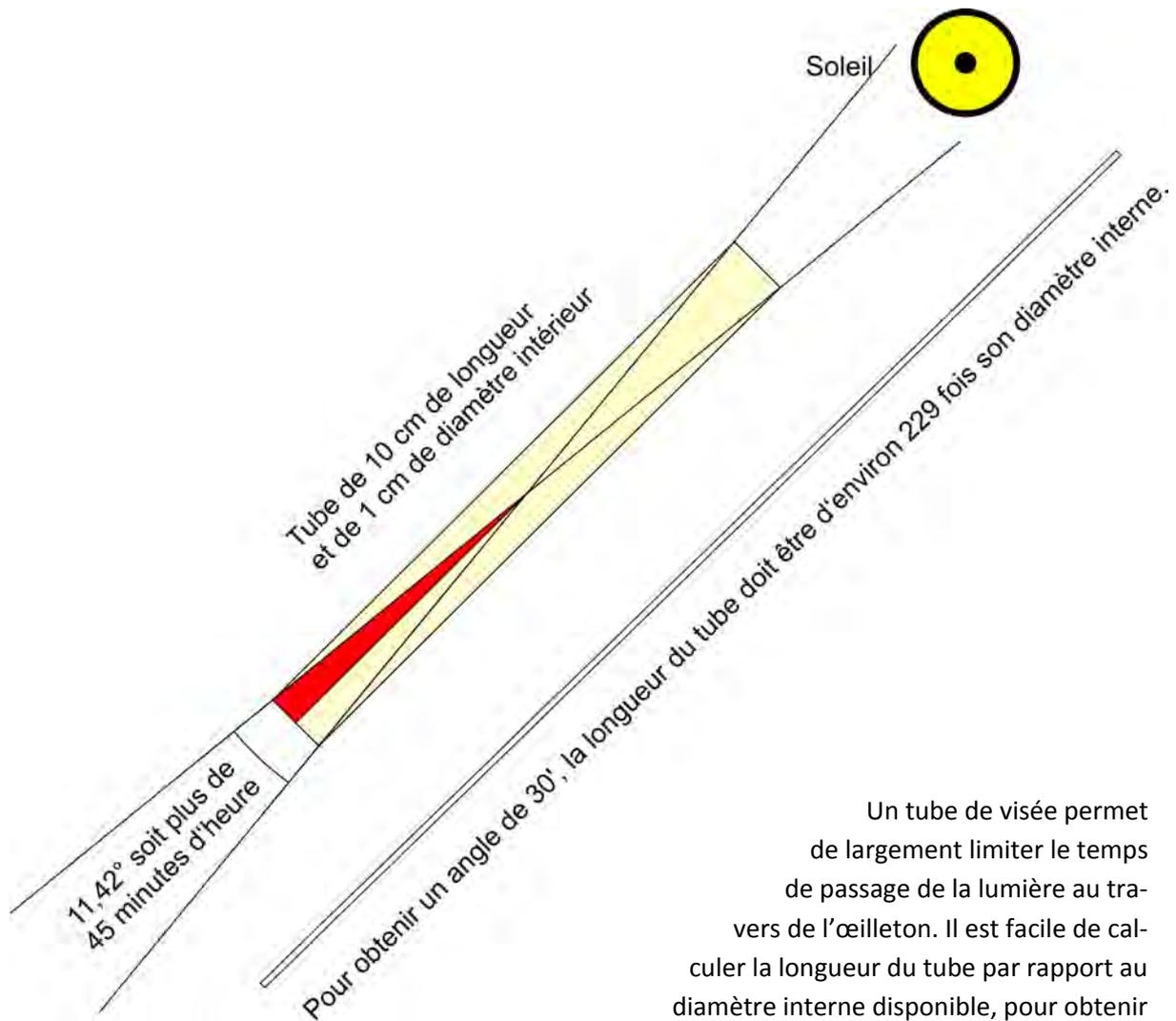
Nous savons que dans un triangle rectangle, la tangente d'un des angles aigus est égale au côté opposé divisé par le côté adjacent.



La formule, comme il est facile de le voir sur le dessin suivant, à gauche, nous donne la moitié de la longueur, pour la moitié du diamètre (15' au lieu de 30'). Le rapport est donc correct et nous donne directement la longueur nécessaire pour le tube en question : environ

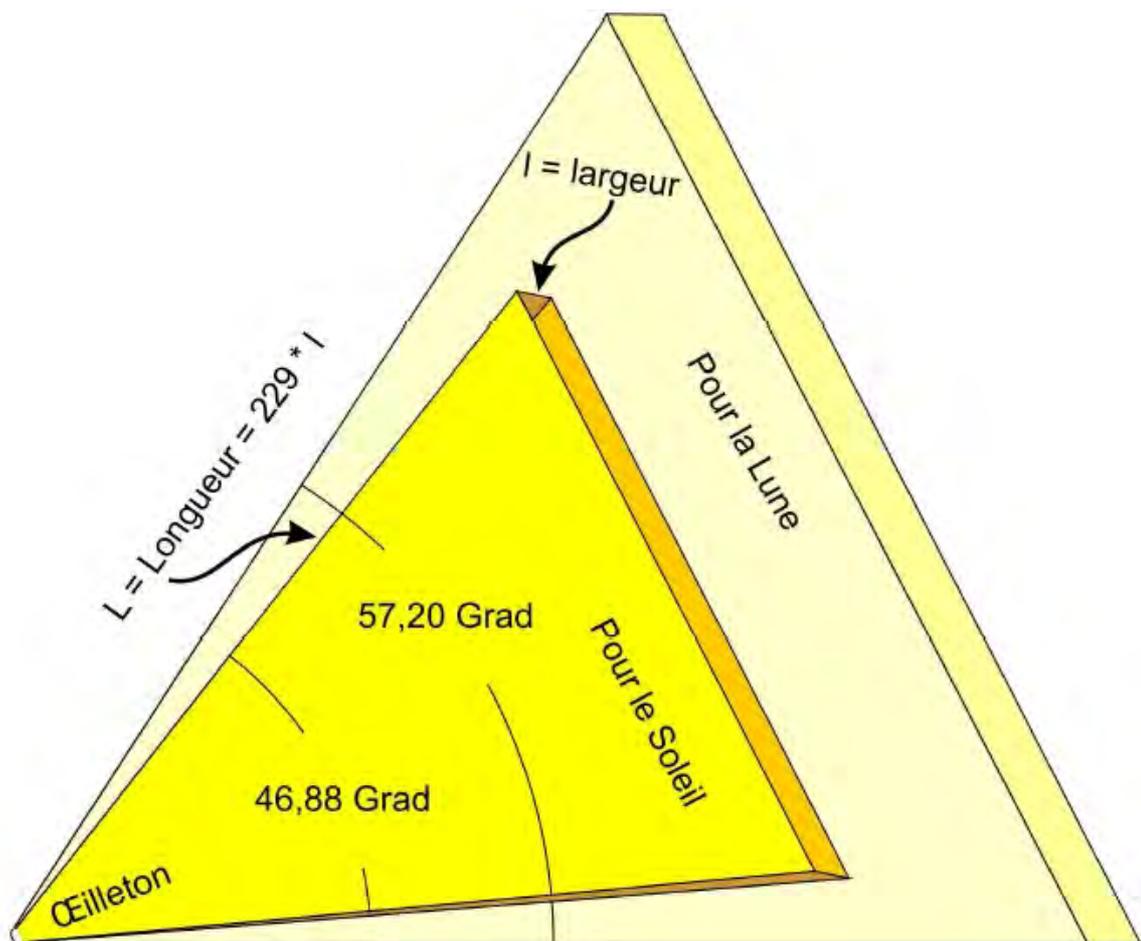
229 fois son diamètre interne, donc 229 centimètres pour un tube de 1 centimètre de diamètre interne, ou, naturellement, environ 23 centimètres pour un écart de 1 millimètre entre deux plaques.

Sur le dessin suivant, à droite, un tel tube est représenté, en proportions correctes.



Un tube de visée permet de largement limiter le temps de passage de la lumière au travers de l'oculaire. Il est facile de calculer la longueur du tube par rapport au diamètre interne disponible, pour obtenir une grande finesse dans le trajet de la lumière sur le sol ou sur le support du cadran en général.

Bien évidemment, ce tube doit pouvoir viser le Soleil ou la Lune. Il faut donc soit créer un système de bascule, pour régler la déclinaison de l'astre, soit créer un cône réceptif, comme le montre le dessin suivant. Selon que la Lune sera intégrée ou non dans le dispositif, l'angle d'ouverture du cône sera de $57,2^\circ$ ou de $46,88^\circ$, soit deux fois la valeur maximale de la déclinaison, de $28,6^\circ$ pour la Lune et de $23,44^\circ$ pour le Soleil.



Pour limiter le temps de fonctionnement de l'œillette, une sorte d'entonnoir à lumière peut être assez facilement construit. Si ce temps doit être le plus court possible, le rapport optimal entre diamètre interne et longueur est de 229 environ. Il serait même possible de donner la forme de la courbe de l'équation du temps aux deux faces, pour rendre minimum le temps d'éclairage.

Il est certain que ce système peut donner d'excellents résultats, en particulier avec l'idée rappelée plus avant et tirée du livre « Le Rêve d'une ombre ». L'œuvre obtenue sera vraiment exceptionnelle et un prototype est envisagé par l'auteur. Si seul le TVL est à tracer, le cône en question aura ses deux faces parallèles. Si le TSM ou le Temps Légal est envisagé, il faudra ouvrir ce cône, un peu comme un entonnoir à quatre faces planes, convergeant vers l'œillette.

L'ouverture sera d'environ $8,5^\circ$, correspondant à environ 33 minutes. Pourquoi 33 minutes ? L'équation du temps varie d'environ -17 minutes à environ + 16 minutes, soit une plage d'à peu près 33 minutes, soit $8,25^\circ$, qu'il est prudent d'arrondir à $8,5^\circ$. Evidemment, le travail est assez considérable, puisque il faut un tel système pour chaque courbe en huit. Mais quel objet, en fin de parcours ! Le style ressemblerait à une sculpture moderne, tout à fait in-

compréhensible au profane, mais recèlerait une masse considérable d'informations diverses. Il ne manque plus que l'entreprise intéressée...

Bien que le thème soit un peu différent, l'idée de base reste cependant la même : le style du cadran de Ténériffe, déjà en partie analysé ici-même, possède encore une particularité intéressante, qui a fasciné des dizaines de personnes, de nuit, mais oui ! Le style recèle en lui plusieurs notions astronomiques, avec l'axe Nadir-Zénith, l'axe du monde et l'équateur par un axe perpendiculaire à celui du monde. Mais le tube visant le pôle Nord céleste a été calculé à partir de la même formule, pour une raison différente. L'étoile Polaire n'est pas exactement au pôle céleste, mais, de nos jours, à une distance angulaire de 47' environ. Vue depuis la terre, elle décrit donc un petit cercle autour de ce pôle. La longueur du tube a été calculée pour que, de nuit, la Polaire apparaisse quelque part exactement au bord du tube, lorsque l'œil est placé à l'extrémité sud du tube. Cela fonctionne fort bien, et la Polaire se trouve bel et bien au bord du tube en un point qui dépend de la date et de l'heure. Mais ce qui n'avait pas été prévu est un effet de réflexion magnifique : la lumière de l'étoile, complètement isolée de toute interférence parasite, se reflète à l'intérieur du tube et apparaît ainsi nettement plus intense. L'effet est spectaculaire et bien des personnes sont restées plusieurs minutes l'œil rivé « à l'oculaire » qui n'en est pourtant pas un. Bien entendu, cela impose une très grande précision dans les calculs et dans les travaux (voir photographies plus avant).

4. Précautions à prendre

La plupart du temps, l'ocillon sera hors d'atteinte des mains sacrilèges, ce qui résout au moins en partie le problème du vandalisme. Mais il est très important que la fixation de l'ocillon soit solide, pour ne pas vibrer trop facilement. Sans cela, les avantages obtenus par la technique sont sur le champ annulés par les vibrations du style et donc les mouvements du point lumineux.

Si un système de diaphragmes est installé, il est nécessaire que l'utilisateur puisse y accéder. En conséquence, ce système devra être particulièrement robuste. Il est difficile de croire que des gorilles visitent le Deutsches Museum de Munich, mais c'est apparemment ce qui se passe parfois, puisqu'un style que seul un gorille aurait dû pouvoir tordre a bel et bien été tordu ! La lentille ou l'ocillon auto-orientable placé très haut comme à Montbéliard est vraiment une excellente idée.

Si le cadran est tracé au théodolite, il importe de bien prendre garde lors des mesures que la croisée des axes de la lunette de l'instrument corresponde exactement à l'ocillon. Il n'est pas possible de procéder à des interpolations sans créer d'approximations, car la projection de la lumière par l'ocillon ou par la lunette du théodolite est le seul moyen pour éviter les erreurs de parallaxe. Autrement dit, le moindre trou ou la plus petite bosse entraînera une erreur, sauf si tout est fait dans les règles. Alors, la lumière du Soleil suivra exactement le même chemin que le rayon laser du théodolite.

5. Limites de la technique

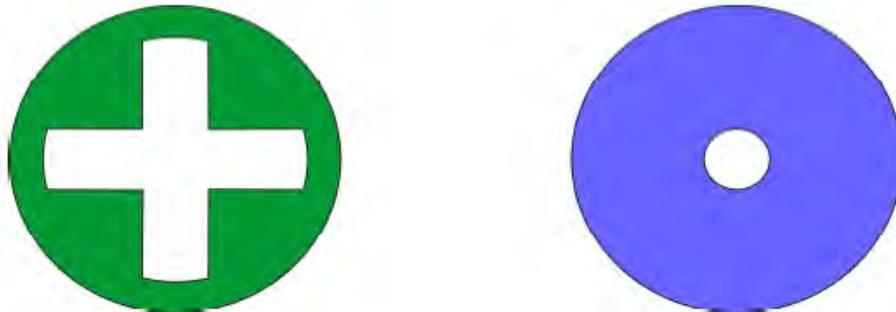
L'ocillon a donc des qualités intrinsèques indéniables. Assez facile à créer, dans le cas général, il est solide et efficace. Mais son intérêt est aussi limité par la diffraction de la lumière, ce fameux effet Camera Obscura, qui aura tendance à allonger la tache lumineuse. Lorsque la précision espérée joue un grand rôle, ce problème devient gênant. Bien entendu, il est justifié de se demander si une grande précision, de l'ordre de la seconde d'heure, est raisonnable. A l'heure des GPS et des montres électroniques automatiques, pilotées par les

grandes ondes, cela ne paraît pas très pertinent, convenons-en. Donc, rêvons un peu, et imaginons-nous dans un passé révolu, où le cadran solaire était le moyen le plus sûr de mesurer le déroulement du temps. Même sans rêver d'ailleurs, nous pouvons bien nous pencher sur la partie purement artistique du cadran solaire, objet multidimensionnel reliant science, histoire, philosophie, art, technique et davantage encore. De ce point de vue, tenter d'améliorer le système devient tout à fait acceptable. Or, il y a au moins deux directions à envisager pour cette amélioration.

6. Autres possibilités

a. Croix optique

Une croix optique équivaut à un œilleton longiligne dans deux axes perpendiculaires. Le principe est connu depuis des siècles, mais reste peu utilisé et c'est dommage. En effet, les deux traits de lumière obtenus permettent chacun de déterminer clairement une information différente. Nous avons déjà vu rapidement un globe en marbre construit par Christian Tobin et l'auteur pour le Deutsches Museum München. Ce globe possède un méridien mobile, presque banal, et aussi une croix optique. C'est un système en fait très simple, comme deux plaques proches l'une de l'autre, et cela dans deux directions perpendiculaires. La lumière solaire ou lunaire (la photographie au DMM est prise de nuit, à la lumière de la Lune) passe entre les deux plaques en question, elle se matérialise sur le globe par un trait fin, exempt de toute déformation, et ce point est très important. Il serait donc possible d'améliorer les œilletons en donnant au trou la forme suivante :



Amélioration de l'œilleton par une croix optique dans un disque.
Attention : il conviendrait là aussi de procéder à des essais, selon la distance moyenne entre l'œilleton et le sol. Les plaques sont ici largement trop espacées et produiraient un effet de pénombre important.
En fait, la croix ne devrait pas donner plus de lumière que l'œilleton banal.

Il convient de bien noter que les deux fentes de ce nouvel œilleton peuvent chacune donner une information différente, par exemple azimuth et hauteur. Ce point très important sera expliqué en détail par la suite.

Le cadran de Bisingen (devant la Volksbank), dans le Bade-Wurtemberg, utilise ce principe avec deux croix optiques. La première est installée sur un méridien mobile et la seconde sur un arc altazimutal. Il est parfaitement possible de créer un système équivalent pour trouver en plein jour l'écliptique et la longitude écliptique du Soleil. Il serait également facile de créer un « méridien écliptique mobile », fixé aux pôles de l'écliptique, pour trouver avec une croix optique la latitude écliptique de la Lune.

Comment tout cela fonctionne-t-il ? Le méridien mobile est simplement un demi-cercle fixé aux deux pôles d'une boule représentant la Terre et tournant librement autour d'elle.

A Bisingen, ce demi-cercle est constitué par deux fortes plaques en inox, séparées par un millimètre. En tournant à la main ce méridien, il est réellement aisé de trouver l'angle horaire de l'astre lorsque la lumière passe entre les deux plaques et donne un rai très fin sur le globe de granit noir. Ce rai de lumière indique donc l'angle horaire et par suite le TVL. Mais sur le méridien lui-même est installé un petit outil constitué lui aussi selon le principe de deux plaques en inox laissant passer la lumière lorsque l'objet se trouve en bonne position. Cet outil coulisse à force douce sur le méridien, et lorsqu'un rai de lumière perpendiculaire au premier se projette sur le globe, la déclinaison de l'astre se trouve mesurée finement. La croix optique ainsi obtenue est toujours nette, puisque la distance entre le méridien et le globe est constante.



L'Apolyterre de Bisingen a fière allure sur son socle. La boule de granite mesure quatre-vingts centimètres de diamètre et pèse près d'une tonne. La précision obtenue dans la lecture du TVL ou du temps légal est de l'ordre de trente secondes. En combinant les deux arcs mobiles, il est possible d'obtenir plus de cinquante informations diverses avec cet objet de grande classe.



Les deux croix optiques sont bien visibles sur ces documents. A gauche, c'est le méridien mobile qui projette deux ombres séparées par un rai de lumière, donnant l'angle horaire (le TVL), à droite l'arc altazimutal fait de même et donne l'azimut. Sur les deux arcs mobiles sont montés les petits

« équipements » permettant de trouver respectivement la déclinaison et la hauteur de l'astre. Il est évident avec l'instrument sous les yeux que les coordonnées locales (Az et h) sont tout aussi précises que les coordonnées horaires (AH et δ), mais aussi que toutes deux varient en permanence.



Les deux systèmes « trouvent le Soleil » dans le ciel de la même façon. Les deux équipements seront donc (presque) superposés, le cas échéant, comme ici à gauche. A droite se trouve représentée la plaque permettant de régler la date, d'après la valeur de l'équation du temps (ou le contraire). Le temps légal d'été est aussi disponible. Un livret explicatif est fourni sur demande par la banque.

La deuxième croix optique est montée sur un arc altazimutal dont les points d'ancrage sont le Nadir et le Zénith. Pour une question de faisabilité, seul le Zénith est utilisé à Bisingen, mais le principe est exactement le même. Cet arc doit être tourné à la main et, lorsque la lumière produit un trait fin sur le globe, l'azimut de l'astre est trouvé

Il faut alors ajuster la partie mobile sur cet arc, de la même façon, pour trouver la hauteur de l'astre. Il est évidemment possible de combiner les deux parties mobiles, méridien et arc, pour trouver nombre d'autres informations, plus de cinquante au total dans ce cas (y compris des informations générales, disponibles même sans soleil).

Mais il est possible également (ce n'est pas le cas à Bisingen, mais effectif à Brittheim, à Balingen et à Waldshut) de trouver de la même façon, l'écliptique en plein jour ce qui donne le TS, le Temps Sidéral, par l'angle horaire du point vernal. C'est déjà en soi une belle performance, parce que l'écliptique n'a qu'un seul point évident dans le ciel, le centre du Soleil (quasiment, car la latitude écliptique du Soleil varie seulement



Le premier Apolyciel, observatoire de Brittheim.

de quelques secondes d'arc). Le disque représentant l'écliptique, constitué de deux plaques en inox ou en polycarbonate comme à Brittheim, doit être tourné jusqu'à ce que la lumière passe entre les deux plaques, comme déjà vu, pour donner un trait fin sur le globe. Un outil supplé-

mentaire, toujours constitué de la même façon, doit alors être déplacé sur le disque écliptique pour trouver selon le même principe la longitude écliptique du Soleil.

Pour travailler avec la Lune, il faudrait ajouter ce fameux méridien écliptique, c'est-à-dire un demi-cercle tournant autour des pôles de l'écliptique. Ce n'est pas très facile à réaliser, mais c'est tout à fait possible. Ce méridien mobile donne alors la longitude, et le petit outil coulissant sur lui donne la latitude



Exactement le même principe que celui de Bisingen a été utilisé à Brittheim. Toutefois dans ce cas, l'instrument n'est pas en acier inoxydable, mais en polycarbonate, un matériau certes esthétique, mais aussi, hélas ! fragile. Pour cette raison, l'instrument n'est exposé au Soleil que dans les grandes occasions. Les deux croix optiques sont en plaques d'aluminium, collées sur des supports en polycarbonate.



Par contre, l'apolyciel se doit d'avoir un disque écliptique, avec un petit équipement permettant aussi de trouver la longitude écliptique en plein jour. Le « méridien mobile écliptique » n'a pas encore été développé, mais l'idée est bien là. Peut-être que la version « ultime » sera ainsi équipée.

Par Object Design, Joachim Schiemann et l'auteur.

Évidemment, le lecteur attentif aura compris que les valeurs obtenues avec l'instrument sont des valeurs locales, constatées et non pas calculées. C'est le Soleil lui-même qui donne ces informations.

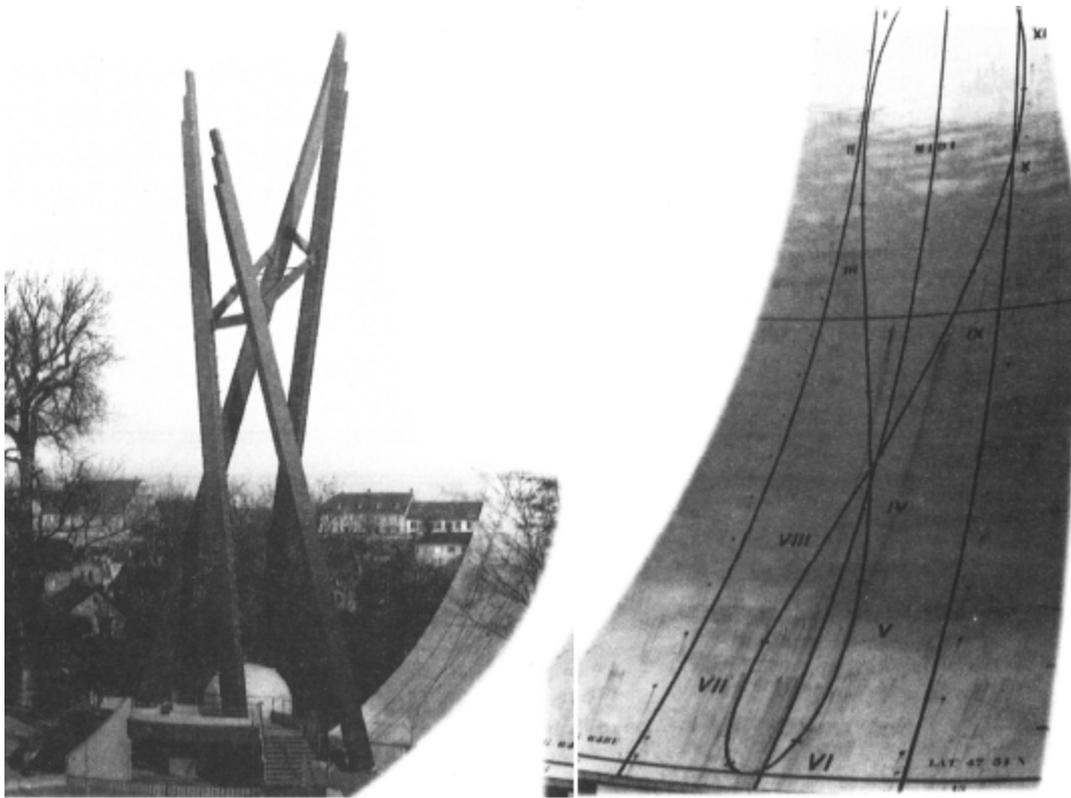
En conséquence, si dans une table nautique ces valeurs ont été auparavant et en toute fiabilité calculées pour Greenwich ou pour tout autre méridien de référence, comparer les deux valeurs (du TS, de la longitude écliptique ou de l'ascension droite, voire de la déclinaison), donc celle relevée dans les tables et celle lue sur l'instrument, donnera une bonne idée de la longitude géographique du lieu. C'est le principe de l'*apolytares* dans ses trois variantes, terre, ciel et mer, qui a déjà été expliqué dans cette revue. Il est de fait possible, au moins en théorie, de déterminer la longitude géographique du lieu sans pour autant devoir connaître l'heure d'un méridien de référence.



Le troisième Apolyciel se trouve à Waldshut, près de la frontière germano-suisse. Il est l'œuvre de Thomas Wahr et de l'auteur. Remarquer l'exceptionnelle qualité de la croix optique, entièrement fraisée dans un bloc d'aluminium. Les fentes sont épaisses d'un millimètre. Le résultat est très élégant, très sobre, et la précision, excellente, de dix secondes.

Notre petit œillette nous mène donc bien loin, puisque cette amélioration du principe lumineux de base remet en cause une certitude scientifique, ou plutôt philosophique, à savoir que la longitude géographique d'un lieu ne peut être calculée par la simple observation du Soleil (ou de la Lune). Certes l'instrument n'est pas simple, mais il est réalisable.

b. Lentille



La fabuleuse et gigantesque méridienne du docteur Becker, parc Galilée à Montbéliard.
Un tel-chef d'œuvre mérite une considération internationale.

Nous avons déjà vu que l'œillette peut être remplacé par une lentille, dans certains cas. Il est évident que la focale fixe de la lentille, au moins dans un système de base, devient rapidement un inconvénient, détruisant les avantages du point précis obtenu. Mais si le cadran solaire est spécialement conçu pour cela, le principe fonctionne alors à la perfection. Le meilleur exemple à ce sujet est sans conteste la fantastique méridienne du docteur Becker, dans le parc Galilée à Montbéliard, qui mérite une mention ici.

Certes, le style gigantesque, de près de trente mètres de hauteur, vaut déjà que tout un chacun aille voir le chef-d'œuvre, avec sa lentille auto-orientable. La tache lumineuse obtenue dans l'immense scaphé donne une précision de l'ordre de la seconde, voire mieux, record mondial, selon toute vraisemblance, pour une méridienne.

Si la lentille s'oriente d'elle-même sur le Soleil, c'est qu'un système mécanique le permet. Ce serait possible avec un œillette normal, afin d'obtenir une tache la plus ronde possible. La lentille améliore la précision, mais l'idée de base est la même, à savoir, utiliser un contraste ombre-lumière.

Or, il est possible d'aller plus loin encore, toujours avec la même idée de contraste, en utilisant de l'optique un peu plus complexe. Nous allons maintenant étudier rapidement des techniques utilisées avec les rayons laser, comme des miroirs semi-transparents.

c. Système optique complexe

Pour faire mieux encore, donc pour obtenir une précision équivalente à celle vue précédemment, mais tout au long de la journée, il faut recourir à une technologie de pointe. Il serait certainement envisageable d'utiliser sans danger un petit rayon laser, qui recevrait son énergie du Soleil (pas question, évidemment, d'utiliser l'électricité de la ville), mais cela n'a pas encore été réalisé. Par contre, comme le montrent les documents suivants, deux diodes LED rouges montrent azimuth et hauteur à Balingen, avec une croix optique de classe, et l'énergie provient ici d'une cellule photovoltaïque.



Apolyciel en inox, à Balingen. L'objet est complexe, et de haute technologie. Cela permet d'atteindre en lecture de l'heure la précision presque incroyable d'une seconde et, toute la journée.

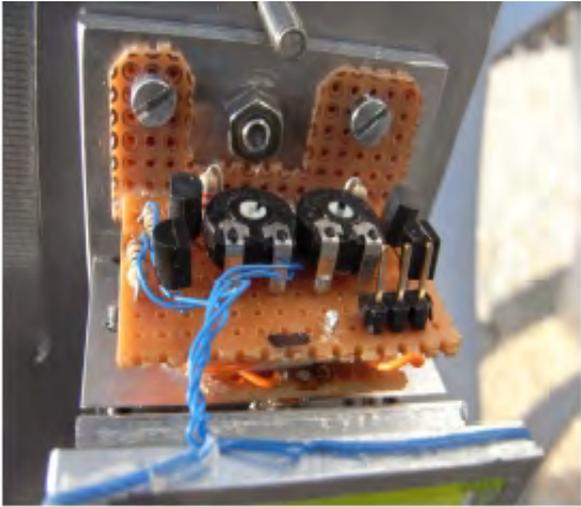
Equipement mobile monté sur le méridien, pour le réglage de la déclinaison et la lecture précise de l'heure. Remarquer le point rouge (magenta) sur l'écran écliptique, derrière la petite lentille.

La partie principale se trouve dans un système optique complexe, fondé sur une petite lentille et installé dans l'équipage mobile coulissant sur le méridien. Cette lentille donne une image du Soleil d'un peu plus de deux centimètres de diamètre sur un écran récepteur, après réflexion de la lumière sur deux miroirs à 45°.

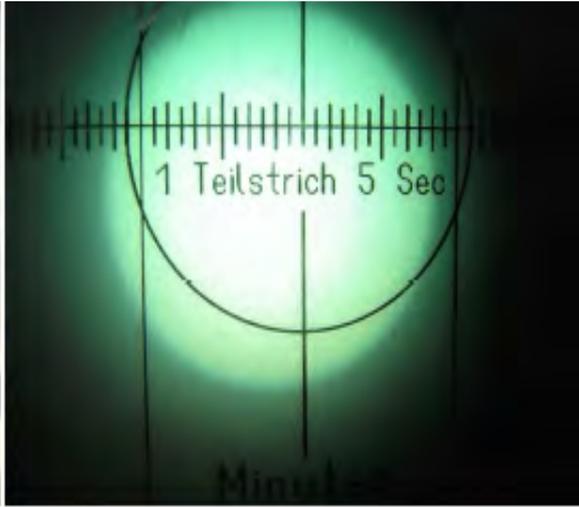
Le premier de ces miroirs semi-transparent, laisse passer le magenta et reflète les autres longueurs d'onde. En conséquence, une image du Soleil rouge se projette sur l'écran écliptique et une verte sur l'écran de déclinaison (ou d'angle horaire). Comme le Soleil se déplace dans le ciel de son diamètre en deux minutes environ, son image se déplace sur cet écran d'environ un millimètre en cinq secondes.

La limite est franchie : il est vraiment possible avec ce cadran solaire ou plutôt cet apolyciel de lire l'heure avec une précision de l'ordre de la seconde, toute la journée, à partir d'une amélioration de l'œil. Avec une lentille plus grosse, donnant une image solaire d'environ six centimètres de diamètre, il sera facile de descendre sous la seconde, à la condition que tout le reste, et c'est extrêmement difficile, soit de la même qualité. Donc tous les roulements, les axes, les arbres de transmission, toutes les gravures, toutes les pièces en inox,

les pieds et les sustentés doivent atteindre le même degré de précision. Il y a environ mille pièces diverses dans l'apolyciel de Balingen ! Ce n'est pas une œuvre de dilettante.



Détail de l'électronique interne, avec phototransistors, diodes LED et cellules photovoltaïques.



L'image du Soleil se déplace d'un millimètre en cinq secondes

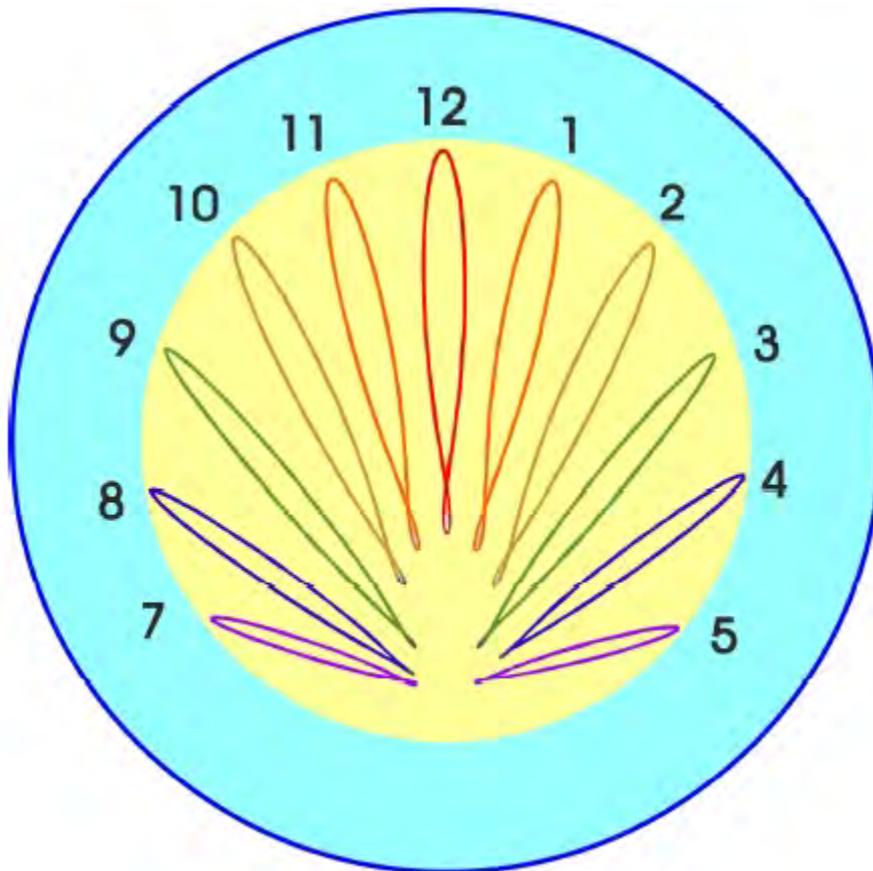


Il ne manque que cela dans votre jardin

7. Pour conclure

C'est grâce à l'œilleton que cet instrument hors normes a été développé. Mais il n'est pas nécessaire d'aller si loin pour créer une œuvre solaire de premier choix dans son jardin. L'œilleton traditionnel, placé autant que faire se peut parallèlement au support du cadran, donnera toute satisfaction dans la plupart des cas. Même pour réaliser le projet présenté ici, on pourrait se contenter d'un œilleton banal avec courbe en huit, donc onze œilletons dans ce cas, sans devoir entrer dans les arcanes présentés plus haut. Et vous pourrez donner quasiment la forme que vous voudrez à votre chef-d'œuvre solaire.

Donc, si le cœur vous en dit...



Il est possible de donner presque n'importe quelle forme à un cadran solaire, grâce à des œilletons judicieusement placés. Le travail est certes considérable, mais le résultat sera magique, évoquant par exemple une fleur posée sur un lac.

8. Bibliographie

- ° *Le Rêve d'une ombre*, Paul Gagnaire et Yves Opizzo, Burillier, 2007
- ° *Les Ombres des temps*, Yves Opizzo, Burillier, 1998
- ° *Cadrans solaires de précision*, Yves Opizzo, Masson, 1997





Œilletons et trous gnomoniques

Jean-Michel Ansel

Jean-Michel nous propose une petite recherche lexicale et une approche sur le diamètre des œilletons, suivies de deux exemples de réalisations à Ludiver et Evron.

OEILLETON

(*Astronomie*) Pièce de cuivre, de forme ronde, adaptée à l'oculaire d'un télescope.

(*Littré*) Pièce ronde percée d'un petit trou disposée à l'extrémité des oculaires de télescope.

C'est aussi l'organe de visée pour une carabine où il convient de centrer *de visu* le guidon sur l'objet ciblé.

Dans ces deux cas il y a un rapport direct à l'œil.

En allemand, c'est un *Lochblende* (diaphragme). Cela me semble juste car l'on adapte le diamètre du trou à la distance utile, comme pour le sténopé. Loch = trou ; Blende : blenden = éblouir - abblenden = atténuer la lumière - blind = aveugle.

STYLE

Le plus souvent, arête droite d'un élément quelconque (fil, tige, tôle, pierre ou autre support) disposée parallèlement à l'axe du monde dont l'ombre portée sur une surface dûment graduée/marquée permet de déterminer de manière temporelle entre autres la position apparente du Soleil.

Exemple d'interprétation : « style triangulaire » n'est autre qu'une tôle ayant cette forme, mais dont seul un des côtés présente une arête correctement disposée. L'hypoténuse, en général.

OCULUS

Œil, regard, *Oculus mundi*, le soleil œil du monde (Ovide). Oc est suffixe (Auge en allemand, et eigne puis eye et oge d'où wind-ow en anglais), c'est-à-dire œil du vent ou trou pour introduire air et lumière.

Ces déformations successives semblent avoir été voulues pour conjurer... le mauvais œil !

Quoi qu'il en soit je le préfère à l'œilleton pour le gnomon à trou où il ne convient pas de mettre l'œil. Qui l'aime le suive.

STENOPE

Un sténopé est un dispositif optique très simple permettant d'obtenir un appareil photographique dérivé de la *camera obscura*. Il s'agit d'un trou de très faible diamètre. Par extension (un trou n'est pas un objectif) on appelle ainsi l'appareil photographique utilisant un tel dispositif.

C'est le petit trou d'une *camera obscura* qui permet le passage de la lumière, il en résulte à l'intérieur de la chambre obscure l'image de l'environnement extérieur ; c'est l'équivalent de la pupille de nos yeux. La *camera obscura* est l'ancêtre de l'appareil photographique où l'optique (cristallin de nos yeux) a remplacé le petit trou. Si ce trou est le plus petit possible la lumière en sera diffractée et le résultat n'a pas a priori d'utilité

particulière pour la réalisation de cadrans solaires accessibles à tout un chacun.

A titre indicatif pour obtenir la reproduction image inversée correcte d'un objet éloigné d'une chambre noire de $f=500$ mm (distance du sténopé au plan de l'image projetée) le sténopé aura un diamètre de 0,83 mm, et pour $f= 20$ mm, 0,16 mm seulement ! (source :

<http://s192257538.onlinehome.fr/stenocamera/Materiel%20disque%20a%20stenope.html>) (voir copie en annexe n° 1) Sous cette condition l'image du Soleil sera quasiment correcte, mais la quantité de lumière transmise sera insuffisante pour une utilisation *de visu* !

Sur une autre source (<http://fr.wikipedia.org/wiki/St%C3%A9nop%C3%A9>) (voir extrait en annexe n° 2) où figure la formule définie par Joseph Prezal ($2r^2=fl$), le trou est encore plus petit ! soit $2r$ le diamètre de l'oculus, f la focale (distance de l'oculus au plan de projection) et l la longueur d'onde moyenne de la lumière (550 nm).

Pour la méridienne de Cassini à Bologne et selon ce calcul, le trou aurait 3,8 mm de diamètre, ce qui n'est pas le cas puisque que le diamètre réel à cet endroit est de 27 mm (la millièème partie de sa hauteur au sol). Il semble que cette règle de $1/1000^\circ$ n'est applicable que pour des hauteurs proches de -ou identiques à - celle que l'on trouve à Bologne.

Question : comment à été déterminé le diamètre de l'oculus de Bologne ? Dans son ouvrage Mme Gotteland, mentionne tome II, page 50 « que la plaque de cuivre devait être trouée de façon à permettre aux rayons du soleil de se projeter sur le sol sans aucune difficulté ». Je me demande si la méthode empirique, adaptée au cas à résoudre, n'a pas et n'est pas encore la meilleure des solutions.

LUDIVER (Beaumont-Hague)

La méridienne de plein air $49^\circ 37' 48,86''$ N et $1^\circ 43' 39,06''$ O, (figure 1).

La courbe en 8 mesure 3,35 m, l'oculus se trouve à 1,20 m du plan de la méridienne (voir plan coté, en annexe n°3).

La plaque portant l'oculus est inclinée de 27° sur le plan vertical, ce qui va contribuer à réduire quelque peu l'allongement de la tache-lumière projetée.



Fig. 1

L'oculus est triple. Les diamètres (14, 21 et 40 mm) permettent une projection du point lumière adaptée aux distances de lecture selon les saisons lesquelles sont mentionnées suivant les mois du calendrier républicain.

Les trois diamètres des oculi ont été déterminés par des essais empiriques « au soleil » à l'aide de plaques de carton trouées (figure 2).

La méridienne étant « extérieure », les trous-oculus sont relativement plus grands que ce que l'on a coutume de voir. Par exemple celui de 40 mm destiné à la période de faible ascension solaire permet, même avec un Soleil relativement voilé, d'apprécier facilement le centre plus lumineux de la tache-lumière (figure 3).



Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4

Pour le cas où le Soleil serait tout de même intense, il y a toujours la possibilité d'utiliser l'un des deux autres trous-oculus plus petits. Sur le plan méridien, le point du solstice d'hiver est muni d'un réflecteur en céramique dorée dont le plan est disposé parallèlement au plan du trou-oculus (voir figures 4 et 5).

La précision de la double méridienne de temps vrai local et de temps moyen local est de l'ordre de 5 secondes. La méridienne de temps moyen local permet de démontrer la différence de temps et de longitude entre le méridien international et le site de Ludiver.



Fig. 5

Pour ce faire, il faut utiliser le triptyque bifilaire situé à proximité et comparer les temps au moment des midis respectifs. Le triptyque est équipé d'une courbe en 8 pour chaque heure du jour ; les courbes sont orientées selon l'axe des pôles sur trois plans, respectivement est, sud et ouest.

Constitution : opus incertum, marbre, acier galvanisé à chaud peint, acier inox et laiton. Descriptifs en lave émaillée (atelier Acacia).

EVRON (Mayenne)

Inventions, innovations ! toutes ne sont très souvent que quelques perfectionnements, car nous ne sommes jamais sûrs que l'idée n'ait pas déjà été trouvée et appliquée par le passé ! Les vraies inventions sont, somme toute, bien rares. Pour ma part je le revendique si peu que j'avais presque oublié l'existence d'une application âgée maintenant de 20 ans. « l'alidade à œilleton-*oculus* tubulaire amélioré » (ouf!) les définitions nous donnent de la lumière à retordre.

Pour la réalisation de « l'hélioscaphé » dans la petite commune d'Evron en Mayenne, je devais imaginer une alidade précise et facile d'utilisation, mais surtout faire en sorte que personne n'ait l'idée d'utiliser l'oeil pour viser le Soleil !

L'Hélioscaphé permet de « piéger » la position du Soleil à un moment donné grâce à son alidade, puis, par rotation de l'axe sur lequel elle est fixée, de visualiser sur le plan « horizon » la direction du lever et du coucher du jour et sur le plan méridien, l'élévation de l'astre à midi. Notons au passage la présence d'un cadran solaire équatorial fait d'une bande cylindrique disposée au nord de la structure et celle d'un triple calendrier sur l'arc méridien ainsi que la possibilité de connaître la hauteur de l'astre aligné par simple rotation d'une partie du plan méridien.

Mais revenons à notre œilleton-*oculus* qui est double, avec un élément de part et d'autre de l'axe de l'alidade, pour en permettre l'utilisation même si un élément de la structure cache le Soleil à un moment donné.



Le tube *oculus* d'une trentaine de cm de long a un diamètre intérieur de 12 mm ; plus loin, dans le prolongement de ce tube et à l'opposé de l'astre, est disposée une cible blanche du même diamètre qui se trouvera « rondement » illuminée lors du parfait alignement. Ce tube *oculus* traverse un plan qui sert de

masque protégeant des lumières parasites l'environnement immédiat de la cible.



Restait à rendre l'alidade facile et rapide à utiliser. Pour cela j'ai disposé un deuxième tube autour du premier, comme une « chemise » ; il est court, d'un diamètre supérieur au premier (34 mm), situé au-dessus du « plan-masque » et donne à celui-ci une seconde utilité, celle de réceptionner son ombre. Tant que l'alidade n'est pas parfaitement orientée cette ombre présentera une image quelconque ; il est dès lors facile d'amener cette ombre à paraître parfaitement circulaire, la cible s'illumine alors et un réglage encore plus précis devient possible.

Le tube-ocillon-*oculus* se comporte comme un œil avec pupille et rétine ! Je l'appelle donc le GNOMON-OCULUS.

Jean Michel Ansel, Atelier d'Hélios - Courriel : anselhelios@live.fr

ANNEXES

Annexe n° 1 : Disques à sténopé

Copie de la page du site

<http://s192257538.onlinehome.fr/stenocamera/Materiel%20disque%20a%20stenope.html>

Ces disques à sténopé sont la base de mon système. Ils peuvent être montés sur tous les instruments et tous les accessoires que je propose. Le trou est percé à l'aide de forets calibrés de fabrication allemande, d'une très grande précision. J'utilise une méthode spéciale pour obtenir un diamètre de trou particulièrement précis.

Il règne une légende tenace, entretenue par ceux qui en proposent (c'est assez compréhensible !), qui dit qu'un sténopé percé au laser est meilleur qu'un sténopé percé au foret, c'est totalement faux. Tout le secret de la fabrication d'un bon sténopé est dans le ponçage qui suit l'usinage : le foret, comme un laser de puissance, crée un léger effet tunnel par refoulement de matière, c'est ce petit débordement qu'il faut poncer minutieusement, sur les deux faces. La feuille de métal dans laquelle est percé le sténopé est ainsi encore réduite en épaisseur et l'effet tunnel est éliminé.

Pour parfaire les choses, il est nécessaire de noircir le sténopé à l'aide d'une solution chimique pour éliminer les reflets parasites de la lumière sur les bords internes du trou. Il faut donc utiliser un matériau capable d'être oxydé par la solution chimique en question, ceci élimine les matériaux tels que l'acier inox. Pour ma part j'utilise une feuille de laiton de 0,025mm d'épaisseur.

Après ponçage, la feuille de laiton est poncée recto/verso à l'aide de papier carbure à grains dégressifs (de 600 à 2000) , elle est ensuite noircie dans une solution chimique spéciale, sous ultrasons pour éliminer tous les résidus de ponçage et bien faire pénétrer la solution oxydante dans les parois du trou (il ne faut pas oublier que ces sténopés ne font que quelques dixièmes de millimètres de diamètre pour 2/100 de mm d'épaisseur) . Une fois secs, les sténopés sont montés sous caches carton (comme une diapositive), le collage est fait sous presse à chaud. Le montage final fait 49mm de diamètre extérieur et est percé de deux petits trous de 3mm de diamètre espacés de 41mm entre axes. Ce montage permet une manipulation facile, la possibilité de monter ces disques à sténopé sur n'importe quel instrument de ma fabrication (ou, pourquoi pas, sur vos propres réalisations) et il permet de les identifier instantanément : le diamètre du trou est inscrit en blanc sur le disque lui-même. Notez

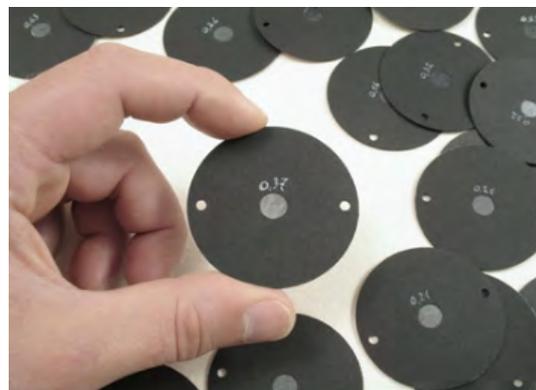
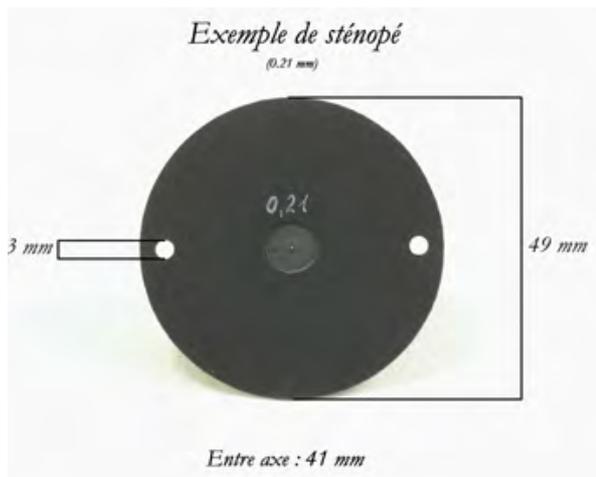
également que des contrôles permanents tout au long de la fabrication me permettent de garantir un diamètre précis à plus ou moins 0,01mm près, quel que soit le diamètre final du sténopé.

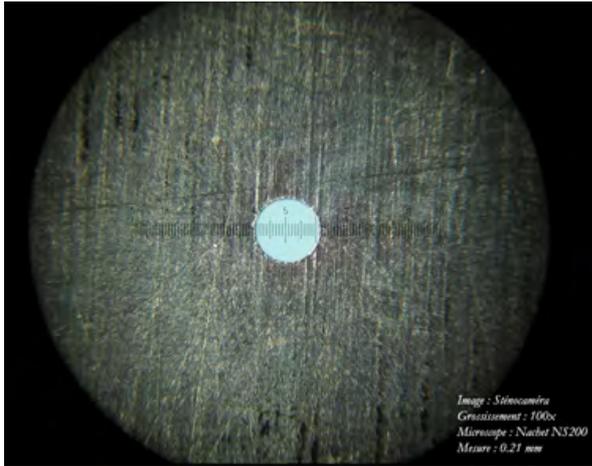
Diamètres disponibles :

Diamètres d	Longueur optimale correspondante f	Diaphragme résultant f/d	Plage de longueurs conseillée	Diaphragmes correspondants
0.16 mm	20 mm	f/125	15 mm - 21 mm	f/90 - f/130
0.21 mm	32 mm	f/150	21 mm - 37 mm	f/100 - f/180
0.26 mm	50 mm	f/190	34 mm - 55 mm	f/130 - f/210
0.32 mm	75 mm	f/235	52 mm - 80 mm	f/160 - f/250
0.37 mm	100 mm	f/270	70 mm - 105 mm	f/190 - f/290
0.42 mm	130 mm	f/310	90 mm - 140 mm	f/215 - f/330
0.48 mm	170 mm	f/355	120 mm - 180 mm	f/250 - f/375
0.53 mm	210 mm	f/400	140 mm - 220 mm	f/265 - f/415
0.57 mm	240 mm	f/420	165 mm - 250 mm	f/290 - f/440
0.63 mm	300 mm	f/480	200 mm - 315 mm	f/320 - f/500
0.69 mm	350 mm	f/510	240 mm - 370 mm	f/350 - f/540
0.74 mm	400 mm	f/540	280 mm - 420 mm	f/380 - f/570
0.83 mm	500 mm	f/600	370 mm - 520 mm	f/450 - f/630
1.04 mm	800 mm	f/770	600 mm - 1000 mm	f/580 - f/960

Légende du tableau : Diamètre = diamètre du sténopé ; Longueur optimale f = distance sténopé/film la plus adaptée au diamètre du sténopé ; Le diaphragme résultant f/d est le résultat de la division de la distance par le diamètre, par exemple, pour le diamètre 0.21 et pour une distance sténopé/film de 32 mm, il faut faire $32/0.21=152$, soit un diaphragme de f/150 (valeur approchée) .

La plage de longueurs conseillée représente les distances sténopé/film utilisable avec un diamètre donné. Vous trouvez ensuite les diaphragmes correspondants pour les deux extrêmes de cette plage ; si vous désirez calculer un diaphragme pour une distance intermédiaire, il suffit de faire f/d.





Ces disques à sténopé sont très facile à utiliser grâce à ce montage. Il est ainsi possible de les transporter aisément, car ils peuvent se ranger dans une petite pochette ou un carnet spécial. Les deux perforations latérales permettent le centrage instantané du sténopé sur l'axe optique. Si vous désirez fabriquer vous-même votre instrument de prise de vue, ce système vous permettra d'intégrer facilement ces sténopés à vos réalisations.

Vous trouverez sur une autre page de la section matériel un adaptateur spécial pour

ces sténopés et une planchette pour chambre type Sinar/Horseman.

L'image de gauche vous présente agrandi 100 fois un sténopé de 0,21mm, l'instrument de mesure que j'utilise est un microscope Nachet NS200 équipé d'un oculaire gradué en centièmes de millimètre. La précision de mesure est de +/- 1/100 de mm.

stenocamera@wanadoo.fr

Annexe n° 2 : Le sténopé

D'après la page du site

<http://fr.wikipedia.org/wiki/St%C3%A9nop%C3%A9>

Principe de fonctionnement d'un sténopé

Un appareil photographique à sténopé se présente sous la forme d'une boîte dont l'une des faces est percée d'un trou minuscule qui laisse entrer la lumière. Sur la surface opposée au trou vient se former l'image inversée de la réalité extérieure, que l'on peut capturer sur un support [photosensible](#) (tel que du [papier photographique](#)). Pour faire simple, on peut dire que le sténopé fonctionne de la même façon que l'œil : il capture des images inversées du visible.

Du fait de la petitesse de l'orifice permettant à la lumière de pénétrer à l'intérieur de l'appareil et de l'absence de focalisation, le temps nécessaire pour impressionner la surface photosensible est très long. Selon la taille de l'appareil et celle de l'ouverture, il peut se chiffrer en secondes ou en heures. Le trou du sténopé est minuscule, par conséquent il permet une plus grande latitude d'exposition et offre une très grande profondeur de champ (presque à l'infini).

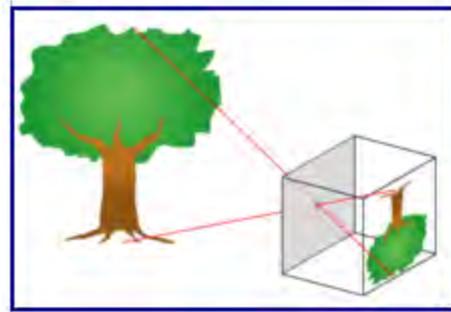
Historique

On attribue l'invention du sténopé à Ibn al-Haytham, scientifique arabe et père de l'optique moderne. Bien que cela ne soit pas formellement établi, il est possible que la [première photographie](#) (Joseph Nicéphore Niépce) ait été prise avec un sténopé.

La première formule pour déterminer le diamètre du trou fut énoncée par l'Autrichien Joseph Pretzal en [1857](#). Le futur [prix Nobel](#) [John William Strutt Rayleigh](#) établira une formule dans les [années 1880](#) en travaillant sur les télescopes.

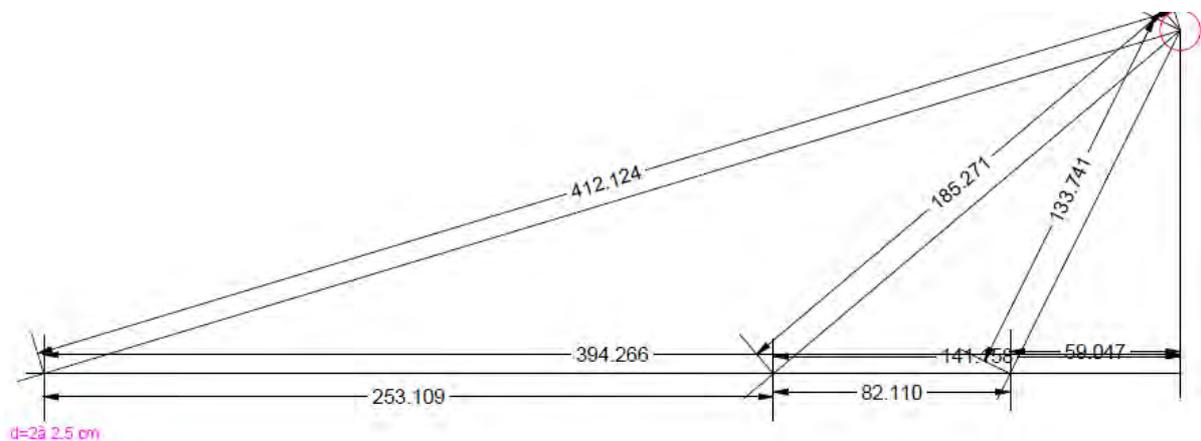
Pratique

La construction d'un sténopé est extrêmement simple. Il suffit d'une boîte suffisamment bien fermée pour être étanche à la lumière. Son intérieur doit être recouvert d'une substance noire et mate pour éviter toute réflexion optique des rayons lumineux. L'une des faces est percée d'un petit trou, à l'aide d'une aiguille à coudre par exemple. C'est ce petit trou qui est à proprement parler le sténopé. Il peut être percé dans un matériau différent de celui de la chambre noire et être monté sur celle-ci comme un objectif photographique classique.



Un sténopé

Annexe n° 3 : Schéma côté de la méridienne de Ludiver



La courbe en 8 mesure 3,35 m (253,109cm + 82,110cm = 335,219 cm)

Annexe 4 : un style à œillette

Dans *Cadran Info* n° 3 de mai 2001, Jean-Michel Ansel avait publié un court article sur les œillette, faisant suite à deux autres publications concernant les styles, dans les numéros précédents. Ci-dessous une reproduction.

STYLE N° 3 (œillette)

Le bord d'un style projette une ombre. Pour le « style », les Allemands utilisent l'expression "**Schattenträger**" (*porteur d'ombre*). Cette ombre ainsi projetée à petite distance convient en général, particulièrement pour les lignes horaires.

Mais plus le **style** s'éloigne du **cadran**, plus l'ombre est diffuse. Ainsi, à une distance de 10 mètres, l'ombre portée aura presque 9 cm de large ! Cela vient de la valeur angulaire du diamètre du Soleil qui est de $1/2^\circ$ environ. Le bord du style ne cachera l'astre que progressivement et le bord d'ombre se décomposera en plusieurs phases allant de la

lumière à l'ombre, en passant par la pénombre, ce qui crée un flou déjà perceptible voire gênant à un mètre !

Pour marquer le temps sur les lignes diurnes d'un grand cadran, cette situation n'est pas pratique. Ainsi est apparue l'idée d'utiliser une boule ou, mieux, une plaque percée d'un trou appelé **œilleton**.

Reste à déterminer le **diamètre de l'œilleton**. Il faut savoir qu'il ne sera jamais parfait*, à moins d'être réglable et asservi à un ordinateur qui en ferait varier le diamètre et l'orientation selon l'heure et la saison.

Il faudra donc choisir la distance moyenne, œilleton /cadran la plus utile, choix qui peut être lié à l'utilisation. C'est de nouveau le diamètre apparent du Soleil qui fera loi.

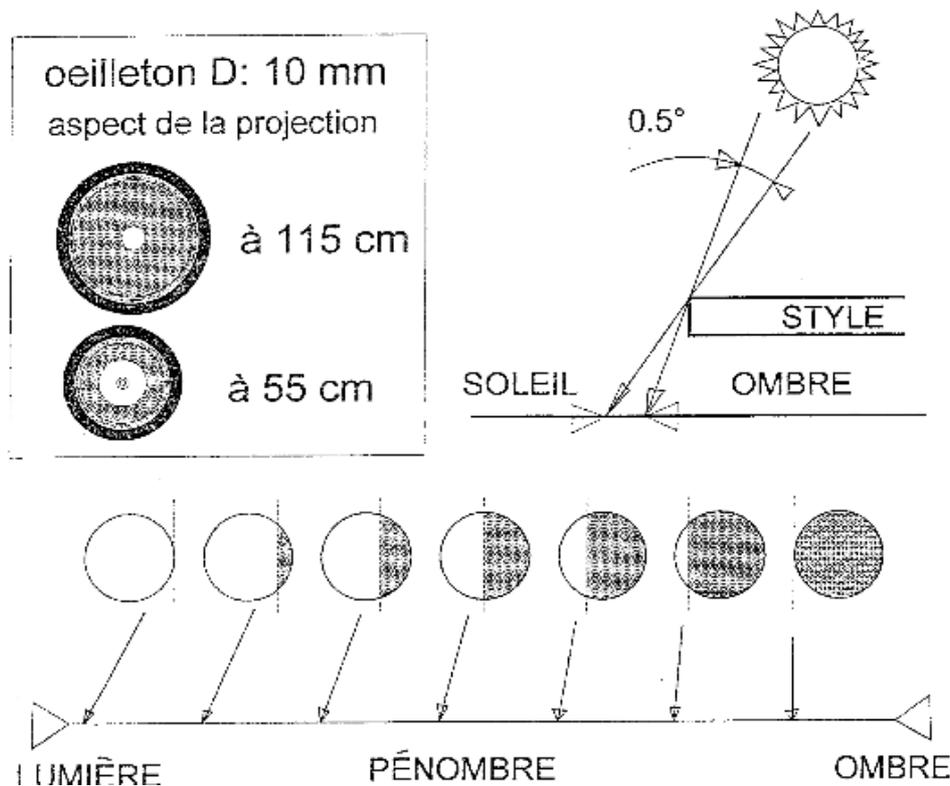
Exemple : pour un œilleton de 10 mm de diamètre, l'image intégrale du Soleil sera projetée à environ 115 cm. Le soleil sera vu comme un petit point de lumière d'environ 1 à 2 mm de diamètre, auréolé d'une zone de pénombre de 20 mm environ.

Approchons l'œilleton à la moitié de cette distance, c'est-à-dire 57 cm, la tache de pénombre paraîtra 13/14 mm avec au centre un bel anneau de lumière de 5 à 6 mm de diamètre.

Partant de cette approche globale, il suffit, pour obtenir un résultat optimal, d'effectuer des essais à l'aide d'une feuille de carton et de choisir (voir dessin ci-dessous).

Jean-Michel Ansel

* Sauf pour le style boule dans un scaphé, la distance de projection étant constante à tout moment.





- Deux méridiennes créées et utilisées par la dynastie Cassini

<http://www2.saf-lastronomie.com/csm/arr14n/centrea142.html>

L'observatoire de Paris, 61, avenue de l'Observatoire

La méridienne de Jean Dominique Cassini I en 1671

- Les œilleteons

« Un premier œilleteon était à 31 pieds 3 pouces 7 lignes, soit 4 507 lignes. Le Samedi 10 de février 1680, un deuxième œilleteon est placé à : 30 pieds 7 pouces 1 ligne, soit 4 405 lignes, donc plus bas de 102 lignes.

A côté du trou du gnomon, on ajustait des objectifs de diverses longueurs pour servir à diverses saisons de l'année".

- La méridienne au sol

La longueur de la méridienne fut mesurée en 1682 par J.D. Cassini I : 97 pieds 6 pouces 4 lignes, soit : 14 044 lignes ».

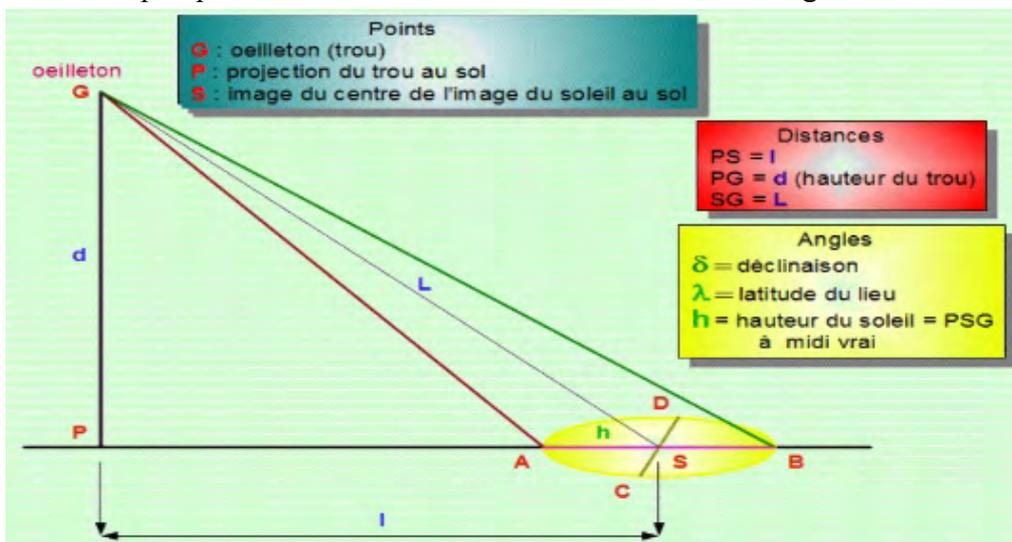
[Suite sur le site](#)

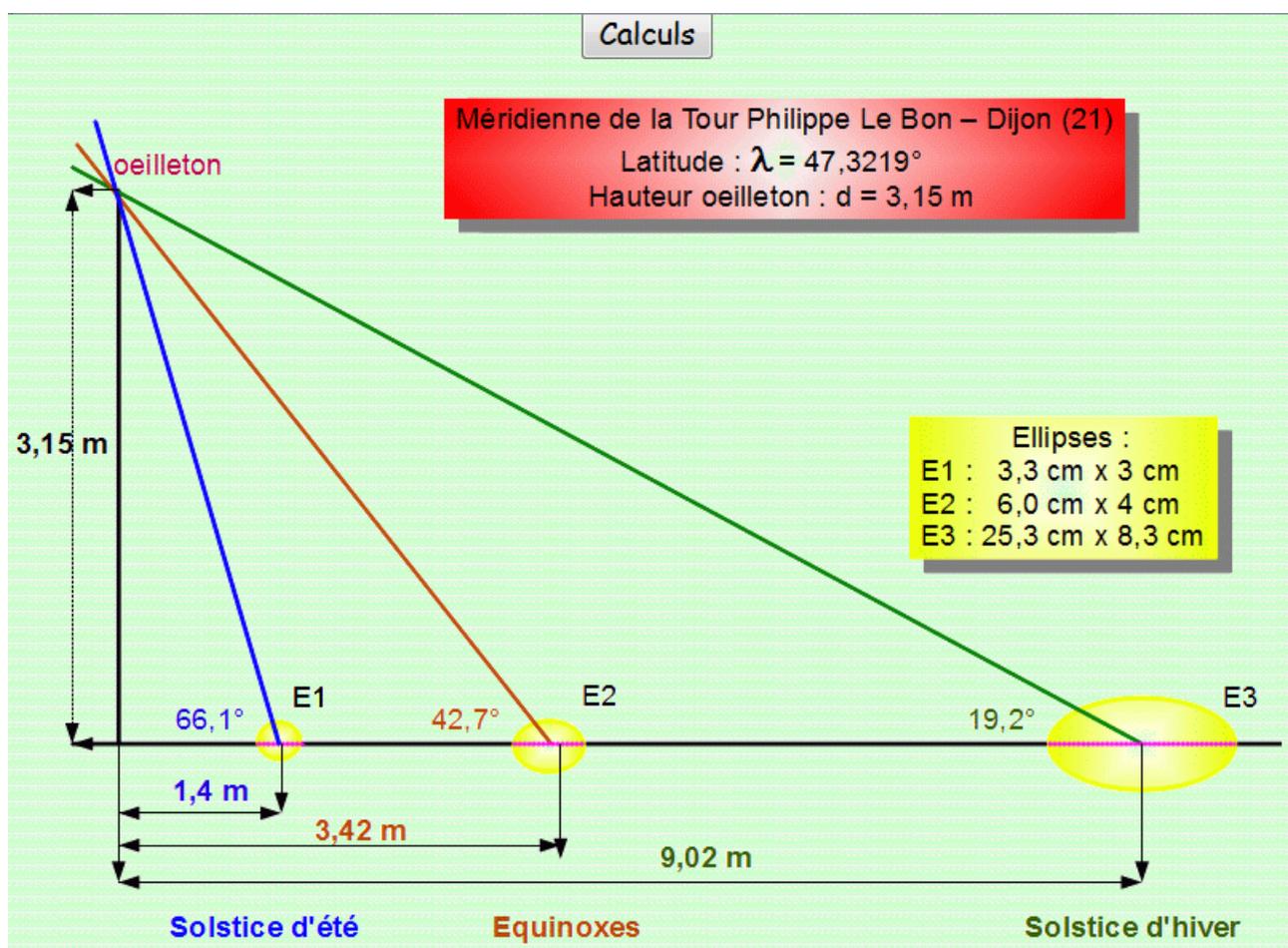
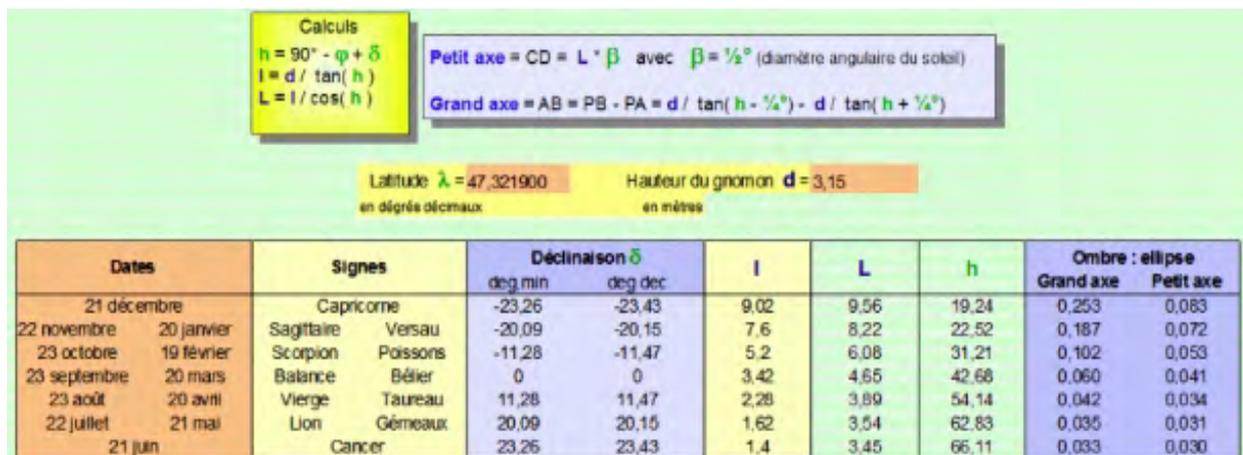


- Méridiennes d'intérieur dites à "chambre noire"

http://michel.lalos.free.fr/cadrans_solaires/doc_cadrans/meridienne/cs_meridienne_int.html

Le site de notre collègue Michel Lalos, présente une belle collection de méridiennes intérieures et donne quelques indications sur « la détermination de l'image du soleil au sol ».





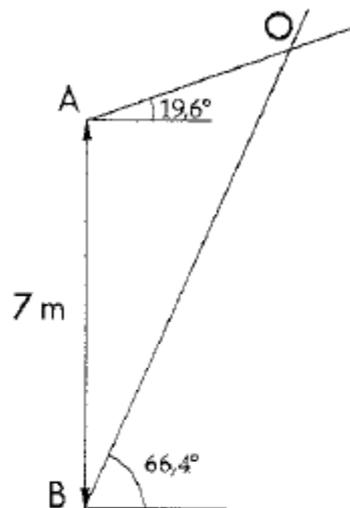
Suite sur le site

- Vitesse de l'ombre, rue de la Porte-aux-Lions (Dijon), calcul de l'emplacement de l'œilleton

http://www.inrp.fr/Acces/clea/cahiers-clairaut/CLEA_CahiersClairaut_097_08.pdf

Ces éléments concernent une méridienne verticale de la ville de Dijon située au coin de la rue de la Liberté et de la rue de la Porte-aux-Lions.

Calcul de l'emplacement de l'oeilleton



Pour que la table de 7 mètres soit utilisée d'un solstice à l'autre, le centre du soleil percé doit être placé en O.

L'angle OAB mesure $109,6^\circ$; l'angle OBA mesure $23,6^\circ$; l'angle AOB mesure $180^\circ - 109,6^\circ - 23,6^\circ = 46,8^\circ$.

La relation des sinus dans le triangle OAB donne :
 $OB / \sin OAB = AB / \sin AOB$
 on en déduit $OB \approx 9$ mètres

On peut calculer qu'à cette distance, le diamètre apparent du Soleil étant de $0,5^\circ$, la tache lumineuse aura un diamètre d'au moins 8 cm.

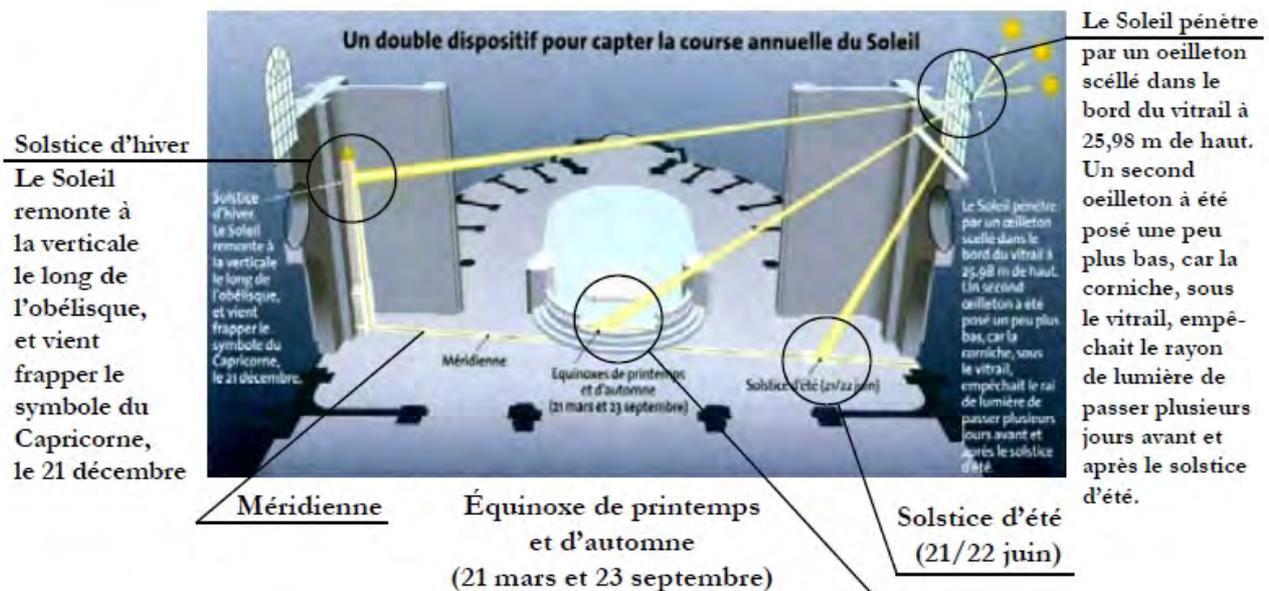
⇒ Dans la version CDrom de Cadran Info vous trouverez en annexe : le texte complet

• Les cathédrales : des observatoires du soleil

http://cadrans_solaires.scg.ulaval.ca/v08-08-04/pdf/Expo_cathedrales_WEB.pdf

De la nécessité de la méridienne dans la détermination de la date de pâque. Son explication, son développement à partir du XV^e siècle et ses représentations dans les cathédrales.

Ci-dessous, principe de la méridienne de l'église Saint-Sulpice à Paris



- Méridienne de l'hôtel de ville de Nantes

<http://www.san-fr.com/cadran-solaire/hotel-ville/hotel-ville.php>

Le style mesure 1434 mm et se termine par un œilleton de 7 mm de diamètre percé au centre d'un fort disque de laiton rayonnant, doré lui aussi.

La table de la méridienne est gravée de 256 signes et 23 mètres de lignes, qui ont été redessinées à l'aide de 96 dm² de feuille d'or. Au solstice d'été, le 21 juin, l'ombre du style mesure 2420 mm.

Suite sur le site

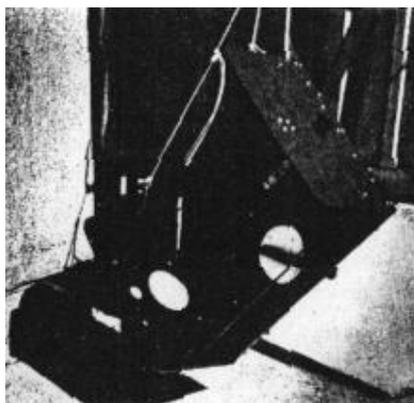


- Le nouveau cadran solaire de l'observatoire de Juvisy

<http://membres.multimania.fr/juvastro/sagot/sagot.htm>

Dans la revue *l'Astronomie* de décembre 1974, Robert Sagot décrit la restauration du cadran de 1910 situé à l'entrée de l'observatoire de Juvisy. Il explique en outre, le relevé de la déclinaison du support par un déclinomètre azimutal.

Quand le parallélisme est rigoureusement réalisé, on peut compter sur une précision d'une ou deux secondes dans la lecture des heures des passages. A la condition toutefois de noter non pas le passage du centre du Soleil dont la position est délicate à repérer, mais les contacts *intérieurs* des bords du disque avec le fil du réticule perpendiculaire au déplacement de l'astre, observé par projection sur un écran. Au début, le limbe solaire vient en contact avec le premier bord du



Le déclinomètre azimutal construit par A. Duplay.

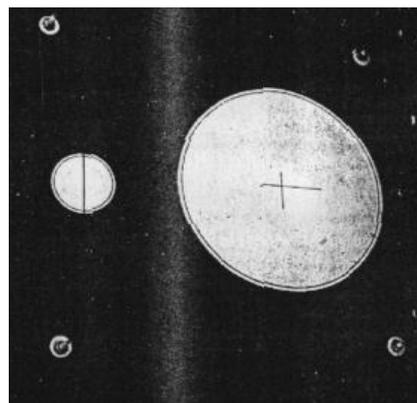


Image circulaire du Soleil fournie par le déclinomètre. Les instants d'apparition et de disparition du petit segment lumineux (ici à gauche du fil vertical) sont faciles noter

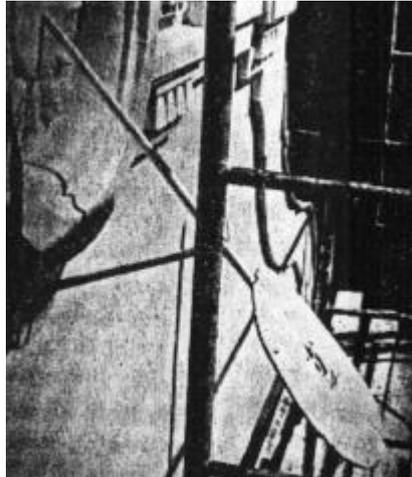
fil, disparaît puis réapparaît subitement au second bord sous l'aspect d'un point de lumière; on note l'heure de ce phénomène. On laisse filer le Soleil dont il ne reste plus bientôt, en arrière du fil obscur, qu'un mince segment lumineux qui décroît rapidement et s'évanouit tout à coup on note l'heure de ce second phénomène. Le milieu des deux temps enregistrés correspond pratiquement à l'heure du passage du centre du disque, d'où l'on tire l'angle horaire du Soleil.

Une formule permet finalement d'en déduire la déclinaison gnomonique D du mur ⁽¹⁾

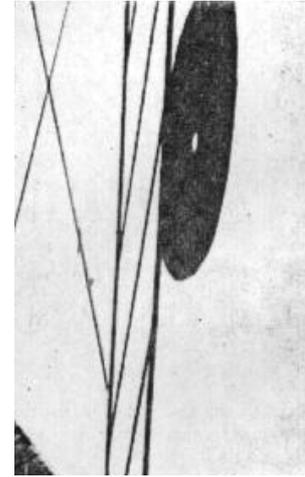
(1) En appelant H l'angle horaire du Soleil, δ sa déclinaison et ϕ la latitude du lieu, on a :

$$\operatorname{tg} D = (\cos \phi \operatorname{tg} \delta - \sin \phi \cos H) \sin H.$$

La mise en œuvre de cette méthode exige que certaines conditions soient satisfaites. Il faut qu'il y ait, à l'époque où l'on opère, au moins un passage quotidien du Soleil dans le plan du mur et qu'aucun obstacle ne vienne s'opposer à son observation. A Juvisy, où le cadran est flanqué d'une tour qui interdit toute mesure vers le couchant, la méthode ne pouvait être utilisée que le matin, pendant sept mois de l'année, du début de mars au début d'octobre. Fort heureusement, les mesures y ont été faites au mois d'août



Le style et son "chapeau" de carton pendant les mesures



L'ombre du "chapeau" destinée à augmenter le contraste entre l' image du soleil et le mur

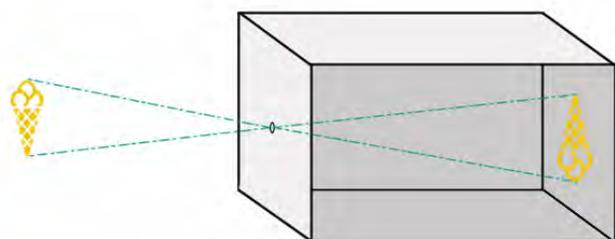
L'appareil, appelé par nous "déclinomètre", était monté sur une planche à dessin de 65 centimètres de longueur que l'on plaquait contre le mur, du moins dans la mesure où le permettaient les petites tumescences de sa surface. En raison des circonstances météorologiques, peu favorables dans les premières heures de la journée, l'appareil n'a pu être expérimenté qu'à deux reprises, le long de la ligne méridienne du cadran, mais il a fourni des résultats concordants.

[Suite sur le site](#)

• Le sténopé

<http://www.astrosurf.com/rondi/instru/obseclipse/#2>

« Le principe du sténopé est très simple et illustré sur la figure ci-contre : on perce l'une des faces d'une boîte d'un petit trou (de l'ordre du millimètre ou plus petit), et sur la face opposée on voit alors apparaître l'image inversée de l'environnement extérieur.



Pour observer le soleil on peut se contenter de percer un petit trou à l'aide d'une aiguille ou d'un poinçon sur une feuille opaque et de projeter l'image de ce trou sur une autre feuille ou sur le sol, à quelques mètres en arrière.

Les règles à retenir pour réaliser un bon sténopé sont :

- plus le trou est petit, plus l'image sera nette, mais peu intense;
- plus le trou est grand, plus l'image sera brillante, mais floue;
- plus la distance de projection est grande, plus l'image du Soleil sera grande (en d'autres termes, ce n'est pas la grosseur du trou qui fait la grandeur de l'image projetée) ; on obtient une échelle de projection du Soleil de 1cm par mètre de projection (ex : si l'on projette à 2 mètres, l'image fera 2 cm de diamètre) ».

[Suite sur le site](#)

• Emploi d'un sténopé pour observer le passage du soleil au méridien

<http://www.commission-cadran-solaires.fr/?p=786>

Sur le site de notre commission, dans la rubrique "article du mois", il est possible de télécharger un article paru dans la revue *l'Astronomie* de 1907 sous le titre "Modification du cadran solaire", par A. Florence.

Il s'agit de la description, pour réalisation pratique, d'un sténopé (figure 73) comportant deux "œilletons" (figure 74) projetant ainsi « sur un fond obscur, deux disque éclairés O et O' et à leur intersection un fuseau d'un éclairage double, très étroit, et à pointes fines directement opposées à deux pointes sombres (figure 75). L'axe de dissymétrie dans le centrage est immédiatement perceptible ».

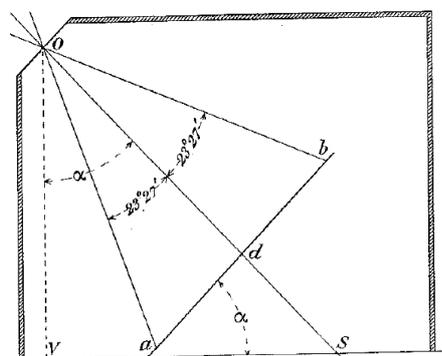


Figure 73

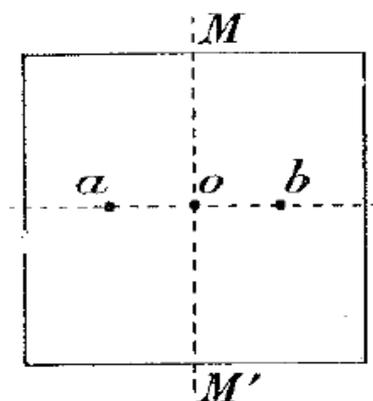


Figure 74

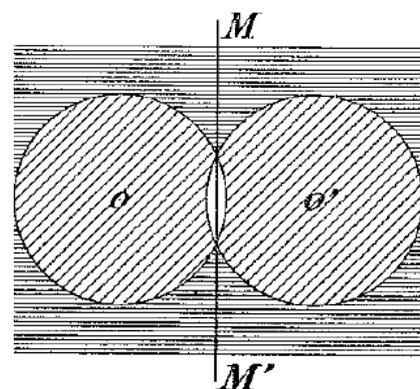


Figure 75

⇒ Dans la version CDrom de Cadran Info vous trouverez en annexe le texte complet dans "astronomie_1907 p. 226 à p232"

• La méridienne de l'observatoire de Paris

http://www.imcce.fr/hosted_sites/meridienne

Ce site vient compléter l'article « La méridienne de Paris et ses œilletons ».

Il présente la méridienne, l'œilleton, le principe de fonctionnement, des animations et la possibilités de simuler la position de la tache lumineuse suivant la date, ainsi qu'une galerie de photographies.

Page : http://www.imcce.fr/hosted_sites/meridienne/animation.php

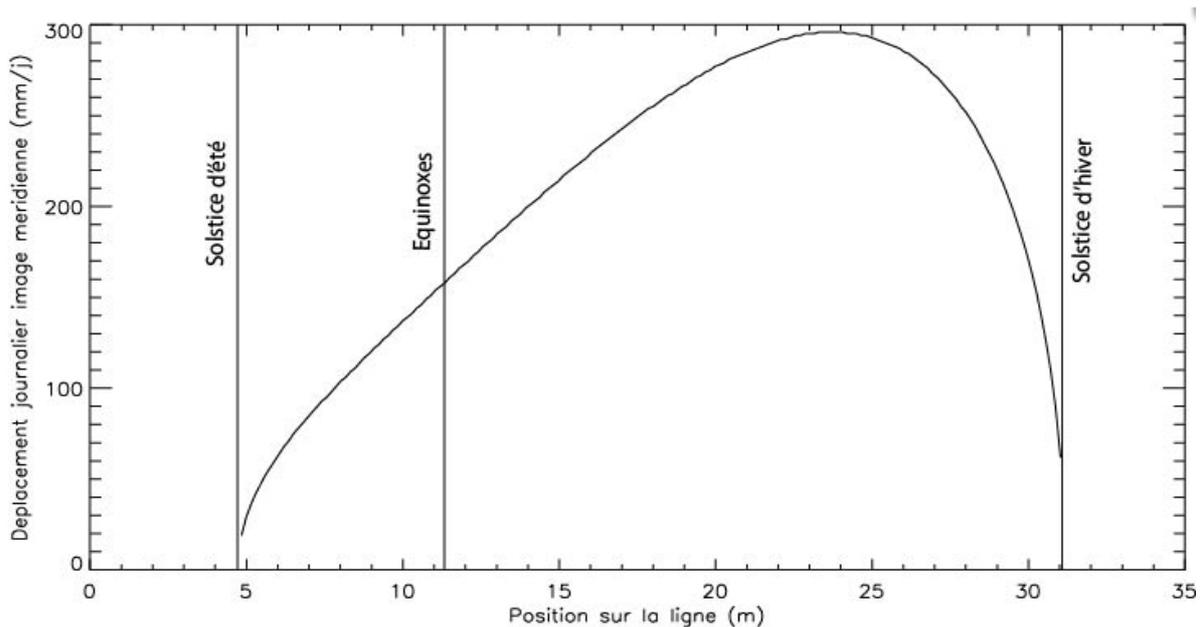
Le mouvement méridien de l'image solaire

« L'éclat de la tâche reste constant mais son éclairement reçu au sol varie avec la variation de ses dimensions. C'est pourquoi, au solstice d'été, là où la tâche est la plus ramassée elle semble également être plus éclatante qu'au solstice d'hiver, à l'autre extrémité de la méridienne, où son pâle éclat la rend à peine perceptible. Pourtant, la lumière totale reçue est identique mais l'image est 27 fois plus grande en surface au solstice d'hiver qu'au solstice d'été.



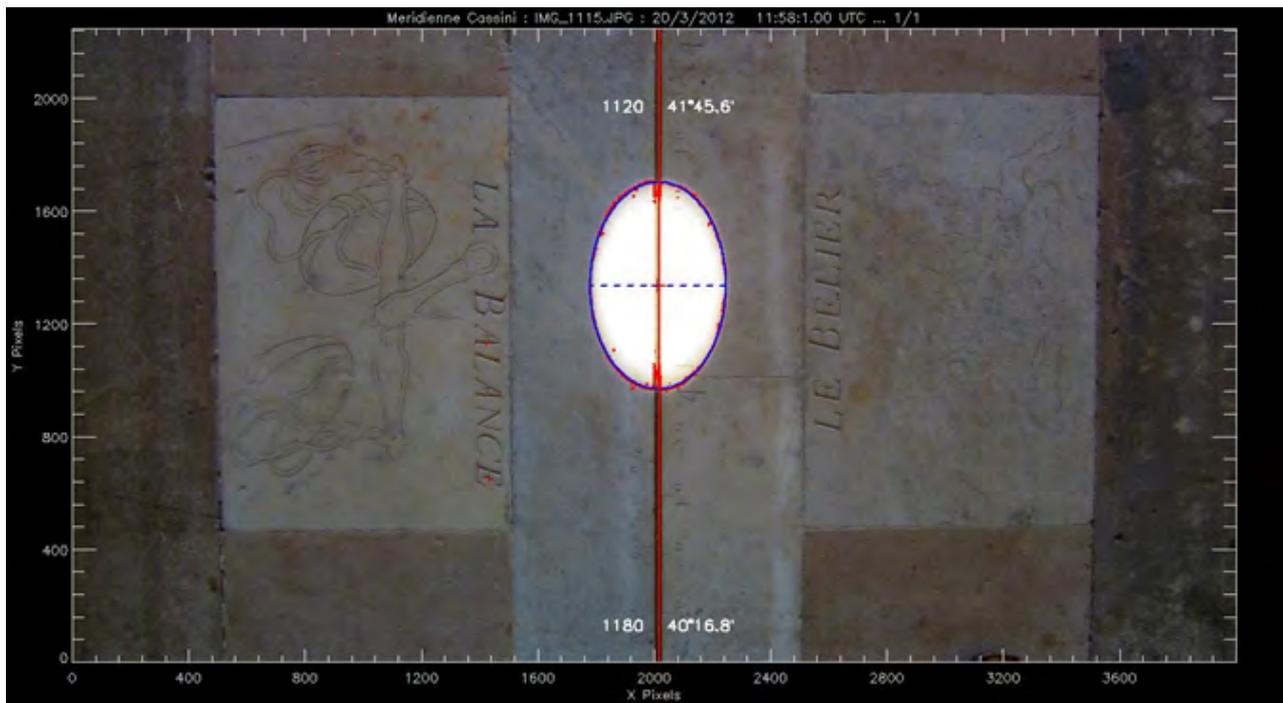
Par ailleurs, il peut sembler que l'animation accélère puis ralentit ; ce n'est pas le cas. Cette impression visuelle résulte de deux facteurs : le premier provient de la projection horizontale qui a pour effet de donner au degré de hauteur une échelle beaucoup plus grande à mesure que l'on s'approche du solstice d'hiver (3,12 cm/minute ou 1,87 m/deg) qu'au solstice d'été (21,24 cm/deg) ; ainsi, une variation d'un degré de hauteur se traduit par un déplacement près de neuf fois plus important de l'image du Soleil au solstice

d'hiver qu'au solstice d'été. En outre, le mouvement du Soleil, son élévation ou son abaissement dans le ciel, n'est pas constant d'un jour à l'autre. Il est pratiquement nul aux solstices et maximum aux équinoxes. Ceci a pour effet vers le solstice d'été de pratiquement immobiliser la tâche solaire, car les deux facteurs vont se conjuguer pour réduire à son maximum le déplacement méridien de la tâche solaire. »

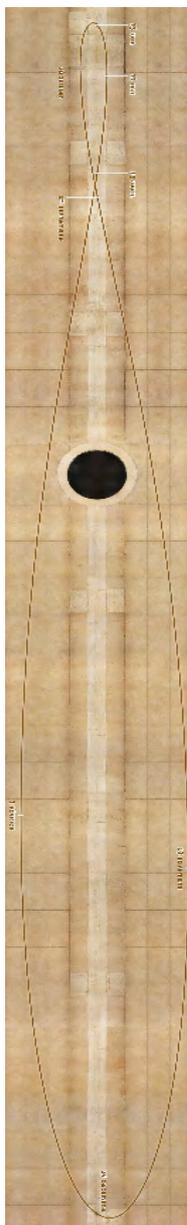


Photos du gnomon actuel





L'équation du temps



« Il est de coutume de dire *qu'il est midi lorsque le Soleil culmine dans le ciel*, c'est-à-dire lorsque son image traverse la ligne méridienne - ce qui d'ailleurs n'est pas rigoureusement exact ; la culmination des astres proches, comme la Lune et le Soleil, ne se produit pas, en général, lors du passage au méridien. Pourtant, nous pouvons constater que non seulement il n'est pas midi à la montre, ni en temps universel ni en temps local, mais que par ailleurs, d'un jour à l'autre, cet instant, que nous appellerons dès lors le *midi vrai*, change. En réalité, le soleil, ou du moins son image, dont nous observons la bissection sur la ligne méridienne, n'est pas le soleil de notre montre. Le temps, dans notre vie quotidienne, doit avoir un écoulement uniforme, régulier, prévisible; c'est le temps de la montre. De manière à ne pas trop bouleverser le rythme quotidien de la succession des jours et des nuits, il est nécessaire de relier ce temps *mécanique* à celui donné par le mouvement du Soleil dans le ciel. Ce mouvement n'est qu'apparent. Il nous renvoie, pour l'essentiel, au mouvement de rotation de la Terre autour de son axe ; mais il subit également de petites variations qui proviennent du mouvement de la Terre autour du Soleil, déplacement non uniforme le long d'une orbite légèrement elliptique, ce qui cause des accélérations et des décélérations conformément aux lois du mouvement énoncées par Kepler au début du XVIIe siècle. Ce mouvement orbital irrégulier ainsi que l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre sur le plan de son orbite sont responsables des irrégularités du temps solaire, c'est-à-dire du temps uniquement défini par le mouvement diurne apparent du Soleil. La différence entre le temps parfaitement uniforme - réalisé par l'UTC et constitutif d'un soleil *moyen*, entité purement mathématique - et le temps *solaire vrai*, est appelée *l'équation du temps*, dont le tracé en fonction de l'époque de l'année a l'allure d'une courbe oscillante pouvant atteindre au maximum des valeurs de ± 15 minutes ».

◀ « Méridienne de temps moyen (ou analemme) tracée sur la méridienne de l'Observatoire de Paris. Les excursions maximales Ouest et Est se produisent respectivement le 13 novembre et le 2 février. A ces dates, le Soleil moyen est successivement en avance sur le Soleil vrai de 15,7 mn (soit 1,65 m au sol) puis en retard de 13,6 mn (1,38 m au sol) ».

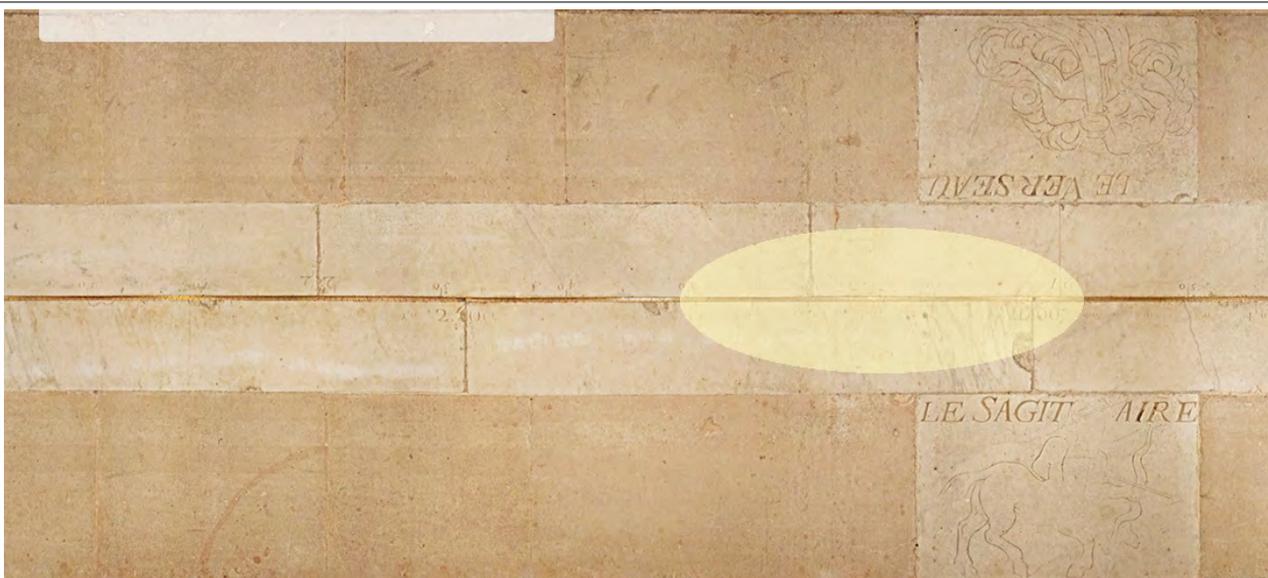
Calcul de la position

« Cet outil vous permet de visualiser à une date quelconque (comprise entre 1951 et 2024) l'image du Soleil lors de son passage sur la grande ligne méridienne de l'Observatoire de Paris ($02^{\circ} 20' 14''$ E - $48^{\circ} 50' 11''$ N). Cette image synthétique est celle que l'on obtiendrait si le gnomon était constitué d'un simple orifice et non de sa lentille actuelle ». Ci-après quelques « copies d'écran » montrant les résultats de l'outil de simulation.

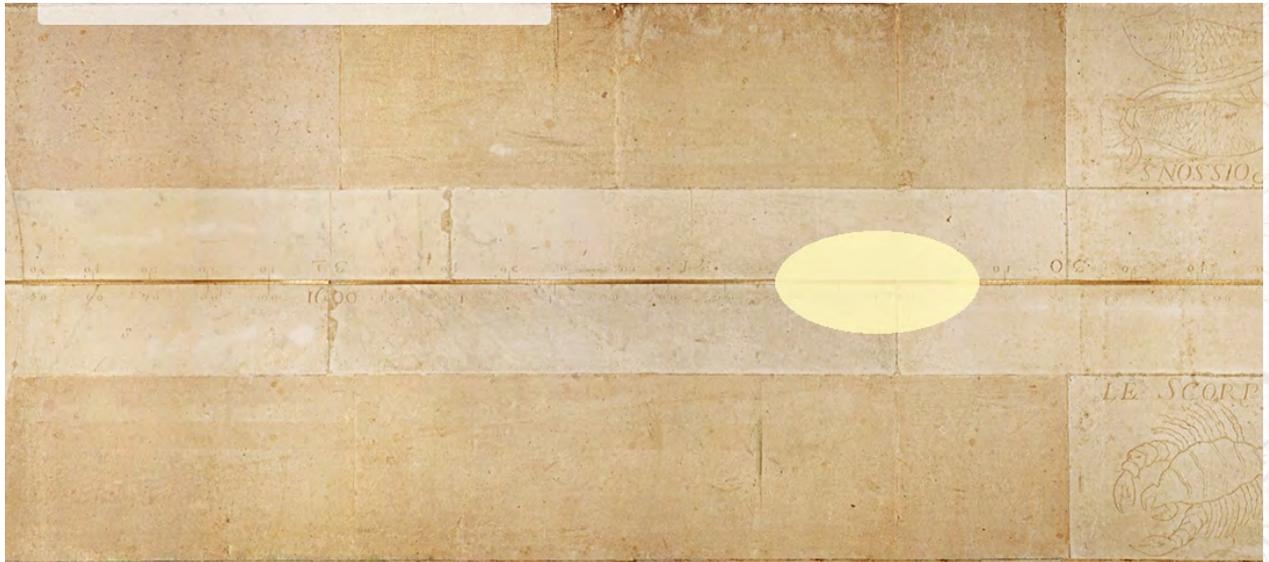
2011-12-21 : Heure du passage au méridien : 11:48:32.9 UTC; Hauteur du soleil : 17.78 °; Position de l'ellipse : 31 m; Grand axe de l'ellipse : 993 mm; Petit axe de l'ellipse : 303 mm



2012-1-21 : Heure du passage au méridien : 12:01:47.5 UTC; Hauteur du soleil : 21.24 °; Position de l'ellipse : 25.58 m; Grand axe de l'ellipse : 705 mm; Petit axe de l'ellipse : 255 mm



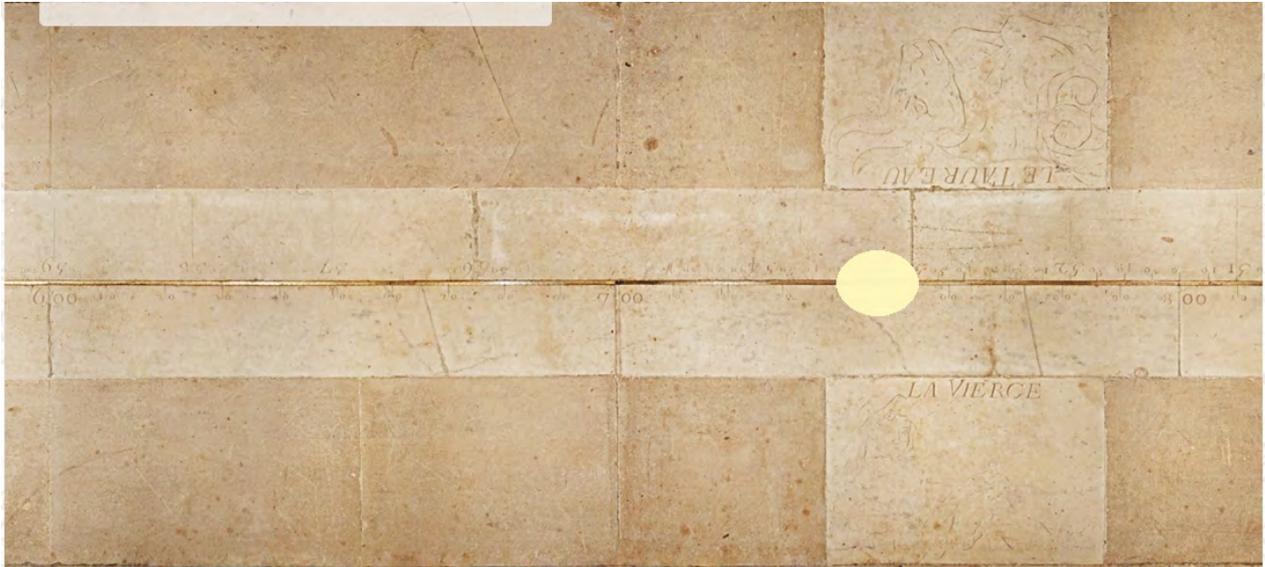
2012-2-21 : Heure du passage au méridien : 12:04:18.2 UTC; Hauteur du soleil : 30.52 °; Position de l'ellipse : 16.86 m; Grand axe de l'ellipse : 359 mm; Petit axe de l'ellipse : 182 mm



2012-3-21 : Heure du passage au méridien : 11:57:41.3 UTC; Hauteur du soleil : 41.69 °; Position de l'ellipse : 11.16 m; Grand axe de l'ellipse : 209 mm; Petit axe de l'ellipse : 139 mm



2012-4-21 : Heure du passage au méridien : 11:49:15.9 UTC; Hauteur du soleil : 53.26 °; Position de l'ellipse : 7.42 m; Grand axe de l'ellipse : 144 mm; Petit axe de l'ellipse : 115 mm



2012-5-21 : Heure du passage au méridien : 11:47:15.7 UTC; Hauteur du soleil : 61.49 °; Position de l'ellipse : 5.4 m; Grand axe de l'ellipse : 120 mm; Petit axe de l'ellipse : 105 mm



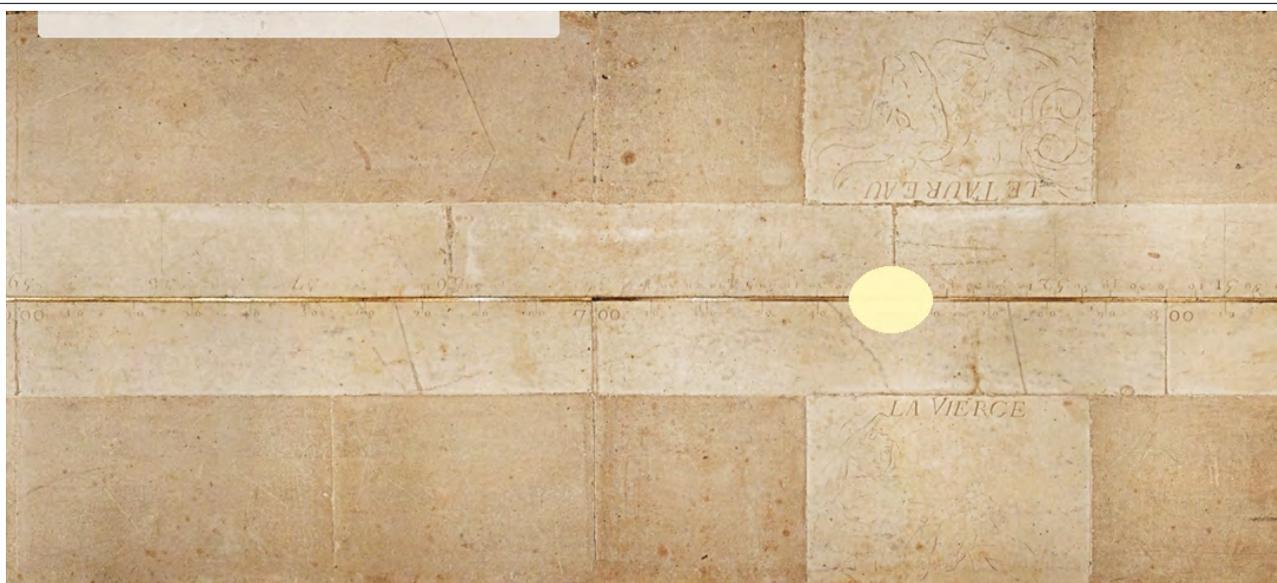
2012-6-21 : Heure du passage au méridien : 11:52:31.5 UTC; Hauteur du soleil : 64.61 °; Position de l'ellipse : 4.72 m; Grand axe de l'ellipse : 113 mm; Petit axe de l'ellipse : 102 mm



2012-7-21 : Heure du passage au méridien : 11:57:05.3 UTC; Hauteur du soleil : 61.5 °; Position de l'ellipse : 5.4 m; Grand axe de l'ellipse : 120 mm; Petit axe de l'ellipse : 105 mm



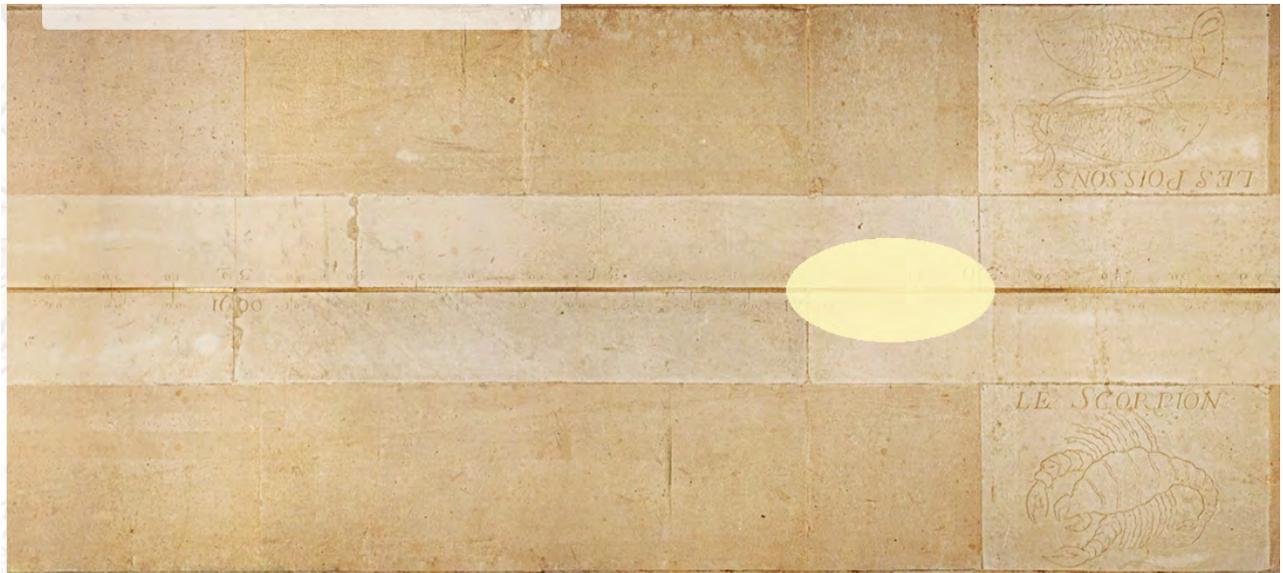
2012-8-21 : Heure du passage au méridien : 11:53:40.9 UTC; Hauteur du soleil : 53.06 °; Position de l'ellipse : 7.48 m; Grand axe de l'ellipse : 145 mm; Petit axe de l'ellipse : 116 mm



2012-9-21 : Heure du passage au méridien : 11:43:34.3 UTC; Hauteur du soleil : 41.62 °; Position de l'ellipse : 11.19 m; Grand axe de l'ellipse : 210 mm; Petit axe de l'ellipse : 139 mm



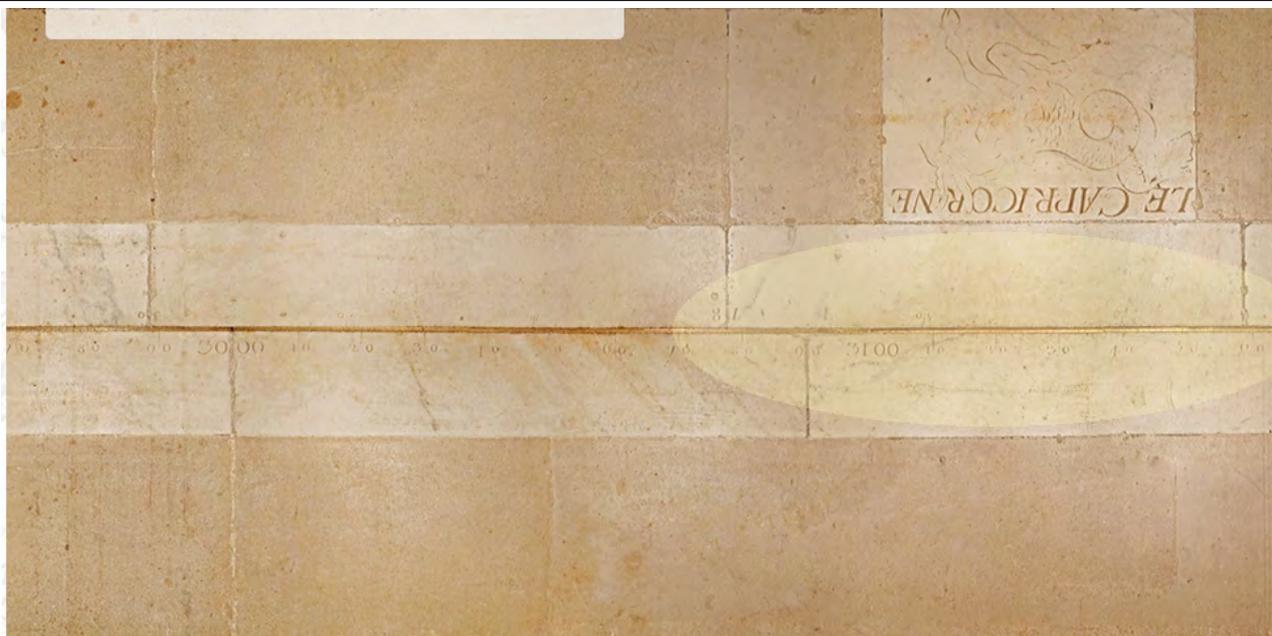
2012-10-21 : Heure du passage au méridien : 11:35:13.2 UTC; Hauteur du soleil : 30.26 °; Position de l'ellipse : 17.04 m; Grand axe de l'ellipse : 364 mm; Petit axe de l'ellipse : 184 mm



2012-11-21 : Heure du passage au méridien : 11:36:38.0 UTC; Hauteur du soleil : 21.15 °; Position de l'ellipse : 25.7 m; Grand axe de l'ellipse : 711 mm; Petit axe de l'ellipse : 256 mm



2012-12-21 : Heure du passage au méridien : 11:48:57.0 UTC; Hauteur du soleil : 17.78 °; Position de l'ellipse : 31 m; Grand axe de l'ellipse : 993 mm; Petit axe de l'ellipse : 303 mm



Valeurs aux plages extrêmes de l'outil de simulation

° 1951-12-21 :

Heure du passage au méridien : 11:48:27.8 UTC; Hauteur du soleil : 17.77 °; Position de l'ellipse : 31.02 m; Grand axe de l'ellipse : 994 mm; Petit axe de l'ellipse : 303 mm

° 2024-12-21 :

Heure du passage au méridien : 11:48:56.2 UTC; Hauteur du soleil : 17.77 °; Position de l'ellipse : 31.01 m; Grand axe de l'ellipse : 993 mm; Petit axe de l'ellipse : 303 mm

[Complément d'informations sur le site](#)

Cohérence des valeurs

Les valeurs données par le site de l'IMCCE sont-elles cohérentes avec les formules des articles de Denis Savoie et de Marc Goutaudier ? (et réciproquement !!!!). Voici la réponse de D. Savoie.

« Bien que les paramètres utilisés pour les calculs ne soient pas précisés* pour la simulation de l'IMCCE, comme : le diamètre de l'œilleton (85mm comme indiqué autre part), hauteur (9,9377 m), prise en compte de la variation du diamètre apparent du soleil ? J'ai supposé que l'œilleton était à 993,77 cm de haut et que son diamètre était de 0,85 cm. J'obtiens quasiment les mêmes valeurs que l'Observatoire avec mes formules. Donc mon formulaire fonctionne. Mon collègue Marc Goutaudier trouve quasiment comme moi (il utilise pov-ray). ».

* Contacté (3/5/2012), P. Descamp auteur de la simulation, a pris comme diamètre de l'œilleton le millième de la hauteur et n'a pas tenu compte de la variation du diamètre solaire... Il envisage de modifier sa simulation pour en tenir compte.





Photos et œilletons

Serge Grégori et Philippe Sauvageot

On pourrait croire que l'œilleton d'un cadran solaire ou d'une méridienne, se limite à un simple trou circulaire dans un disque métallique. L'imagination et l'art du cadranier en a voulu autrement. Voici quelques photographies remarquables pour leur beauté ou pour leur originalité.

Traditionnellement l'œilleton qui va projeter sa tache lumineuse sur la table du cadran ou de la méridienne est composé de trois éléments : le support, le disque, le trou proprement dit.

- Le support

Il peut être constitué par le style polaire lui-même. Le disque est alors fixé dans son axe soit à l'extrémité (figure 1), soit à une position intermédiaire parfaitement définie, en relation avec le tracé du cadran (figure 2).

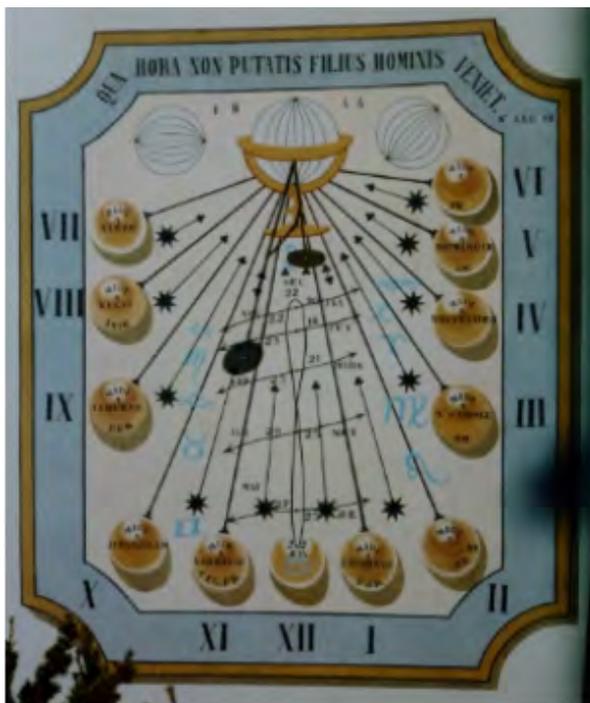


Fig. 1 : Cadran à Samoëns (photo Ph. Sauvageot)

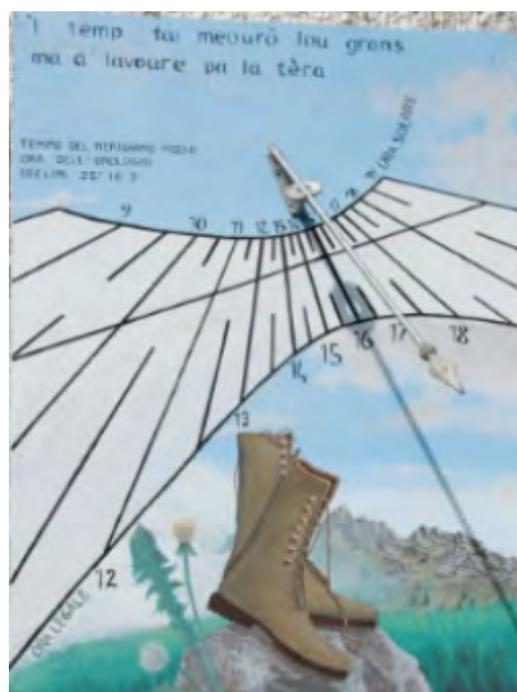


Fig. 2 : Cadran à Usseaux (photo S. Grégori)

Il peut être constitué également de « jambes ». Les méridiennes industrielles du XIX^e siècle présentés dans un autre article de ce *Cadran Info* sont un exemple du type « unijambiste ». La tige peut être droite (figure 3), en col de cygne ou de forme libre (figure 4).

Les deux jambes sont plus rares (figure 5). Par contre la solution « tripode » est classique pour les méridiennes (figure 6).

Pour les supports particulièrement ouvragé, on ne peut plus parler de jambe, mais de console, parfois véritable œuvre d'art (fig. 7).

Dans toutes ces configurations, quelque soit la forme du support, celui-ci a pour rôle de positionner le centre du trou du disque au point d'intersection de l'extrémité du style droit et celui du style polaire, tous les deux fictifs dans cette configuration (voir schémas 8 et 9).



Fig. 3 : Eglise de Barr (photo P. Juillot)

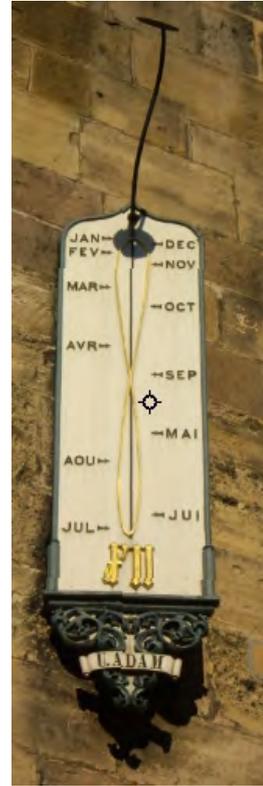


Fig. 4 : Colmar, St Martin (photo P. Juillot)

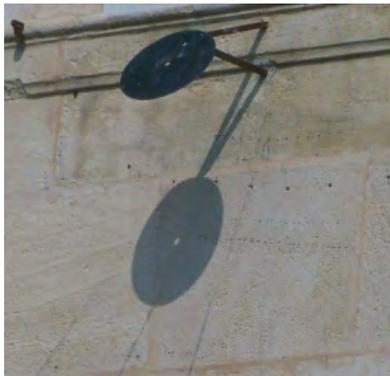


Fig. 5 : 2 Jambes à Burrie (photo S. Grégori)

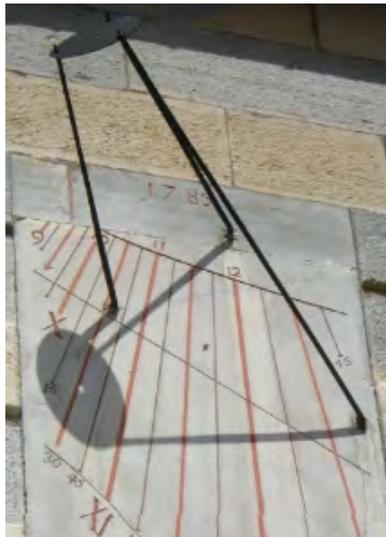
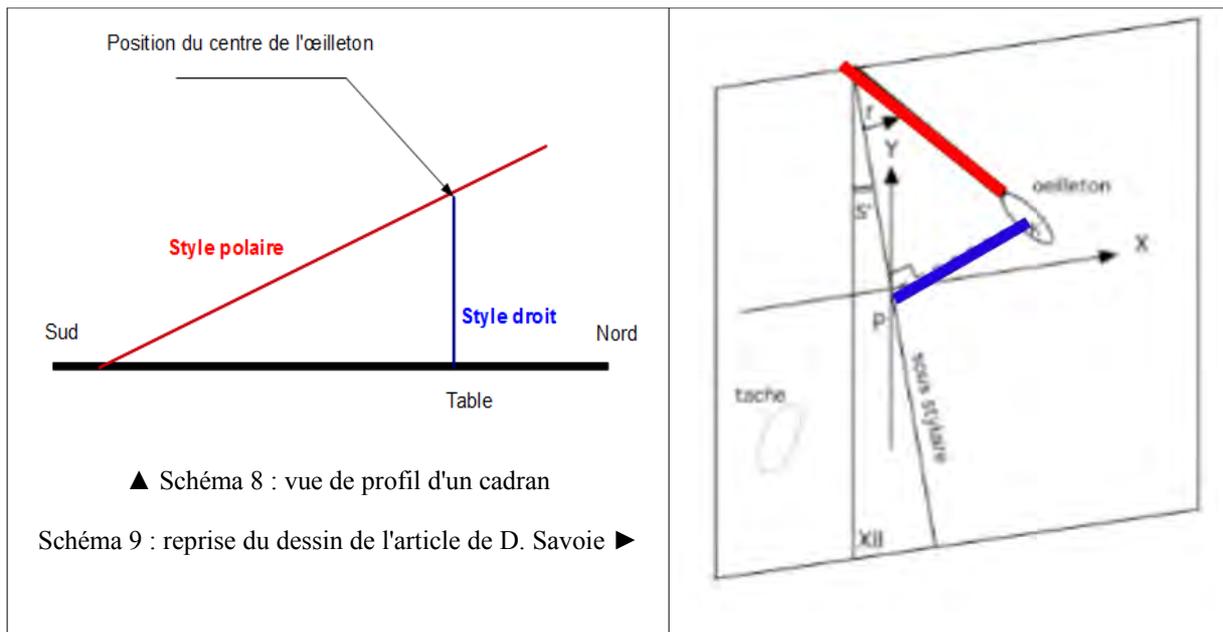


Fig. 6 Tripode sur hôtel de ville à Besançon (photo P. Juillot)



Fig. 7 : Cadran à Matha (photo S. Grégori)



- Le disque

Le disque, plaque percée de l'œilleton, a pour fonction de projeter une ombre autour de la tache lumineuse afin d'en faire ressortir l'éclat. Il ne s'agit pas toujours d'un disque. Cette pièce peut avoir la forme d'une flèche avec un trou, d'une étoile (fig. 10), d'un triangle, d'un carré, d'un polygone (fig. 11), d'un soleil (fig. 12)...



Fig 10 : Cadran de Cravagliana à Saliceto, Italie (photo S. Grégori)



Fig 11 : Cadran à Avignon (photo S. Grégori)

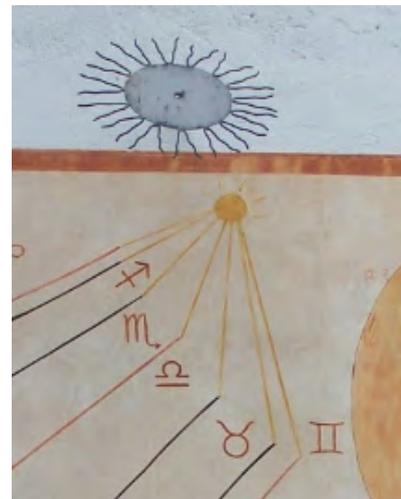


Fig 12 : Cadran à Magliano-Alpi, Italie (photo S. Grégori)

Il peut être plan ou bombé.

Pour les cadrans ou les méridiennes sophistiqués, il peut être ouvragé, comme les deux disques en place sur les méridiennes de la porte principale de la cour des Invalides à Paris (fig. 13).



Fig. 13 : Cadrans dans la cour des Invalides à Paris (photo Ph. Sauvageot)

- le trou ou œilleton

Là, on s'attendrait à un simple trou circulaire, mais les cadraniers nous surprennent toujours. Afin d'améliorer la netteté de la tache lumineuse ou le moyen d'indiquer le plus précisément l'instant (heure) ou l'information (temps moyen, déclinaison, hauteur, azimut...), nous trouvons, des œilletons :

- ° munis d'un second disque pivotant, lui-même percé d'un trou plus petit permettant de disposer de deux diamètres différents pour obtenir une plus grande précision de la tache lumineuse suivant l'époque

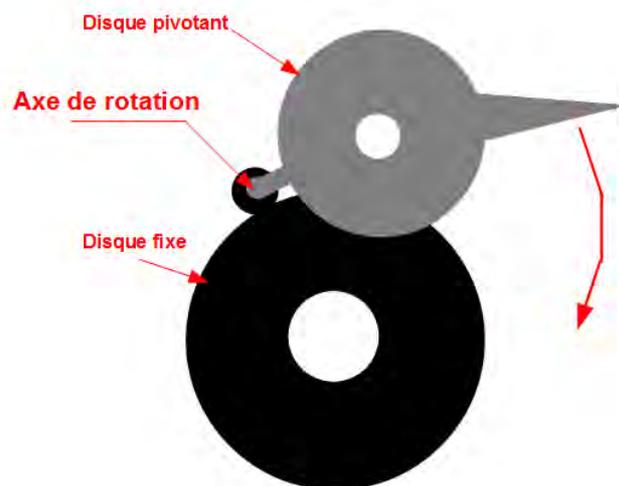


Schéma 14

de l'année. Le schéma de principe est présenté ci-dessus, figure 14, et une photo de ce type d'œilleton est donnée figure 15.

- ° percés de deux (figure 16), trois ou quatre trous (figure 17).
- ° en forme de croix...



◀ Fig. 15 : le cadran d'Angervillier « restauré »

Je me souvenais qu'il existait un cadran à double œilleton dans la rue principale d'Angervilliers (91). Hélas, un cadranier amateur a utilisé le trou des deux œilletons pour les... boulonner ensemble, supprimant ainsi la fonction d'œilleton pivotant et d'œilleton tout simplement. Bravo à cet artiste.

Fig 17 : Disque à quatre trous du cadran de la Sorbone à Paris (Photo P. Juilliot ▼)

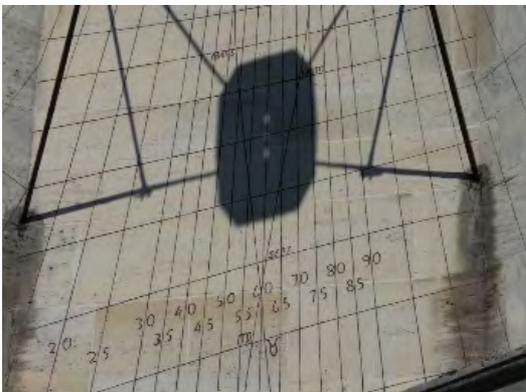
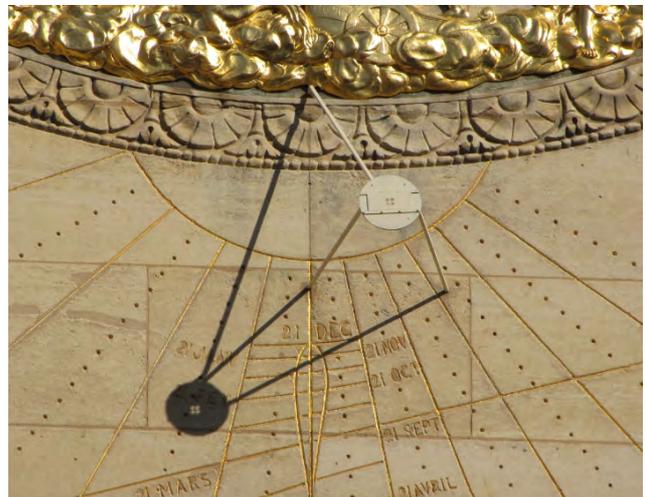


Fig 16 : Ombre portée par la plaque percée de deux trous de la méridienne de l'Hôtel-Dieu-le-Comte à Troyes (Photo : G. Garino)

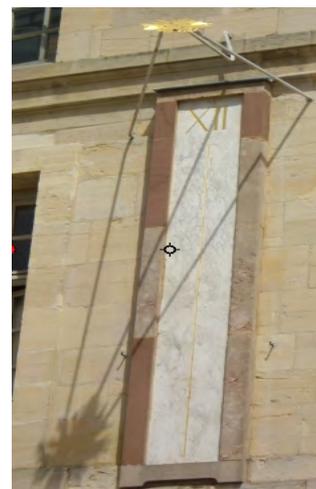


- Pêle-mêle photos de Pierre Juillot (sélection S. Grégori)



▲ Disque sur style polaire, cadran à Achem Saint Ursula

Œilleton tripode à Dijon ►





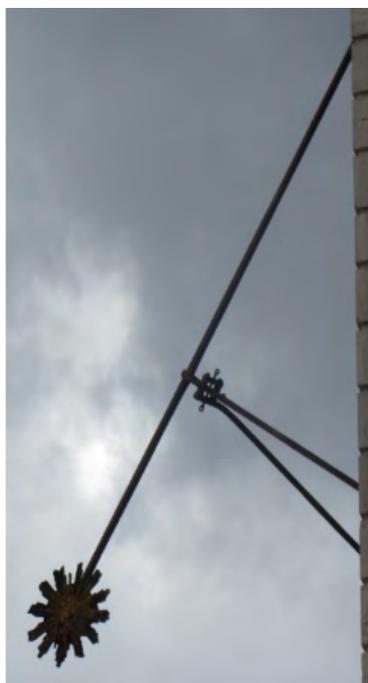
Disque circulaire à l'extrémité d'une tige sur méridienne de temps vrai, église à Marlenheim



Au centre d'activité scientifique et technique du parc du PRE LA ROSE à Montbéliard : méridienne de temps moyen local appelée « Le Vaisseau 2000 », inclinée, la table est concave, l'ocillon est une lentille.



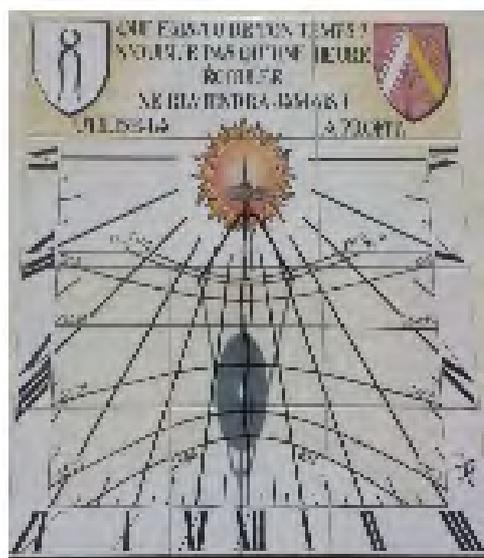
Disque en forme d'étoile sur méridienne à Mundolsheim



Disque en forme de fleur sur méridienne, rue Gambetta à Nancy

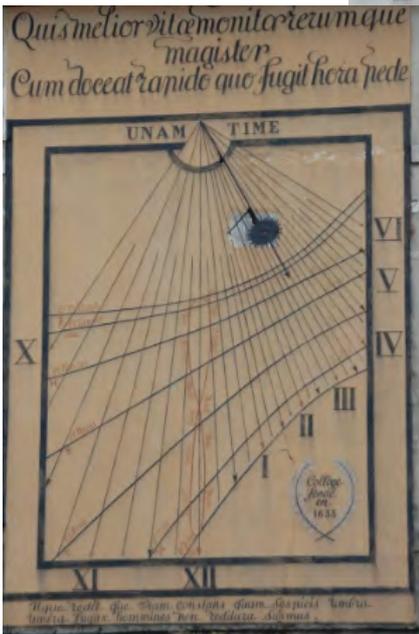
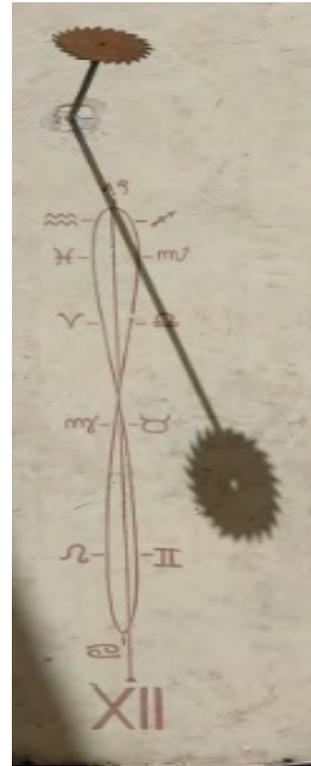


Disque à l'extrémité d'une simple tige à Vittel



De gauche à droite et de haut en bas : Disque sur style polaire renforcé par deux jambes, église de Pfttshheim –
 Disque à l'extrémité du style polaire sur l'hôtel de ville de Wissembourg - Disque à l'extrémité du style polaire
 sur une place à Wissembourg –
 Deux photos en bas : Disque ouvert sur la méridienne du palais des duc à Dijon

- Pêle-mêle photos de S. Grégori



De gauche à droite et de haut en bas : Disque à l'extrémité du style polaire à Rioms – Disque avec support ouvragé à Givry – Disque à dents à l'extrémité d'une tige à Mormoiron – Disque sur style polaire à Noyers – Disque en étoile, Cravagliana VC à Saliceto – Double style dont celui de la méridienne, avec disque à dents à Montforte-d'Alba – Disque en étoile sur style polaire à Trinita.



Sur cadrans très déclinants, De gauche à droite et de haut en bas : œilleton carré sur cadran à Saint-Martin de Boscheville – Disque en étoile à Sizzano NO, casa Zopi – Disque à dents à Vicoforte

- de Maurice Vercasson



Sur son balcon ,une méridienne:

- Cadre 200 x 177 mm
- Distances à l'œilleton :
 - Solstice d'été : 195 mm
 - Solstice d'hiver : 211 mm
 - Equinoxes : 267 mm
- Diamètre de l'œilleton : 1,3 mm



