CADRAN-INFO

Sommaire du N° 1

Du style à sa fixation.	Ansel J M.
 Calcul de l'inclinaison, déclinaison et latitude d'un cadran en fonction de ses lignes horaires. 	Boussonville M.
 Méthode de détermination de la déclinaison gnomonique. 	Collin D.
 Alcune formule per la ricerca della posizionz e della lunghezza stillo in orologi solari da restaurare. 	Ferrari G.
 Un metodo per l'orietamento di un piano orizzontale in condizioni particolari. 	Ferrari G.
 Un orologio solare a piu aste. 	Ferrari G.
Appunti per uno studio delle meridiane islamiche.	Ferrari G. et Severino N.
L'Art et la manière de ZARBULA.	Gagnaire P.
Etude théorique du "gnomon inadapté".	Pakhomoff J.
 Théorie et pratique des cadrans analemmatiques circulaires de Foster et Lambert. 	Pakhomoff J.
Les cadrans solaires anciens d'Aunis et de Saintonge.	Vialle J.

CADRAN-INFO

est un moyen de diffusion d'articles gnomoniques rédigés principalement par les membres de la "commissions des cadrans solaires" et destinés essentiellement à ceux-ci.

Il vient en complément des publications de la SAF: "L'Astronomie" et "Observation & travaux" qui présentent épisodiquement des sujets concernant les cadrans solaires

<u>CADRAN-INFO</u> est une formule simple et flexible qui regroupe les articles reçus, sans mise en forme, sans contrainte d'impression.

Il est adressé à l'ensemble des membres de la commission chaque fois que le nombre de sujets reçus le justifie.

Remarques:

- ◆ Les articles sont présentés par ordre alphabétique des auteurs. Le contenu est sous leur responsabilité.
- ◆ Les articles sont à envoyer à Ph. Sauvageot (si possible directement à son domicile) sous forme papier ou disquette PC (logiciel Word ou Excel). Certains sujets pourront être repris dans une parution ultérieure de "L'Astronomie" ou "Observations & Travaux".
- ♦ Les personnes qui souhaiteraient que leurs articles soient réservés exclusivement aux revues "L'Astronomie" ou "Observations & Travaux" devront le préciser dans leurs envois.
- ♦ Toute reproduction totale ou partielle des présents articles ne peut se faire qu'avec l'accord des auteurs.

Ph. Sauvageot

Vice-Président de la Commission des cadrans Solaires

DU STYLE A LA FIXATION

La plupart des styles «plantés » apportent un défaut de construction dans la zone immédiatement supérieure à l'implant (f.1) Le support (mur) y est plus fin, donc fragile. Solution : modifier la fixation.

<u>Cas général</u>: «(f.2) la zone de fixation peut recevoir une embase ou empattement décoratif quelconque. Il est alors facile de cheviller cette plaque au bon endroit, le style pouvant être fixé à celle-ci de plusieurs façons.

a) Sur une articulation, la pose et le réglage à l'aide de gabarits seront grandement facilités (angle et rotation), particulièrement dans le cas d'un style de grande dimension (f.3).

Il faudra de plus, assurer et garantir la situation avec la pose d'un chevalet (f.4).

b) Si le style n'est pas très grand, il pourra être vissé ou soudé à l'embase du support. Une seule «jambe » suffit à garantir la durabilité de la situation.

c) Pour les endroits très sollicités, il faudra opter pour un style très épais en rapport avec l'agression éventuelle ; un profilé de laiton 15 x 25 mm par exemple (Connerré). Il faut pouvoir escalader le cadran sans l'endommager, il est alors parfois difficile de concilier «élégance et solidité... (Genk).

<u>Deuxième cas (restauration)</u>: rien de la fixation ne doit paraître, le style doit sembler «planté » (f.5).

a) dessiner la surface ou sera situé le style.

b) dessiner l'axe du style à la bonne valeur angulaire.

c) dessiner les cotés externes du barreau utilisé pour le style.

Le style «brut » sera «forgé » à chaud pour obtenir l'angle mur/style + 90°, de manière à ce que la partie servant à la fixation soit bien perpendiculaire au plan du mur (d)

Une équerre pour rapporter l'angle sur le métal chaud, peut être fabriquée à l'aide d'une chute de «fer blanc » (boite à conserve démontée).

On prépare ensuite un barreau d'une section d'environ trois fois celle du style. Ce barreau sera percé en son centre d'un trou de diamètre légèrement supérieur à celui du style ; sa partie extérieure sera rainurée grossièrement pour augmenter la liaison au mortier de fixation (e, f) C'est le dessin qui déterminera la distance «x » de cette «cheville » par rapport au centre mathématique du cadran. Il faudra donc s'appliquer à bien situé cette cheville. Le style pourra alors être inséré et collé (polyester ou à l'époxy).

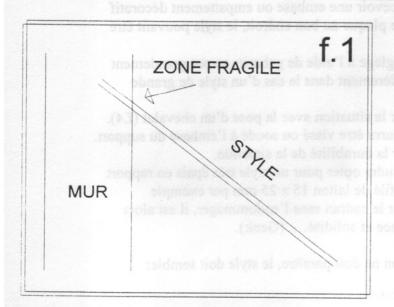
Matériaux:

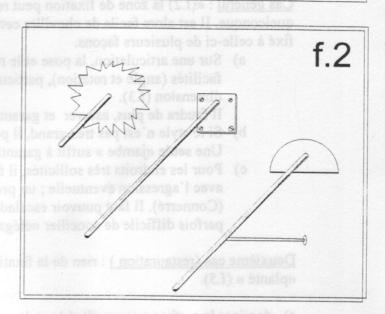
Très souvent métallique, le style peut être d'acier inoxydable : c'est clinquant, solide et contemporain. On peut lui donner un aspect «vieux-fer » par un traitement thermique. Fait de laiton (qualité BL2), il aura une très belle patine brune le faisant ressembler au fer oxydé. Le fer devra être le plus souvent proscrit, car il laisse des traces d'oxydation sur le support. Ces coulures sont souvent indélébiles.

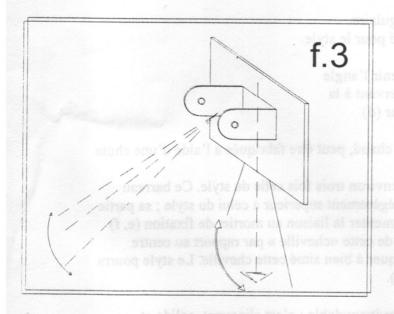
Jean Michel Ansel S.A.F. octobre 99

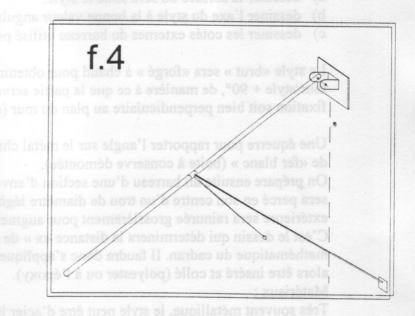
du style à la fixation

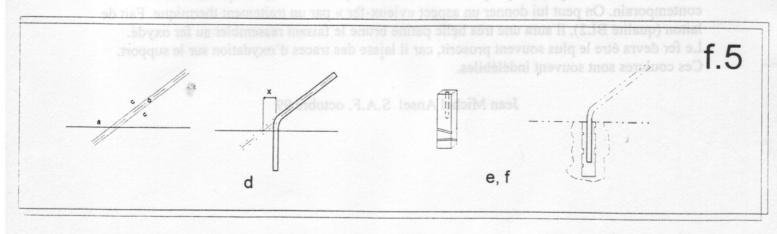
noting at settibout another setting book all and tes v (num) I Jean Michel Ansel











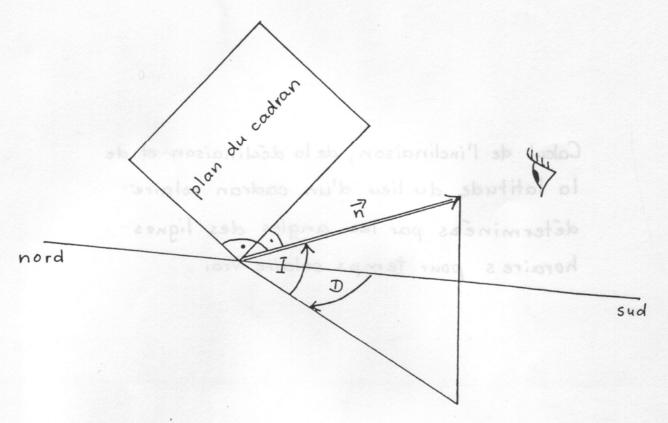
Calcul de l'inclinaison, de la déclinaison et de la latitude du lieu d'un cadran solaire déterminées par les angles des lignes horaires pour temps solaire vrai.

w = l'angle entre la ligne horaire et la ligne de la plus

grande pente

Définitions:

Soit is un vecteur orthogonal au cadran et orienté vers l'observateur.



On désigne inclinaison I du cadran la hauteur de \vec{n} (-90° $\leq I \leq$ 90°).

On désigne déclinaison D du cadran l'azimut de n (-180° < D < 180°).

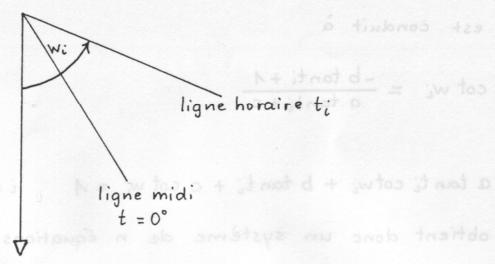
Par exemple: pour un cadran vertical plein sud on a $I = 0^{\circ}$ et $D = 0^{\circ}$.

Et encore

φ = la latitude du lieu (-90° ≤ φ ≤ 90°)

t = l'angle horaire du soleil = 15° (TSV-12)

w = l'angle entre la ligne horaire et la ligne de la plus grande pente



grande pente

Avec ces désignations on a

$$tan w_i = \frac{(\cos I \cos \phi - \sin I \sin \phi \cos D) \sin t_i + \sin I \sin D \cos t_i}{\sin \phi \sin D \sin t_i + \cos D \cos t_i}$$

Cette formule ne sera pas démontré ici.

Le problème à résondre est le calcul de I,D et ϕ à l'aide des points de mesure (t_i,w_i) , i=1,2,... n > 3

Suite
$$tan w_i = \frac{\left(\frac{\cos I \cos \phi}{\cos D} - \sin I \sin \phi\right) \tan t_i + \sin I \tan D}{\sin \phi \tan D \tan t_i + 1}$$

Par la substitution

$$\frac{\cos I \cos \phi}{\cos D} - \sin I \sin \phi = a$$

$$\sin \phi \tan D = -b$$

$$\sin I \tan D = c$$

on est conduit à

$$\cot w_i = \frac{-b \tanh i + 1}{a \tanh i + c}$$

04

a tanti cotwi + b tanti + c cot wi = 1 i = 1,2,... n

On obtient donc un système de n équations linéaires pour déterminer a, b et c. Si n 73, on utilise un calcul d'ajustement, p. ex. la méthode des moindres carrés.

Si le cadran est vertical on a dès le début c = 0 et on n'a qu'à déterminer a et b. Dans ce cas, on peut résoudre le système linéaire par un graphique. Comme les équations linéaires peuvent s'écrire également sous la forme cotti = a cotwith, on trace une droite d'ajustement par les points (cotwi, cotti) pour en déduire a et b.

Apartir de a, b et c, on calcule I, D et ϕ de la manière suivante:

Ona

$$\pm \sqrt{\tan^2 D + 1} \sqrt{1 - \sin^2 I} \sqrt{1 - \sin^2 \phi} - \sin I \sin \phi = \alpha$$

$$\pm \sqrt{\tan^2 D + 1} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\tan^2 D}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{\tan^2 D}} + \frac{bc}{\tan^2 D} = \alpha$$

Avec $\tan^2 D = x$ (à condition que $x \neq 0$) on trouve $\pm \sqrt{x+1} \sqrt{x-c^2} \sqrt{x-b^2} = ax -bc$

Elevons au carré et regroupons:

$$x^{2} + (1 - a^{2} - b^{2} - c^{2})x + (a + bc)^{2} - a^{2} - b^{2} - c^{2} = 0$$

On pose en plus $x = y - 1$ ce qui donne

 $y^{2} - (1 + a^{2} + b^{2} + c^{2})y + (a + bc)^{2} = 0$

où $y = \tan^{2} D + 1 = \frac{1}{\cos^{2} D}$

La discriminante \(\Delta \) de cette equation du second degré est

$$\Delta = (1+a^2+b^2+c^2)^2 - 4(a+bc)^2$$

$$= [(a+1)^2 + (b+c)^2][(a-1)^2 + (b-c)^2] \ge 0$$

Donc il existe deux solutions réelles qui, d'après Viète, sont non négatives.

L'une est

$$y = \frac{1}{2} \left(1 + a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{\Delta} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sqrt{(a+1)^2 + (b+c)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b-c)^2} \right)^2$$

L'autre (même expression avec le signe « - » entre les racines) n'est pas en relation directe avec notre problème.

Pour déterminer I, D et d à partir de a, b et c on a donc les relations suivantes:

$$\cos D = \frac{\pm 2}{\sqrt{(a+1)^{2} + (b+c)^{2}} + \sqrt{(a-1)^{2} + (b-c)^{2}}}$$

$$\sin \phi = \frac{-b}{\tan D}$$

$$\sin \underline{I} = \frac{3(cd+b) + \sqrt{(3c+6d+8c+K) - 3}}{\tan D}$$

En général, on obtient quatre solutions dont il faut trouver celle qui est cherchée.

Le calcul susdit n'est pas applicable dans les cas suivants:

5(20+6+6+6+6+6+6)= A

- 1. Si $D=0^{\circ}$ ou 180° , on a tanw; = $\cos(I\pm\phi)$ tant; . Il y a une infinité de solutions avec une somme $I\pm\phi$ donnée et définie par $\cos(I\pm\phi)$ = valeur moyenne des tanw; $\cot t$.
- 2. Pour $D = \pm 90^{\circ}$ et $I \neq 0^{\circ}$, $\phi \neq 0^{\circ}$, on trouve $tanw_i = \frac{\cos I \cos \phi \sin t_i \pm \sin I \cos t_i}{\pm \sin \phi \sin t_i}$

$$\frac{\sin \phi}{\cos I \cos \phi} \tan w_i - \frac{\sin I}{\cos I \cos \phi} \cot t_i = \pm 1$$

Par la substitution

$$\frac{\sin \phi}{\cos \overline{1} \cos \phi} = a \qquad \frac{-\sin \overline{1}}{\cos \overline{1} \cos \phi} = b$$

l'on est conduit à un système d'équations linéaires pour déterminer a et b.

a tanwi + b cotti =
$$\pm 1$$
 $i = 1, 2, ... n$

Ensuite on calcule I et .

Avec

$$\frac{a}{b} = -\frac{\sin \phi}{\sin I} , \quad ab = -\frac{\sin \phi \sin I}{\cos^2 I \cos^2 \phi}$$

$$ab = -\frac{\sin \phi \sin I}{(1-\sin^2 I)(1-\sin^2 \phi)}$$

$$ab\left(1-\sin^2\Gamma\right)\left(1-\frac{a^2}{b^2}\sin^2\Gamma\right)=\frac{a}{b}\sin^2\Gamma$$

Par $\sin^2 I = x$ l'on est conduit à

$$a^2x^2 - (1+a^2+b^2)x + b^2 = 0$$
 $(a,b \neq 0)$

La discriminante A de cette équation du second degré est mos de solo al A

$$\Delta = (1 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$= [(a+b)^2 + 1][(a-b)^2 + 1] > 0$$

Donc il existe deux solutions positives.

vane est
$$x = \frac{1}{2a^{2}} \left(1 + a^{2} + b^{2} - \sqrt{1} \right)$$

$$= \frac{1}{4a^{2}} \left(\sqrt{(a+b)^{2} + 1} - \sqrt{(a-b)^{2} + 1} \right)^{2}$$

L'autre est supérieure à 1 et peut être sautée.

Pour la détermination de I et d à partir de a et b on a donc les relations suivantes:

$$\sin I = \pm \frac{1}{2a} \left(\sqrt{(a+b)^2 + 1} - \sqrt{(a-b)^2 + 1} \right)$$

$$\sin \phi = -\frac{a}{b} \sin \Gamma$$

3. Si on a cosIcos & cosD - sinIsin & = 0, ce qui est équivalent à a + bc = 0, la formule qui donne les wi en fonction des ti est une fonction constante, tous les wi sont égaux. La cause en est que le style, parallèle à l'axe de la terre, se situe dans le plan du cadran.

A la place du cadran usuel avec les angles wi on a le cadran polaire avec les distances xi des lignes horaires à la sous-stylaire. On a

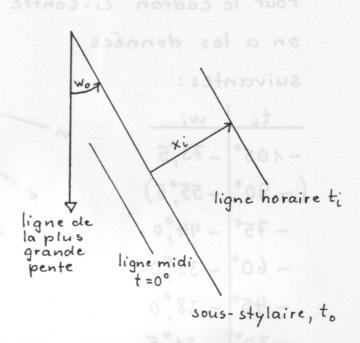
xi = g tan (ti -to)

où g est la distance

du style au cadran

et to l'angle horaire

pour la sous
stylaire.



On mesure l'angle wo entre les lignes horaires et la ligne de la plus grande pente et les xi et on calcule

to = valeur moyenne de tous les ti-arctan xi La distance g doit être donnée.

Avec to et wo on trouve I, D et \$\phi\$ à l'aide des relations suivantes:

$$tan I = \frac{sin w_0}{tan t_0}$$

$$cos D = cos w_0 cos t_0$$

$$tan \phi = \frac{sin t_0}{tan w_0}$$

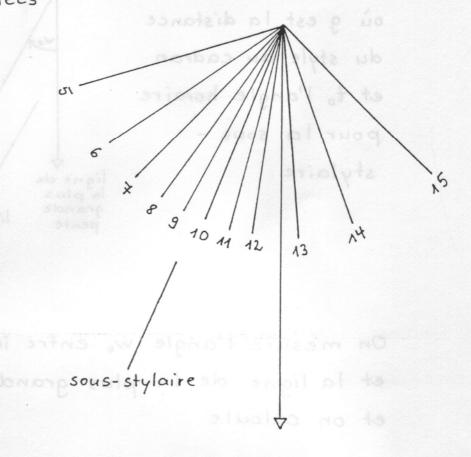
Exemple

Pour le cadran ci-contre

on a les données

suivantes:

_ ti	wi
-105°	-73°5
(-90°	-55°5)
- 75°	- 44°,0
- 60°	- 35,0
- 45°	- 28,0
- 30°	- 21°5
-15°	-14,5
0°	- 6,0
+15°	+ 4,5
+ 30°	+ 20°,5
+ 45°	+ 45°,5



On a donc un système de dix équations linéaires. L'ajustement

par la méthode des moindres carrés conduit à

$$b = 0,453352$$

$$c = -0,107911$$

On en déduit les quatre solutions

$$D_1 = 31,82$$
 $\Phi_1 = -46,93$ $I_1 = -10,01$

$$D_4 = 148^{\circ}/18$$
 $\Phi_4 = 46^{\circ}/93$ $I_4 = 10^{\circ}/01$

$$D_2 = -148^{\circ}, 18$$
 $\Phi_2 = -46^{\circ}, 93$ $I_2 = -10^{\circ}, 01$

$$D_3 = -31^{\circ}82$$
 $\phi_3 = 46^{\circ}93$ $I_3 = 10^{\circ}01$

$$I_1 = -10,01$$

Les deuxième et quatrième solutions ne sont pas de vraies solutions.

On peut compléter la détermination de I, D et ¢ par un calcul d'erreurs.

Comme erreurs moyennes de I, D et o on trouve

$$\Delta I = 0,17$$

$$\Delta D = 0,24$$

$$\Delta \Phi = 0^{\circ}_{1}34$$

Résultat final pour l'hémisphère boréal;

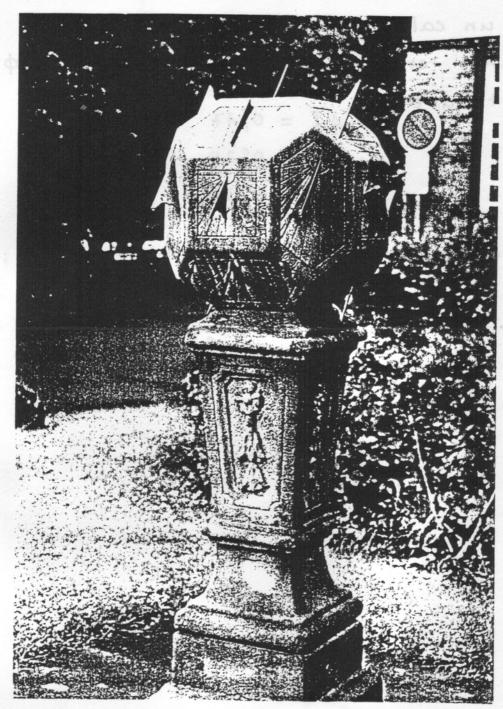
$$I = 10,0 \pm 0,2$$

$$D = -31,8 \pm 0,3$$

$$\phi = 46^{\circ}, 9 \pm 0^{\circ}, 4$$

es deuxième et quatrième solutions ne sont pos de vraies solutions.

On peut compléter la détermination de I. D et d



SUR UNE MÉTHODE DE DÉTERMINATION DE LA DÉCLINAISON GNOMONIQUE

Dominique COLLIN

T.R. Maths – Sciences Physiques Lycée Professionnel du Détroit 62 107 -- Calais. Émail : dcollin@hotmail.com

Site web: http://www.multimania.com/gnomonic/

Résumé

La construction du cadran solaire vertical déclinant du Collège République à Calais a fait l'objet de plusieurs études à la fois théoriques et pratiques qui ont aboutit à sa construction qui s'est achevée le 02 juillet 1999. Il a été mené à cette occasion une étude sur la déclinaison gnomonique, paramètre qui s'avère indispensable dès que l'on s'intéresse aux plans verticaux ou inclinés.

On présente tout d'abord au paragraphe 1 une introduction posant la définition générale de cet angle, puis une liste des méthodes de détermination de la déclinaison. Le paragraphe 2 expose en détail la méthode de la planchette, méthode retenue pour mesurer l'orientation du mur du Collège. Le paragraphe 3 concerne l'étude des erreurs de mesures. On donnera par-là même une idée sur la résolution angulaire théorique de cette méthode. Comme pour toute série de mesures une étude statistique doit être menée afin de compenser la dispersion des mesures autour d'une valeur moyenne. C'est l'objet du paragraphe 4.

Pour les exemples numériques, on s'est aidé du jeu des 47 mesures effectuées entre mars et novembre 1996.

1. Introduction

1.1 Définition de la déclinaison gnomonique

Avant de présenter la méthode de mesure et son étude détaillée, faisons le point sur cet angle et proposons-nous de le définir complètement. On le présentera de deux façons : l'une par la trigonométrie sphérique (donc sur la sphère), l'autre dans le plan de l'horizon et se prêtant donc à sa mesure (méthode géométrique).

1.1.1 La déclinaison d'un plan vertical

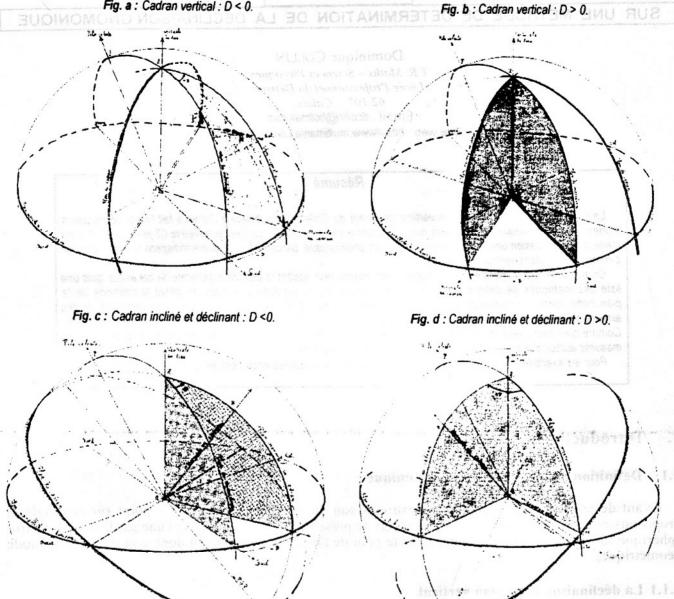
"La déclinaison d'un plan vertical est un angle orienté, mesuré depuis le sud vers l'ouest entre la direction du méridien et la demi-droite perpendiculaire au plan vertical".

En d'autres termes, la déclinaison d'un plan vertical n'est pas autre chose que l'azimut de la direction perpendiculaire à ce plan. Le signe de l'angle permet de connaître directement quelle est la face du plan qui est exposé et prêt à recevoir les gravures.

La mesure de cet angle, désignée généralement par la lettre D, est exprimée souvent à l'aide de sa mesure principale qui est telle que :

the range was farmous trades of the decision of
$$D \in]-180;+180]$$

On donne dans les figures a et b les configurations géométriques possibles de la déclinaison pour un plan vertical.



1.1.2 La déclinaison d'un plan incliné

Précédemment, la déclinaison était vue comme étant un angle défini dans le plan de l'horizon. Or pour un plan d'orientation quelconque, la normale n'est plus dans ce plan, et puisque c'est le plan de l'horizon qui nous servira à déterminer la mesure de D, il faut rechercher une forme voisine du cas

Dans le cas des figures a et b, on voit en fait que la déclinaison n'est pas autre chose que l'angle entre deux plans particuliers (ceux qui ont étés grisés) : le plan du méridien et le plan normal au plan du cadran. Donc vue sur la sphère, la déclinaison gnomonique aura pour définition générale (voir figures c et d):

"La déclinaison d'un plan d'orientation et d'inclinaison quelconque est l'angle dièdre formé par le plan du méridien et le plan normal au plan du cadran".

Les figures c et d permettent d'envisager une définition pratique. Pour exploiter la déclinaison dans le plan de l'horizon, on peut énoncer de façon équivalente, "qu'il s'agit d'un angle orienté mesuré depuis le sud vers l'ouest, entre la direction du méridien et la demi-droite perpendiculaire à la trace du cadran incliné sur le plan horizontal".

Les deux façons de considérer cet angle sont explicitées dans la figure c pour D<0 et la figure d pour D>0.

1.2 Les méthodes de mesure

L'existence de nombreuses méthodes de mesure met bien en évidence le caractère fondamental de ce

paramètre pour la gnomonique.

Les méthodes de détermination de la déclinaison gnomonique peuvent être classées en deux catégories. On distingue les méthodes qui utilisent des points d'ombre, de celles qui utilisent la direction de l'ombre.

Le classement proposé est le suivant :

- par des relevés de points d'ombre :

- · méthode du faux style1
- méthode analytique²

- par des relevés de la direction de l'ombre :

- méthode de la méridienne horizontale et ses dérivés³
- · méthode des azimuts
- méthode de la planchette (deux variantes)⁴

Il existe d'autres méthodes qui n'utilisent pas directement l'ombre d'un gnomon, c'est par exemple le cas de la boussole. Sa précision, selon le soin que l'on s'efforcera de donner, ne fournira comme chiffre significatif que le chiffre des dixièmes (compas de relèvement). La méthode que l'on va étudier et "pousser" jusqu'au bout, permettra de gagner une décimale, le chiffre des centièmes de degré.

1.3 Le choix de la méthode

On n'a pas pu expérimenter tous ces procédés dans le cas du "mur" du Collège République. Aussi, notre choix a été de suivre la méthode préconisée dans l'article de R. Sagot paru dans "L'Astronomie", bulletin de la Société Astronomique de France -- février 1988. Cette méthode porte le nom de "méthode de la planchette".

On a mis en œuvre cette méthode, rencontré des difficultés qui toutes ont étés résolues, tenté de rendre plus rigoureux et méthodique la saisie des mesures par la construction de grilles de mesures, d'un tableau récapitulatif de toutes les configurations des ombres par rapport à la normale au mur et au méridien, ensuite de modéliser les erreurs de mesures afin d'avoir un ordre de grandeur de la précision de cette méthode et enfin appliquer une statistique à l'ensemble des mesures.

C'est cette étude que l'on résume dans ce qui suit.

2. La méthode de la planchette

2.1 Le principe général

Cette méthode consiste à relever sur un plan horizontal la direction de la projection de l'ombre d'un fil à plomb. La mesure de cette direction combinée avec celle du soleil au même instant fournira la valeur de la déclinaison. Précisons qu'il n'est nul besoin de déterminer de méridienne pour obtenir l'azimut du soleil ou la déclinaison du mur. Pour l'azimut du soleil, c'est le calcul qui nous fournira sa valeur à tout instant désiré.

La position de l'ombre prise par rapport à la perpendiculaire au mur, donnera accès au signe de la déclinaison et à la formule à utiliser (voir tableau 1, §2.3.4, pour toutes les configurations possibles des ombres du fil à plomb ainsi que les formules correspondantes). Ceci sera nécessaire et suffisant pour déterminer la nature déclinante du cadran. On aura alors la mesure algébrique de l'angle orienté qu'est la déclinaison.

Pour obtenir une valeur plus précise on répétera un certain nombre de fois l'expérience au voisinage

d'une même heure à une date donnée, puis sur plusieurs dates à intervalles suffisants.

La valeur moyenne calculée sera considérée comme un estimateur⁵ de la valeur vraie recherchée, de même que l'écart type du jeu complet des mesures sera considéré comme caractérisant la dispersion des mesures autour de l'estimateur. L'intervalle de confiance (à 95% par exemple) permettra d'obtenir un encadrement de la valeur moyenne dans l'hypothèse ou les erreurs de mesures obéissent à une loi normale (gaussienne) et sera donc pour nous le meilleur intervalle dans lequel est censé se trouver la valeur vraie de la déclinaison. Il sera associé à la précision de l'estimateur de la valeur vraie.

2.2 Le dispositif expérimental

2.2.1 Le matériel

La liste ci-dessous donne le strict minimum de ce dont aura besoin l'apprenti gnomoniste pour effectuer ses mesures.

- Une table de dimension 80×80 cm au minimum

- Un niveau à bulles (ou deux pour plus de commodité) pour assurer l'horizontalité de la table

- Un trépied de photographe ou d'un télescope (tripode)

- Un fil à plomb
 - fil épais (diamètre = 8 mm)6

- masse

- Système amortisseur (récipient + eau)

- Une règle graduée (50 cm)

- Du Papier kraft blanc et de dimension suffisante (100×80 cm)

- Du Ruban adhésif pour fixer la feuille de papier kraft sur la table

- Un bon chronomètre réglé quelques instants avant la série de mesures sur l'horloge parlante

Un crayon à papier à pointe fine pour marquer toutes les informations utiles qui seront exploitées ultérieurement.

2.2.2 La mise en place du montage

Il faudra dans l'ordre effectuer les opérations suivantes :

- placer un "plan de travail" contre le mur

- fixer le papier kraft et marquer toutes les références utiles à une exploitation ultérieure de la feuille (Cf. Annexe A)

- poser tout le matériel nécessaire sur la table avant le réglage de l'horizontalité

- assurer à l'aide de deux niveaux à bulle l'horizontalité du plan de travail (Opération délicate et un peu longue ; donc avoir un peu de patience et du soin)

- tracer sur la feuille de papier une parallèle au mur et ce, au plus près du mur

- positionner et régler le trépied et le fil à plomb afin d'obtenir une ombre exploitable sur la feuille

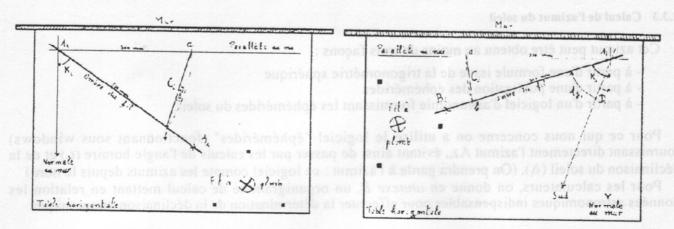
- assurer la stabilité du fil à plomb par le système amortisseur.

2.3 Acquisition et traitement des mesures

A une date donnée, on effectue une série de mesures d'indice i=1,...,n. Dans tout ce qui suit et pour simplifier, on considérera une mesure numérotée i. Toutes les grandeurs, y compris le temps, seront affectées de l'indice i, signifiant ainsi qu'elles se rapportent à l'i-ième mesure d'une même expérience. L'entier n sera donc le nombre total de mesures effectuées à une date donnée.

2.3.1 Le mode opératoire

Le schéma du montage ainsi que les notations utilisées se trouvent dans les figures 1 et 2 ci-dessous.



Après la mise en place du montage, les relevés de la direction de l'ombre peuvent commencer. Simultanément si possible :

- marquer deux points sur un même bord de l'ombre

- l'un noté A_i, intersection de l'ombre avec la parallèle au mur⁷

- l'autre noté B_i, le plus éloigné possible de cette parallèle, donc au plus près du pied du fil à plomb

- noter l'heure en repérant d'abord les secondes, les minutes, et enfin l'heure

numéroter soigneusement le couple de points (A_i;B_i) d'après les notations employées sur les figures précédentes.

Pour recommencer, d'une part sans devoir attendre que l'ombre se soit nettement déplacé, et d'autre part pour obtenir un plus grand nombre de mesures centrées autour d'une même heure⁸, on procède de la façon suivante :

- déplacer légèrement le système {trépied + fil à plomb} de façon à obtenir une ombre voisine de la précédente

- contrôler et assurer la stabilité du fil à plomb

- marquer deux points bien distincts situés toujours sur le même bord de l'ombre et ce, pour toute la série. Ceci est important.

- leur attribuer un numéro suivit de l'instant du marquage (indice i)

- et ainsi de suite...

Réaliser au moins une dizaine de relevés d'ombre (n=10) Ce travail constitue la première étape de la méthode de la planchette.

2.3.2 Mesure de l'angle K,

On exploite maintenant la feuille de mesure (on est donc au bureau d'étude).

Il faut tout d'abord déterminer les angles formés par les directions des ombres du fil à plomb avec la

normale au mur. On se référera aux figures 1 et 2 pour le schéma de principe.

On désignera par K_i l'angle entre l'ombre A_iB_i et la normale au mur (demi-droite qui n'est pas utile de matérialiser). Pour mesurer K_i on utilisera de préférence la méthode des cordes, qui, bien que relativement ancienne, donnera la meilleure précision possible (en tout cas bien mieux qu'un rapporteur du commerce!). Et ce qui est très important c'est que l'on pourra évaluer l'erreur théorique commise sur cette façon de procéder et c'est ce qui sera fait ci-après.

On mesure la longueur ab, où a et b sont respectivement les intersections de la parallèle au mur et de la direction de l'ombre avec l'arc de cercle de centre A_i et de rayon $R_i = 500$ mm. Ce sera la longueur de

la corde notée Ci.

On obtiendra K, par la relation9:

$$\sin K = 1 - 2C^2$$

(C_i étant à exprimer en mètre).

Conclusion: D=+2.95°

Puis, on réitère l'opération pour autant de direction d'ombres que l'on a relevées (i = 1, ..., n). On pourra très efficacement consigner toutes ces informations dans un tableau (cf. annexe A).

2.3.3 Calcul de l'azimut du soleil

Cet azimut peut être obtenu au moins de trois façons :

- à partir d'une formule issue de la trigonométrie sphérique
- à partir d'une publication des éphémérides
- à partir d'un logiciel d'astronomie fournissant les éphémérides du soleil.

Pour ce qui nous concerne on a utilisé le logiciel "éphémérides" (fonctionnant sous windows) fournissant directement l'azimut Az_i , évitant ainsi de passer par les calculs de l'angle horaire (t_i) et de la déclinaison du soleil (δ_i) . (On prendra garde à l'azimut : ce logiciel compte les azimuts depuis le nord)

Pour les calculateurs, on donne en *annexe B*, un organigramme de calcul mettant en relation les données astronomiques indispensables pour effectuer la détermination de la déclinaison gnomonique.

2.3.4 Calcul de la déclinaison gnomonique D;

On dispose à ce stade des angles K_i et Az_i . Ces angles ne peuvent pour l'instant être combinées, car l'un est un angle géométrique (K_i) , l'autre un angle orienté ${}^{10}(Az_i)$. Pour déterminer à la fois la valeur et le signe de D_i on procède en deux temps.

Tout d'abord, on considère la valeur absolue de l'azimut, puis :

- On calcule la valeur géométrique en choisissant dans le tableau 1 ci-dessous la relation qui donne D_i.
- 2. Le signe de D₁ se lit dans ce tableau sur la même ligne correspondant au cas de figure.

L'angle orienté Di est ainsi complètement déterminé.

On trouvera ci-dessous un tableau contenant toutes les situations possibles entre l'ombre relevée, la direction du méridien et la normale au cadran. Il suffira de comparer la valeur absolue des angles Az et K pour savoir quelle est la formule à utiliser. Ce tableau fourni également le signe de la déclinaison et donc la nature déclinante du cadran (matin ou soir).

Tab.1: Tableau récapitulatif des positions des ombres dans la méthode de la planchette

		Position de l'ombre par rapport à la normale au mur					
	Signe +	A- < K	A= > K	A- < K ou A- > K			
Cadran déclinant du MATIN	-	Ombre à GAUCHE avec Az > 0	Ombre à DROITE avec Az < 0	Ombre à GAUCHE avec Az < 0			
Cadran déclinant du SOIR	+	Ombre à DROITE avec Az < 0	Ombre à GAUCHE avec Az > 0	Ombre à DROITE avec Az > 0			
FORMULES		$D = K - A_7 $ 0 at Az sont de signes contraires	D = A - K D et Az sont de même signe	$D = A^- + K$ O et Az nont de même grane			

^{*} Si cette condition se produit, c'est que l'ombre du fil à plomb se trouve entre la méridienne et la normale au cadran

Exemple:

Soit le 13/03/96, à 13^h53^{mn}15^s TU:

avec une ombre située à gauche de la normale au mur. Quelle est alors la déclinaison de ce mur? Solution: On constate que Az>0 et |Az|>K. Dans le tableau 1 on lit que la formule à utiliser pour calculer D est: D=|Az|-K, puis que le cadran est déclinant du "soir". Conclusion: $D=+2.95^{\circ}$.

2.3.5 Les modèles de grille de mesure

Afin de faciliter la lecture des données, les calculs et leurs exploitations tant sur le terrain qu'au bureau, on conçoit aisément que seul un tableau ou une grille permet cette souplesse et la rigueur qu'exige toute expérience. On trouvera en annexe des modèles de grilles, parmi d'autres, qui ont servi à la campagne de mesure. On en donnera deux, suivant que l'on utilise ou non un logiciel pour les éphémérides. Se reporter à *l'annexe A*.

3.1 Classement des actions expérimentales

Toute la description au §2 a porté sur une seule mesure numérotée i, et dont le traitement a conduit à D_i . Étant donné que l'on a n mesures effectuées à une date donnée, on aura alors un ensemble de n valeurs : $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$. Ensemble de valeurs dont la dispersion dépendra du soin de l'expérimentateur, tant lors de l'installation que lors de l'exploitation. Si l'on veut tenter de déceler les différentes sources d'erreurs responsables d'une dispersion faisons d'abord un classement de toutes les actions effectuées lors de cette expérience et attribuons à chacune d'elles une erreur probable notée $\epsilon_{\text{caction } n^{\circ}|_{\Sigma}}$. La bonne compréhension de toutes les manipulations effectuées au cours de cette expérience permet de ne retenir que les actions qui sont susceptibles de produire une part d'erreur non négligeable.

Tab2. : Table des erreurs commises dans la méthode de la planchette

Actions effectuées	Er	reurs
- Pour la mesure de Az :	l é biénn	hard)
1. Relevé de l'instant du marquage,	ε,	ΔAz
2. Calcul de l'azimut du soleil,	£.\z.	0 100012010
- Pour la mesure de l'angle K :	om ttov	
1. Report sur la feuille d'une parallèle au mur,	ε ,1	
2. Horizontalité de la table,	ε,2	
3. Report d'une longueur de 5(X) mm,	ε 3	
4. Tracé de la demi-droite A _i B _i ,	8,4	
5. Stabilité du fil à plomb,	ε 5	ΔΚ
6. longueur utile de l'ombre,		art
7. Problème de pénombre,	8 .6	
8. Diamètre du fil à plomb,	ε7	
9. Mesure de la longueur de la corde,	8, 3	
	ϵ_{corde}	
10. Calcul de l'angle K,	εĸ	

Le but que l'on se propose est de chercher à évaluer les erreurs $\epsilon_{\text{caction n}^0\text{i}>}$, composantes des erreurs sur la détermination des angles K et Az. On montrera qu'il y a deux principales sources d'erreurs dans la détermination de K. L'une que l'on pourra évaluer (ϵ_K), l'autre qui ne sera pas directement quantifiable, car composée de la somme d'erreurs elles-mêmes non quantifiables et probablement corrélées et que l'on désignera par le terme d'erreur de parallélisme (ϵ_{ij}).

3.2 Incertitude sur la déclinaison : DD

On suppose que l'incertitude sur la déclinaison gnomonique provient de la superposition de toutes les erreurs engendrées par les actions listées précédemment. Sous cette hypothèse de travail, on peut écrire :

ns and so solitor at
$$\Delta D = \Delta Az + \Delta K$$
 to assume the size of the

Où ΔAz et ΔK, représentent les erreurs globales dues aux actions expérimentales.

3.3 Incertitude sur le calcul de l'azimut (DAz)

Le calcul de l'Azimut du soleil ne nécessite que la connaissance de l'instant t_i d'une mesure i. L'expérimentateur n'agit sur l'azimut que par l'intermédiaire du seul temps t_i , et on admettra que le temps t_i n'agit que sur la connaissance de Az^{11} . On admettra également que cet azimut est "correctement" déterminé pour chaque t_i . Ce qui revient à dire que ϵ_{AZ} est parfaitement négligeable devant les erreurs instrumentales ΔK .

Comme le temps est supposé être bien maîtrisé et correctement évalué lors des marquages 12, on assure donc que :

$$\Delta A_{z} \ll \Delta K$$
 (2)

De là, l'incertitude sur la déclinaison devient :

$$\Delta D \approx \Delta K$$
 (3)

3.4 Incertitude sur la mesure de l'angle K (DK)

Il est facile de constater d'après le tableau 2 que l'incertitude sur la mesure de K provient de deux sources bien distinctes :

- du calcul de K après avoir mesuré la corde C,
- du relevé "physique" de l'ombre sur le papier kraft.

Analysons en détail ces deux sources d'erreur.

3.4.1 Évaluation de l'erreur e K sur l'angle K due à une erreur e corde sur la longueur C de la corde

On peut avoir accès à l'erreur théorique commise dans cette méthode de mesure de l'angle K. Partons de la relation vue au §2.3.2 (pour un rayon de 500 mm et pour une mesure n° i):

$$\sin K = 1 - 2C^2 \tag{4}$$

en différenciant et après une petite transformation 13:

$$dK = -\frac{2}{\sqrt{1 - C^2}} dC \tag{5}$$

En première approximation, on pourra confondre la différentielle dK avec la différence finie ϵ_K qui elle, est mesurable. ϵ_K est l'erreur sur l'angle K due à une erreur de mesure sur la longueur de la corde. De la même façon, on pourra confondre dC avec ϵ_{corde} à condition que ϵ_{corde} << C.

On aura donc:

$$|dK| \approx \varepsilon_K \quad et \quad \varepsilon_K = \frac{2}{\sqrt{1 - C^2}} \, \varepsilon_{cordc}$$
 (6)

Si l'on construit maintenant une table des valeurs donnant e_K en minutes de degré en fonction des valeurs prises par la corde C et pour différentes valeurs probables pour ϵ_{corde} on aura, sachant que les longueurs sont en mm :

Tab.3 : Table des ε_{conte} pour $R = 500 \, mm$

C_i en mm. \rightarrow ΔC_i en mm. \downarrow	350	400	450	500	550
0,25	1',8	1',9	1',9	2',0	2',1
0,50	3',7	3',8	3',8	4',0	4',1
0,75	5',5	5',6	5',8	6',0	6',2
1,00	7',3	7',5	7',7	7',9	8',2
1,25	9',2	9',4	9',6	9',9	10',3
1,50	11',0	11',3	11',5	11',9	12',3
1,75	12',8	13',1	13',5	13',9	14',4
2,00	14',7	15',0	15',4	15',9	16',5
2,25	16',5	16',9	17',3	17',9	18',5

On s'est limité à ces longueurs des cordes puisqu'expérimentalement on n'a pas été en-dessous de 400 mm ni au-dessus de 550 mm (cf. annexe C). Admettons que les cordes soient mesurées au demi-millimètre près (c'est-à-dire $\epsilon_{\rm K}=0.50$ mm) alors on peut lire dans le tableau 3 que l'erreur commise sur l'angle K sera de l'ordre 4' de degré. Ce qui, il faut le reconnaître, n'est déjà pas si mal ! Mais c'est théorique, d'autant plus que l'erreur sur l'angle K n'admet pas pour seule composante des erreurs dues à la mesure de la longueur de la corde.

On retiendra que pour toutes les mesures des cordes (et dans le cas des expériences menées pour la mesure de la déclinaison du cadran du CLG République):

3.4.2 Autres erreurs commises sur l'angle K -- Erreurs de parallélisme

Les autres sources d'erreur viennent des actes délicats : [1] à [8]. Intéressons-nous à l'erreur [8] du tableau 2, puisqu'il se trouve que le fil à plomb conditionne l'image formée sur le plan de travail à savoir l'ombre.

Le problème central à ce stade est que le soleil est une source étendue et non ponctuelle. L'image formée sur le plan horizontal est donc conique et ainsi les deux bords de l'ombre du fil ne sont pas parallèles! Alors, quels bords de l'ombre faut-il prendre au moment de la mesure? Et que mesure-t-on avec un seul bord de l'ombre? On se reportera à la figure 3 ci-dessous pour comprendre l'influence de ce nouveau facteur.

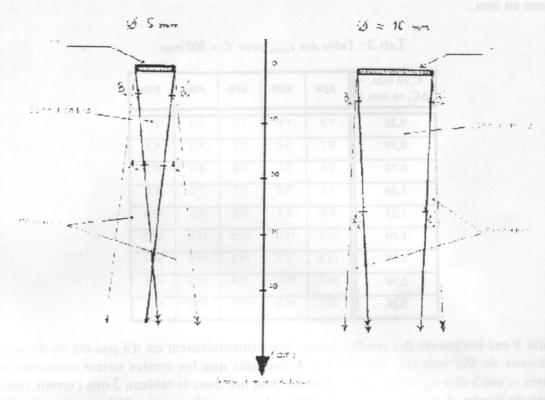
Pour répondre à ces questions, on a réalisé l'expérience suivante :

on relève simultanément, avec un fil à plomb de diamètre 5 mm, la direction des deux bords de l'ombre. En un même instant t_i si possible, on marque les couples de points : $(A_i : B_i)$ pour le premier bord et $(A_i^+ : B_i^+)$ pour le deuxième bord de l'ombre.

duira la notation e pour désigner cet excédent. Il faut voir dans e tout a les

L'ensemble des mesures effectuées se trouve à l'annexe C, feuilles II-a et II-h.

Fig.3: Influence de l'épaisseur du fil à plomb dans la formation de l'ombre.



Pour pouvoir comparer les deux jeux de mesures, on applique un traitement statistique. On calcule la valeur moyenne de la déclinaison obtenue en considérant chaque bord, puis on calcule l'intervalle de confiance des deux valeurs obtenues. En s'étant appliqué sur tous les autres points [1] à [6], on a obtenu les valeurs suivantes :

Tab.4 : Résultats des mesures lorsque celles-ci sont prises de chaque côté du bord de l'ombre.

Moyenne (77)	Écart type o	Précision sur T	différence
2°46'20"	4'06"	3'09"	112/16 2 144
3°06'28"	4'41"	3'36"	20'08"

On constate un écart de 20' de degré en moyenne entre ces deux valeurs. Ce qui est considérable en regard de la précision obtenue. Puisque la déclinaison D_i a été obtenue en passant par la mesure de K_i , cela donne en fait un excédent de (20'-4') c'est-à-dire 16' de degré. Dans le tableau 3, on peut lire que l'incertitude sur la position des demi-droites A_iB_i , est alors de 2 mm puisque $0.40 \le C_i \le 0.45$ mm, alors que l'on s'est assuré que l'erreur sur la mesure de la corde était de l'ordre de 0.50 mm. La première source d'erreur ϵ_K abordée précédemment ne suffit pas à elle seule à expliquer cette différence. Il faut admettre que d'autres erreurs peuvent se superposer à l'erreur commise sur la longueur de la corde. De l'expérience précédente on en déduit qu'il faut attribuer cet excédent au relevé de la direction de l'ombre et en général à tout ce qui concours au relevé de cette direction. Le diamètre du fil à plomb peut entacher lourdement la détermination de la déclinaison gnomonique, et peut même fausser la mesure. Cependant celui-ci ne sera pas le seul responsable de l'apparition de mesures marginales. Il suffit de penser par exemple que le fil à plomb n'a pas été bien stabilisé ou encore que la longueur de l'ombre est trop courte ou alors trop longue (c'est le problème de la *pénombre*)...

On introduira la notation ϵ pour désigner cet excédent. Il faut voir dans ϵ toutes les accumulations des actions produisant un défaut de parallélisme des bords de l'ombre et dont le diamètre du fil à plomb (que l'on aura soin de corriger) et la mesure de la longueur de la corde ne suffiraient à justifier (sont donc concernées les actions [1] à [7] du tableau 2). Ce défaut de parallélisme se produit toujours et ne peut être que seulement réduit (cela dépend en partie de l'expérimentateur et c'est une source supplémentaire d'erreurs systématiques).

Par conséquent on est en droit d'écrire :

qui
$$\sigma$$
 (7) our effet de déplacer la valeur centrale σ_{f} 3 $= 3 \cos \theta$

Un calcul direct d'incertitude, comme on a pu le faire pour le calcul de l'angle K par l'intermédiaire de la mesure de la corde, est impossible à faire pour évaluer les $\varepsilon_{i/j}$. La seule chose dont on est sûr c'est que ceux-ci agissent sur la connaissance de K et donc de D.

3.5 Modélisation des erreurs de mesure

Les sources d'erreur restent encore nombreuses et non quantifiables¹⁴. On retiendra qu'il existe deux principales sources d'erreur sur l'angle K pour une mesure *i*:

- $\varepsilon_{\rm K}$: pour la mesure de la corde C.
- ε: pour tout ce qui concerne la direction de l'ombre AB.

L'incertitude sur la mesure de la corde s'écrira :

$$\Delta K = \varepsilon_K + \sum_j \varepsilon_{-j}$$

$$\Delta K = \varepsilon_K + \varepsilon_{-j}$$
(8)

La "forme" de l'ombre du fil est importante et il appartient à l'expérimentateur de juger si le "parallélisme" des bords de l'ombre est réalisé ou non sur la portion utile au moment du marquage des repères (estimation d'un facteur de qualité q).

Dans cette méthode de la planchette, l'incertitude sur la déclinaison pour une mesure donnée pourra

$$\Delta D \approx \varepsilon_{K} + \varepsilon_{V} \tag{10}$$

Et si l'on pose

$$\epsilon = q \times \epsilon_K \quad avec \quad q = 1, 2, \dots$$
 (11)

Alors on doit s'attendre à obtenir pour chaque mesure :

$$\Delta D \approx (q+1) \times \varepsilon_K \quad avec \quad q = 1, 2, \dots$$
 (12)

L'entier naturel q caractérisera la qualité du montage expérimental pour ce qui est des actions [1] à [10]. Une façon d'évaluer q est de réaliser l'expérience décrite en §3.4.2, et de comparer les deux valeurs obtenues. La différence devra être de l'ordre de $q \times \varepsilon_K$.

4. Compensation par les moindres carrés d'un ensemble de mesures

4.1 Introduction

On a pu associer à chaque mesure un intervalle dans lequel on pense être sûr que se trouve la valeur cherchée : il s'agit de l'intervalle $D_i - (q_i + 1) \times \varepsilon_{K_i}$; $D_i + (q_i + 1) \times \varepsilon_{K_i}$. On dispose en fait d'un autre moyen pour obtenir une information sur cette incertitude mais cette fois-ci non pas sur une mesure mais sur un ensemble de mesures.

Chaque mesure est porteuse d'une information (de bonne ou mauvaise qualité), et celle-ci se retrouve dans la dispersion des mesures dont on se sert pour évaluer l'intervalle de confiance que l'on peut accorder à la moyenne que l'on va calculer à partir de toutes ces valeurs. Il ne faut pas penser qu'il suffit de faire une infinité de mesure pour améliorer la précision du résultat. Rappelons que les statistiques sont prévues pour traiter des erreurs aléatoires. Elles font une compensation autour d'une valeur centrale de la dispersion d'un ensemble donné de mesures, en supposant justement que les erreurs aléatoires sont

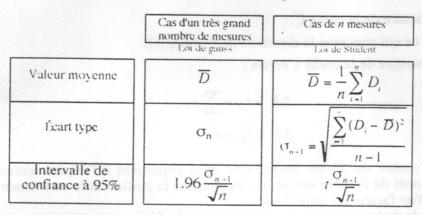
centrées. Et c'est tout. Elles ne traitent pas des erreurs systématiques (celles du type & en contiennent) qui ont pour effet de déplacer la valeur centrale qu'est notre moyenne.

4.2 Traitement des mesures et valeur retenue pour D

4.2.1 Modèle stochastique

On trouvera dans le tableau 5 le formulaire a utiliser dans le cas très fréquent ou le nombre n de mesures est faible. On a recours alors à la loi de Student qui traite le cas d'un faible nombre de mesures.

Tab. 5: Formulaire statistique



Le coefficient de Student *t* sera à choisir suivant le nombre de mesures et le niveau de confiance que l'on désire accorder aux mesures (en général un niveau de confiance de 95% est satisfaisant).

On donne dans le tableau 6 les valeurs des pourcentages $t_{0.95}$ de la distribution de Student selon le nombre n de mesures effectuées¹⁵.

Tab. 6: Valeurs des t_{0.95} dans la distribution de Student.

Nombre de mesures	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t_{0,0,0}$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23
	1	5 / 6		25/25	3.5)/a ()	A		
Nombre de mesures	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
$t_{o,v}$	2.20	2.18	2.16	2.14	2.13	2.11	2.12	2.10	2.09	2.06
	CAC	2000	tionah	and a	n lagran	I Sessi	lacks as	5 129 1	s route	1737
Nombre de mesures	30	40	50	60						
$t_{0,4}$	2.04	2.02	2.01	2.00	4 00	1.96	20 97			

4.2.2 Application numérique

On se reportera à l'*annexe C* où l'on trouvera la grille complète des 47 mesures effectuées pour la détermination de la déclinaison gnomonique du mur du CLG République. On calcule grâce à un tableur (comme Excel) et pour le total des 47 mesures :

- la valeur moyenne \overline{D}
- l'écart type o
- l'intervalle de confiance à 95% en prenant t_{0.95}.

Pour déterminer l'azimut du soleil et la déclinaison on a effectué les calculs de deux façons :

- par le logiciel "éphémérides".
- par la trigonométrie sphérique (voir l'annexe B pour l'organigramme de calcul).

Tab.7 : Résultats statistiques sur la mesure de la déclinaison du mur du Collège République à Calais.

e de Chronic e e	Moyenne	Écart type	Intervalle de confiance à 95% (t _{0.95} =2.01)
Par le Logiciel ÉPHÉMÉRIDES	$\overline{D}_1 = 3^{\circ}05 \ 49''$	$\sigma_1 = 17'13"$	$\Delta \overline{D}_{i} = 4' 55''$
Par la TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE	$\overline{D}_2 = 3^{\circ}04'55''$	(3 ₂ = 17'34"	$\Delta \overline{D}_2 = 5.02$ "

L'écart type nous renseigne sur la dispersion, tandis que l'intervalle de confiance à 95%, qui est une plage située de part et d'autre de la moyenne, nous informe de la précision globale de nos mesures $(\Delta \overline{D})$.

Soit à peine 1' de degré entre les deux valeurs moyennes de la déclinaison ce qui confirme bien que $\Delta Az << \Delta K$ dans notre expérience. Les dispersions des deux séries de mesures sont très voisines. On peut dire que les deux séries ont la même précision. Le très faible écart entre les deux moyennes montre que l'exactitude est la même.

L'erreur probable sur \overline{D} pour l'ensemble complet des mesures est de :

$$\Delta \overline{D} \approx 5$$

Cette erreur est du même ordre de grandeur que ϵ_K . On a donc fait mieux que ce que prévoyait par la relation (12) et ce, malgré l'étendue des mesures qui est de 1°. La valeur retenue pour la déclinaison du mur sera :

$$(\overline{D} \pm \Delta \overline{D}) = (3^{\circ}06' \pm 0^{\circ}05)$$

C'est cette valeur qui a permis d'effectuer le plan du cadran et d'en réaliser une maquette ; maquette qui a été installée et laissée sur le mur durant les années 1996, 1997, 1998 ; en attente de la construction à la dimension réelle du cadran du Collège République (Réalisation finale : 02 juillet 1999).

Remarque:

Le défaut du fil à plomb a été corrigé afin de minimiser ε . On a conjecturé qu'il était nécessaire de disposer d'un fil à plomb ayant un diamètre d'au moins 8 millimètres, et qu'il ne fallait pas dépasser une longueur d'ombre de 40 centimètres pour marquer les points A_i et B_i . En effet si le fil à plomb est trop mince soit on a plus d'ombre du tout, soit on aperçoit un cône d'ombre et on ne sait plus où mettre les repères. Si le fil est suffisamment épais, d'une part, l'image formée est un peu plus nette et d'autre part l'image est plus longue de la base du plomb à la parallèle au mur et les deux bords "semblent" nettement plus parallèles. Faut-il rappeler qu'il est nécessaire d'avoir comme condition un soleil bien brillant et suffisamment haut dans le ciel ?

En tout état de cause, dans les autres mesures on a essayé le plus possible d'améliorer le relevé des directions des ombres afin d'abaisser au plus de la moitié cette erreur de "parallélisme". Le but étant d'obtenir $\varepsilon \approx \varepsilon$. Mais on ne pourra pas l'atteindre avec une seule mesure... Et en ce sens augmenter le nombre de mesures en restant pour chaque d'alles deux le veix de la moitié cette erreur de plus possible d'améliorer le relevé des directions des ombres de mesures en restant pour chaque d'alles deux le veix de la moitié cette erreur de plus possible d'améliorer le relevé des directions des ombres de la moitié cette erreur de plus possible d'améliorer le relevé des directions des ombres afin d'abaisser au plus de la moitié cette erreur de "parallélisme". Le but étant d'obtenir $\varepsilon \approx \varepsilon$. Mais on ne pourra pas l'atteindre avec une seule mesure... Et en ce sens augmenter le nombre de mesures en restant

pour chacune d'elles dans le critère précédent, ne pourra que rendre meilleure la détermination de D.

5. Conclusion sur la précision fournie par la méthode de la planchette

À propos de la méthode :

- La résolution angulaire est de l'ordre de ε_K.
 Pour donner une valeur numérique théorique, elle est de l'ordre de 2' d'angle si ε_{corde}=0.25 mm et C_i < 550 mm. Elle ne sera pratiquement jamais atteinte.
- Une mesure sera telle que sa précision est de l'ordre de (q+1)xε_K.
 Pour q=10, on pourra estimer que la mesure est vraiment mauvaise, mais cependant elle est porteuse d'information. Pour q=1, la précision est de 2ε_K (ΔD=2ε_K).
- 3. Pour *n* mesures, seule une étude statistique permettra de donner une valeur numérique à ΔD. On a vu au §4 quel est le modèle à utiliser pour tirer parti au mieux des mesures (surtout lorsque n<20) afin de diminuer le facteur de qualité *q*, c'est-à-dire compenser les défauts des mesures en supposant qu'elles ne soient pas systématiques. On peut déjà avancer qu'une étude statistique sur un ensemble de mesures devrait donner une précision comprise dans l'intervalle |ε_K;2ε_K|.

À propos du choix du modèle statistique :

La loi de probabilité de Student doit être appliquée lorsque l'on a à faire à un faible nombre de mesures, ce qui est toujours le cas en ce qui concerne la détermination de la déclinaison gnomonique. En effet, suivant les conditions, il ne sera pas possible de réaliser un grand nombre de mesures comme on a pu le faire ici. Les conditions qui restreignent les mesures peuvent être liées à la disponibilité du matériel, du personnel (il faut au minimum être deux), de la météo, de l'accessibilité du site, des critères liés au coût qui imposent un délai (location d'un échafaudage...) etc....

Extension possible:

Pour finir, signalons que les méthodes de mesures citées au paragraphe 1.2 méritent d'être expérimentées et analysées comme on l'a fait ici. Il serait intéressant de comparer leur performance (pour ne pas dire précision) et ainsi déterminer leur exactitude, à condition bien sûr que le mur déclinant soit le même pour l'expérimentation de toutes les méthodes. Ces travaux sont en cours.

A. Modèles de grille de mesures

En utilisant les éphémérides (Logiciels)

	U SE	†	FEUILLE	n°		
Date	Numéro de l'ombre A,B, du fil à plomb	I marke m h	Longueur de la corde C;		Calcul de l'azimut du soleil : Az,	Dixlinaison gnomonique : D
j/mm/aa		hh:mm:ss	(m)	(DD°,xx)	(DDr,xx)	(DFF,xx)
	to took off					
	1					
270	ice ph z					1. 00 0
						1000

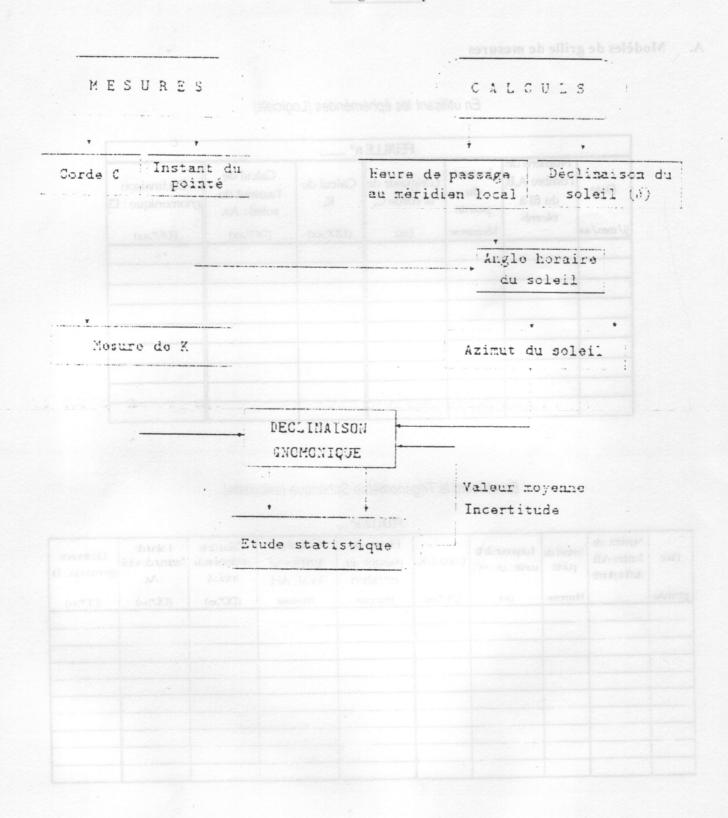
En utilisant la Trigonométrie Sphérique (calculette)

FEULLE nº

Proc	Numino ide fontze AB duftåptenb		arde: ab =(;	Calcul de K	heure de passaye au néridien	Calcul du temps vrai local : AH,	Cakatdela diskamada seki is	Calculdo Tazimu du solei : Av _i	Déclinesen grammique : L
j.trrr,ba		lintries.	(m)	(DDE)	नियःगहरू	hhmmse	(DD*xx)	(DO'xo)	(DOP,xx)

-									
					- of the sale				
							The state of the state of	White a property and	

B. Organigramme de calcul de la déclinaison gnomonique



C. La grille complète des mesures

6	REFERENCE	SDESMESURES		MESU	JRES	27 EU 10 97 C	CA	LCULS		DECLINAISON	
	Dates	Heure de passage au méridien	Nº de l'ombre Ü	Instant TU du pointé (hh.mm.ss)	Corde C	Calcul de K	Angle horaire du soleil : AH	Déclinaison du Soleil : 8	Azimut du soleil : Az	Déclinaison	du cadzan : D
		-				(deg)	(deg)	(deg)	(deg)	[legi
	13-mar-96	Paris :	1	13:49:00	0,5060	29,204	26,750	-2,668	31,910	2,705	2,720
_	4:15 JESSE 1019 /	12:00:04	2	13:51:00	0,5015	29,801	27,250	-2,668	32,462	2,661	2,670
:		CLG:	3	13:53:15	0,4990	30,132	27,813	-2,668	33,081	2,949	2,960
e P.		12:02:00	4	13:55:00	0,4945	30,726	28,250	-2,668	33,561	2,835	2,340
7	THE RESERVE OF	2171125 27 1124	5	14:01:00	0,4830	32,237	29,750	-2,668	35,194	2,957	2,990
Feuille			7	14:04:00	0,4750	33,281	30,500	-2,668	36,003	2,722	2,760
			3	14:12:00	0,4700	33,931	31,250	-2,668	36,807	2,376	2,920
	AT 06	7-				34,968	32,500	-2,668	38,137	3,170	3,210
	27-mar-96	Paris : 11:55:58	1	14:11:00	0,4320	33,811	33,279	2,850	41,608	2,797	2,310
-	-	CLG:	2	14:12:15	0,4295	39,128	33,592	2,850	41,951	2,822	2,830
II.	the world have been	11:57:53	3	14:13:30	0,4260	39,572	33,904	2,350	42,292	2,720	2,740
	1	11.57.55	5	14:14:45	0,4230	39,952	34,217	2,850	42,633	2,681	2,700
P I	DESCRIPTION OF STREET	IN THE TOWN	6	14:17:00	0,4210	40,205	34,529	2,850	42,973	2,768	2,790
Feville	(Bord droit de l'ombre)		7	14:20:30	0,4190	41,339	34,779 35,654	2,850	43,244	2,797	2,800
4	1		8	14:21:30	0,4075	41,904	35,904	2,850	44,188	2,349	2,860
			9	14:23:00	0,4060	42.092	36,279	2,850	44,857	2,765	2,640
	27-mar-96	Paris :	1	14:11:00	0,4340	38,557	33,279	2,850	41,608	3.051	_
32	The Lord Hold State	11:55:58	2	14:12:15	0,4310	38,938	33,592	2,350	41,951	3,013	3,060
1-1		CLG:	3	14:13:30	0,4295	39,128	33,904	2,850	42,292	3,164	3,180
=	ENTROP TROPING	11:57:53	4	14:14:45	0,4260	39,572	34,217	2,850	42,633	3,061	3,080
a			5	14:15:00	0,4235	39,888	34,529	2,850	42,973	3,085	3,100
Ť		6		14:17:00	0,4205	40,268	34,779	2,850	43,244	2,976	2,990
Femile	(Bord gauche de l'ombre	e)	7	14.20:30	0,4145	41,024	35,654	2,850	44,188	3,164	3,180
	en amo a pastelliza	117-01, 1070	8	14:21:30	0,4115	41,402	35,904	2,850	44,456	3,054	3,140
			9	14:23:00	0,4095	41,653	36,279	2,850	44,857	3,204	3,220
	15-avr-96	Paris :	1	13:15:30	0,5265	26,461	20,742	9,983	29.922	3.460	3,470
	but rustration	11:50:37	2	13:17:00	0,5225	27,000	21,117	9,983	30,421	3,421	3,430
=		CLG:	3	13:18:00	0,5195	27,403	21,367	9,983	30,753	3,351	3,360
		11:52:32	4	13:19:00	0,5170	27,733	21,617	9,983	31,084	3,347	3,350
A			5	13:20:00	0,5145	28,072	21,867	9,983	31,415	3,343	3,350
Feville	south at to min	as othibes	6	13:21:00	0,5110	28,539	22,117	9,983	31,744	3,205	3,210
Fel			7 8	13:23:30	0,5055	29,271	22,742	9,983	32,564	3,293	3,300
	31F 11 F MT 30F 3-31	MALES TO THE	.9	13:24:30	0,5045	29,404	22,992	9,983	32,890	3,486	3,500
1	salve al rendimen	OU MERT BE	10	13:25:30	0,5010	29,863	23,242	9,983	33,216	3,348	3,350
						29,934	23,492	9,983	33,540	3,506	3,640
	22-mov-96	Paris:	1	09:27:20	0,4620	34,963	-32,867	-20,226	-31,534	3,434	3,438
		11:36:53 CLG:	2	09:28:51	0,4645	34,644	-32,488	-20,226	-31,191	3,453	3,454
-		11:38:48	3	09:30:00	0,4670	34,321	-32,200	-20,226	-30,931	3,389	3,391
1		11.30.40	5	09:32:24	0,4700	33,931	-31,500	-20,226	-30,387	3,544	3,551
4	and the second		6	09:34:34	0,4750	33,281	-31,058	-20,226	-29,895	3,386	3,391
	A THE PERSON	-	7	09:37:02	0,4800	32,529	-30,867 -30,442	-20,226	-29,720	3,561	3,561
r curre	I so the eligib	I Carlotte	3	09:40:02	0,4885	31,516	-29,692	-20,226	-29,333 -28,647	3,297 2,869	3,299
4			9	09:45:00	0,4955	30,595	-29,092	-20,226	-27,505	3,089	3,095
-			10	09:48:45	0,5035	29,536	-27,513	-20,226	-26,640	2,897	2,906
-			11	09:50:54	0,5090	28,806	-26,975	-20,226	-26,141	2,664	2,666
11	no a smale terms	CHARLE NO.	CHATCHY.	8309D 703	37(877)	0.0000				HOK	*
								0001/2010	HOYEHHE =	3,0815	3,0974
									Icart-Type =	0,2923	0,2370
b	* = Par éphémérides ** = Par Trigo, Sphér	andar-kali	11768Fg	lasse or				15.6 15.4	Intervalle de confinnce à 95%	0,0836	0,0820

ofcamines mais aussi systematiques estime le suggere le problème de à la prénimbre. Il y aura toujours un défaut dans le reloisé de la direction de l'ombre, car le soleil, n'est pas une source pouchiséle mais une source de neue : la diffraction

de manimiser la différence entre les directions des deux boxis de l'embre, Mass la diffraction affectera toujours la direction

NOTES

[1]. Une méthode détaillée en est donnée au chapitre VI, §170-200, pp.101-126, de "La Gnomonique pratique (...)", de Dom Bedos de Celles, Paris, 1760.

[2]. C'est le cas le plus général et dont le principe consiste à inverser un système de coordonnées afin d'en extraire des paramètres, comme par exemple, la déclinaison gnomonique.

[3]. Cercles hindous, méthode utilisant l'instant du midi vrai pour tracer la méridienne etc.

[4]. La première méthode est celle décrite au §2 et basé sur l'article de R. Sagot dans l'Astronomie, février 1988, et sur le chapitre IV, §2, pp.42-45, de "Gnomonique Moderne" de D. Savoie, édité par la SAF en 1997. La deuxième méthode est une variante que l'on peut appeler portative, proposée par Heinz Schumacher et que l'on peut trouver résumée dans l'ouvrage de Y. Oppizo "Cadrans solaires de précision", Masson, 2nd édition, 1997, pp.38-51.

[5]. On démontre que cet estimateur "valeur moyenne" est le meilleur estimateur de la série statistique.

[6]. On justifiera au §3.4.2 pourquoi il est nécessaire d'avoir une corde aussi épaisse, ce qui, il est vrai, est tout le contraire d'un vrai fil à plomb ou l'on cherche plutôt à avoir un fil le plus fin possible! Bien entendu, la masse doit être plus importante afin de tendre la corde.

[7]. Si l'ombre n'est pas assez longue ou trop floue parce que le fil est trop éloigné du mur, on ne pourra avoir directement le point A_i sur la parallèle au mur. Dans ce cas marquer un autre repère sur le même bord de l'ombre comme il a été fait avec B_i. Tracer ensuite la droite A_iB_i pour obtenir l'intersection de l'ombre avec la parallèle au mur et pouvoir poursuivre l'exploitation de la feuille.

[8]. Si l'ensemble des mesures est de préférence centré sur une heure donné, c'est pour assurer approximativement une valeur constante à la déclinaison du soleil pour cette date. La valeur de la déclinaison calculée à cet instant moyen est suffisante pour le calcul de chaque azimut de la série, d'autant plus que si cette déclinaison est interpolée entre deux dates au moyen d'éphémérides (comme ceux de la SAF par exemple).

[9]. La corde ab permet en fait d'obtenir directement l'angle aA_ib c'est-à-dire l'angle entre la parallèle au mur et la direction de l'ombre. On obtient K simplement en faisant $(90^{\circ}-aA_ib)$. Ce sera l'angle entre les directions de l'ombre et la normale au mur qui, rappelons-le, n'est pas utile de matérialiser. Pour un rayon R quelconque $(A_ia=A_ib=R)$, il faut considérer la relation

plus générale : $\sin K = 1 - \frac{C^2}{2R^2}$.

[10]. Rappelons qu'un angle orienté est un angle géométrique affecté d'un sens de parcours imposé, caractérisé par le signe + ou le signe -. La convention de signe étant ici celui du sens horaire : positif du sud vers l'ouest, négatif du sud vers l'est. Cette valeur est ensuite ramenée dans l'intervalle [-180] (on parle alors de mesure principale).

[11]. En fait à l'instant t_i apparaît le couple (Az_iK_i) et de ce couple résulte une déclinaison D_i . Il intervient donc a priori aussi sur K_i puisque celui-ci mesure une direction d'ombre qui n'est pas autre chose que l'azimut du soleil compté depuis une autre origine que le sud.

[12]. Cela demande un petit entraînement et de l'organisation. Ce qui compte, se sont d'abord les secondes, la décision de marquer les points A; et B; en tenant compte de la présence de la pénombre et d'un éventuel bougé du fit à plomb.

[13]. Pour un rayon R quelconque on aura : $dK = \frac{dc}{R\sqrt{1 - \frac{C^2}{4R^2}}}$ avec dK en radian, R, C et dC en mètre.

[14]. L'expérience sur le diamètre du fil à plomb montre bien que les erreurs listées au tableau 2 peuvent être a tout moment aléatoires mais aussi systématiques comme le suggère le problème dû à la pénombre. Il y aura toujours un défaut dans le relevé de la direction de l'ombre, car le soleil n'est pas une source ponetuelle mais une source étendue : la diffraction "noyant" toujours l'ombre géométrique (A_iB_i). Ainsi, de l'expérience menée avec le fil à plomb, il faut en retirer que l'augmentation du diamètre du fil permet d'obtenir une ombre géométrique plus nette et plus régulière, et permet seulement de minimiser la différence entre les directions des deux bords de l'ombre. Mais la diffraction affectera toujours la direction de l'ombre. C'est donc bien une erreur systématique et celle-ci n'est pas quantifiable avec les moyens dont nous disposons.

[15]. Ce tableau est extrait de l'article des auteurs Y. Baima, A. Jorandon, S. Morlen et M. Vincent, intitulé : "Changement de fréquence, effet Doppler", BUP n°804, pp. 869-884, Mai 1998 (page 878 pour le tableau des coefficients t_{0.95}).

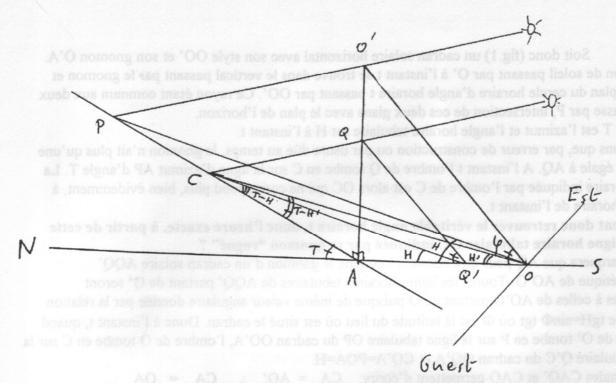
JEAN PAKHOMOFF

Deuxième prix international de gnomonique

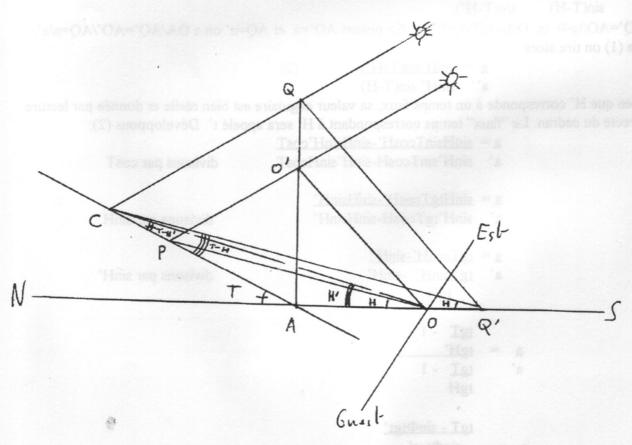
Une étude théorique du gnomon

inadapté.





Le gnomon réel AQ est plus petit que le gnomon théorique AO'. Fig.1



Le gnomon réel AQ est plus grand que le gnomon thérique AO'. Fig.2

Soit donc (fig.1) un cadran solaire horizontal avec son style OO' et son gnomon O'A. Un rayon de soleil passant par O' à l'instant t se trouve dans le vertical passant par le gnomon et dans le plan du cercle horaire d'angle horaire t passant par OO'. Ce rayon étant commun aux deux plans passe par P, intersection de ces deux plans avec le plan de l'horizon.

L'angle T est l'azimut et l'angle horaire tabulaire est H à l'instant t.

Imaginons que, par erreur de construction ou par usure dûe au temps, le gnomon n'ait plus qu'une hauteur égale à AQ. A l'instant t l'ombre de Q tombe en C sur la ligne d'azimut AP d'angle T. La ligne horaire indiquée par l'ombre de C est alors OC qui ne correspond plus, bien évidemment, à l'angle horaire de l'instant t.

Comment donc retrouver le véritable angle horaire t, donc l'heure exacte, à partir de cette fausse ligne horaire tabulaire OC indiquéé par ce gnomon "rogné"?

On remarquera que AQ peut-être considéré comme le gnomon d'un cadran solaire AQQ' homothétique de AO'O. Toutes les lignes horaires tabulaires de AQQ' partant de Q' seront parallèles à celles de AO'O partant de O puisque de même valeur angulaire donnée par la relation classique tgH=sin Φ tgt où Φ est la latitude du lieu où est situé le cadran. Donc à l'instant t, quand l'ombre de O' tombe en P sur la ligne tabulaire OP du cadran OO'A, l'ombre de Q tombe en C sur la ligne tabulaire Q'C du cadran QQ'A et CQ'A=POA=H.

Les triangles CAQ' et CAO permettent d'écrire: $\underline{CA} = \underline{AQ'}$; $\underline{CA} = \underline{OA}$ $\underline{sinH} = \underline{sin(T-H)}$

d'où $\frac{AQ' \sin H}{\sin(T-H)} = \frac{OA \sin H'}{\sin(T-H')}$ (1)

 $AQ'=AQ/tg\Phi$ et $OA=AO'/tg\Phi$ En posant AO'=a et AQ=a' on a OA/AQ'=AO'/AQ=a/a'. De (1) on tire alors

 $a = \frac{\sin H \sin(T-H')}{\sin H' \sin(T-H)}$ (2)

Bien que H' corresponde à un temps faux, sa valeur angulaire est bien réelle et donnée par lecture directe du cadran. Le "faux" temps correspondant à H' sera appelé t'. Développons (2):

a = sinHsinTcosH'-sinHsinH'cosT

a' sinH'sinTcosH-sinH'sinHcosT

divisons par cosT

 $a = \frac{\sin HtgTcosH' - \sin HsinH'}{}$

a' sinH'tgTcosH-sinHsinH'

divisons par sinH

a = tgTcosH'-sinH'

a' tgTsinH' -sinH' tgH

divisons par sinH'

 $\begin{array}{rcl}
a & = & \underbrace{tgT} & -1 \\
tgH' & & \\
a' & & \underbrace{tgT} & -1 \\
tgH & & \\
\end{array}$

tgT - sinΦtgt'

 $a = \sin \Phi t g t$

a' tgT - sinΦtgt sinΦtgt

$$a = tgt (tgT-sin\Phi tgt')$$

a' tgt'(tgT-sinΦtgt)

L'azimut T est donné entre autre par la relation classique:

$$tgT = \underline{\sin t}$$
 où Φ est la latitude et δ la déclinaison du soleil. $\sin\Phi cost-cos\Phi tg\delta$

Remplaçons donc tgT par sa valeur et l'on obtient:

$$\begin{array}{rcl} & & & & & & & & \\ \text{tgt sint} & & & & & - \text{ tgt sin}\Phi \text{ tgt'} \\ \text{a} & & & & & & & \\ \text{a'} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \text{sin}\Phi \text{cost'-cos}\Phi \text{tg}\delta & & & & \\ \end{array} = \begin{array}{rcl} & & & & & & \\ \text{tgt'sint} & & & & - \text{tgt'sin}\Phi \text{tgt} \\ & & & & & & \\ \text{sin}\Phi \text{cost'-cos}\Phi \text{tg}\delta & & & \\ \end{array}$$

 $tgt sint - sin\Phi cost tgt sin\Phi tgt' + cos\Phi tg\delta tgt sin\Phi tgt'$ = $tgt'sint - sin\Phi cost tgt' sin\Phi tgt + cos\Phi tg\delta tgt'sin\Phi tgt$

tgt $sint - sint sin^2\Phi tgt' + sin\Phi cos\Phi tgt tgt'tg\delta$ tgt'sint - sint $sin^2\Phi tgt' + sin\Phi cos\Phi tgt tgt'tg\delta$

divisons par tgt

$$\underline{a} = \underline{\sin t} - \underline{\cos t} \underline{\sin^2 \Phi} \underline{tgt'} + \underline{\sin \Phi} \underline{\cos \Phi} \underline{tgt'} \underline{tg\delta}$$

$$\underline{a'} \underline{tgt'} \underline{\cos t} - \underline{\cos t} \underline{\sin^2 \Phi} \underline{tgt'} + \underline{\sin \Phi} \underline{\cos \Phi} \underline{tgt'} \underline{tg\delta}$$

atgt'cost - acost $\sin^2\Phi$ tgt' + $a\sin\Phi\cos\Phi$ tgt'tg δ = a'sint - a'cost $\sin^2\Phi$ tgt' + a'sin $\Phi\cos\Phi$ tgt'tg δ cost(atgt'-asin² Φ tgt')+asin Φ cos Φ tgt'tg δ = cost(a'tgt-a'sin² Φ tgt')+a'sin Φ cos Φ tgt'tg δ cost(a'tgt-a'sin² Φ tgt'-atgt'+asin² Φ tgt') = (a-a')sin $\Phi\cos\Phi$ tgt'tg δ cost(a'tgt-atgt'+(a-a')sin² Φ tgt')=(a-a')sin Φ cos Φ tgt'tg δ

Posons
$$A = (a-a')\sin^2\Phi tgt'-atgt'$$
 et $B = (a-a')\sin\Phi \cos\Phi tgt'tg\delta$
On obtient $\cos(a'tgt+A) = B = a'\sin t + A\cos t$

En posant tg(t/2) = n on peut avoir le sinus et le cosinus par les relations classiques:

$$\sin(t/2) = \frac{2n}{1+n^2}$$
 $\cos(t/2) = \frac{1-n^2}{1+n^2}$

d'où l'équation a'
$$\frac{2n}{1+n^2}$$
 + A $\frac{1-n^2}{1+n^2}$ -B = 0

et a'
$$2n+A-An^2-B-Bn^2=0$$
 <===> (B+A) $n^2-2a'n+(B-A)=0$ équation de type $ax^2+bx+c=0$

Cette équation admet 2 racines. Le terme b est constamment pair puisque multiple de 2. Donc on peut appliquer la formule simplifiée de résolution des racines.

SQR (abcd) signifie racine carrée de abcd.

On aura donc en posant b'=b/2 $n=\underline{-b'+ou-SQR(b'^2-ac)}$

Ici b'=-a', a=(B+A), c=(B-A)

Donc

$$n' = \underline{-(-a') + SQR((-a')^2 - (B+A)(B-A)}) = \underline{a' + SQR(a'^2 - B^2 + A^2)}$$

B+A
B+A

 $n'' = a' - SQR(a'^2 - B^2 + A^2)$ B+A

Connaissant n on prend arc tangente n et en le multipliant par 2 on trouve t angle horaire cherché. 1 heure étant égale à 15°, on divisera cet angle par 15 pour avoir la valeur en heures depuis midi.

11 à 12 <==> 12 à 13 = 1 heure

10 à 12 <==> 12 à 14 = 2 heures etc..

Un exemple numérique pour terminer:

Un gnomon construit à Marseille de latitude 43,3° mesurant théoriquement 1,5 m. de haut et ne mesurant plus au jour de lecture que 1,43 m. indique 14h 30'. Quelle heure est-il réellement au soleil le jour de l'hiver où la déclinaison du soleil est égale à -23,44°?

On a t'=14h30-12=2h30 <=> 2,5X15 = 37,5°

On trouve A=(150-143)sin²43,3tg37,5-150tg37,5=-112,5726796

B=-1,162359288

a=150 cm b=143 cm ====> Δ =33120,25711 SQR Δ =181,989717

n'=-2,857428284===>arctgn'=t/2=-70,71°===> t=-141,42° n''=0,3428118316===>arctgn''=t/2=18,92°==>t=37,84464264°

Cette dernière valeur est celle attendue et correspond à 2h 31'22" de l'aprés-midi. Le cadran au gnomon rogné a donc un retard de 1' 22".

Les calculs refaits pour le jour de l'été où la déclinaison du soleil est égale à 23,44° montrent que le retard est de 4'18" pour la même ligne horaire.

Si le gnomon AQ ne mesure plus que 125 cm au-lieu de 150 le jour de l'été dans les mêmes conditions le retard est de 17' 4''.

Deux remarques pour finir: si ce gnomon indique 14h30' alors qu'il est 14h47'4'' on peut se demander quelle heure il sera lorsqu'il indiquera 14h 47'4''. L'application des calculs précédents montre qu'il sera 15h4'52''. Donc pour "combler" ce retard de 17'4'' le gnomon rogné aura mis 17'48''.

Le gnomon peut aussi être plus long que le gnomon théorique (fig.2). Dans ce cas l'heure indiquée retardera le matin et avancera l'aprés-midi. Les calculs sont identiques: le cadran AQQ' est > AOO' et a'>a, t'>t.

Ce travail fait suite à la lecture d'un trés intéressant article de Monsieur Denis Savoie dans le n° 51 de la revue Observations et travaux éditée par la Société Astronomique de France 3 rue Beethoven 75016 Paris. Bien que la méthode mathématique soit différente les résultats numériques sont identiques.

Jean PAKHOMOFF 63 Allée de Crète Le Collet des Comtes 13011 Marseille Phone Fax 0491894497 FRANCE

THEORIE ET

PRATIQUE DES CADRANS

ANALEMMATIQUES

CIRCULAIRES DE

FOSTER ET LAMBERT



JEAN PAKHOMOFF

2è PRIX INTERNATIONAL DE GNOMONIQUE

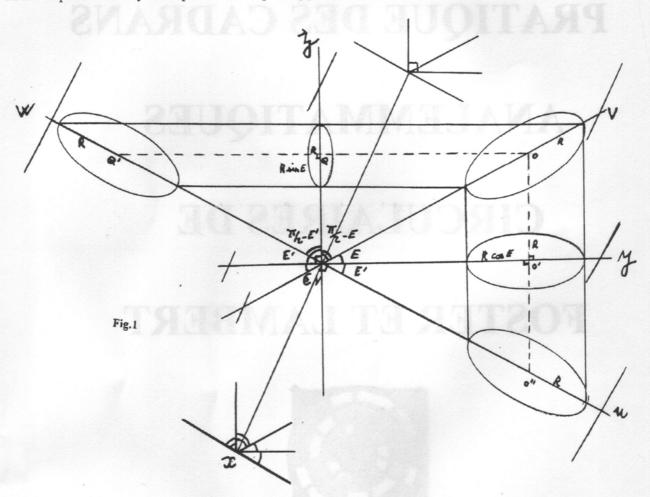
En 1640 Vaulezard donne une méthode de construction du cadran

analemmatique, projection de l'équateur céleste sur l'horizon.

50 ans plus tard, Samuel Foster remarque qu'une même ellipse correspond à la projection de 2 cercles et donc qu'un même cercle projeté sur 2 plans perpendiculaires entre eux puis sur leur symétrique par rapport à chacun de ces plans donne naissance à 2 ellipses différentes et à 2 cercles identiques à ce cercle origine.

C'est là je pense la première idée du cadran de J. Henri Lambert. Lambert construisit ce cadran en 1777 année même de sa mort.

Soit donc fig.1 un plan horizontal $x \in y$ et un plan $x \in v$ faisant un angle E avec $x \in y$. Donnons nous un plan $x \in u$ symétrique de $x \in v$ par rapport à $x \in y$ en prenant E = E'.



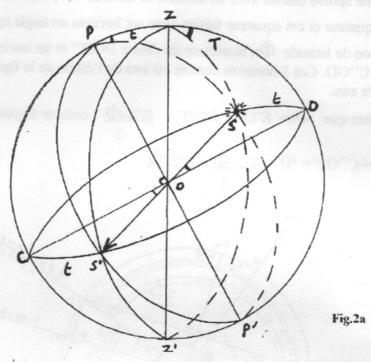
Le plan $x \in v$ sera de même symétrique du plan $x \in v$ (prolongement du plan $x \in v$) par rapport au plan $x \in z$ car $\pi/2$ -E' = $\pi/2$ -E. Le cercle O de rayon R de $x \in v$ projeté sur $x \in v$ donne l'ellipse de centre O', de grand axe 2R et de petit axe 2R cos E.

Les projetantes redonnent sur le plan x & u le cercle O'' égal au cercle de centre O (la projection du cercle de centre O'' est en effet l'ellipse de centre O').

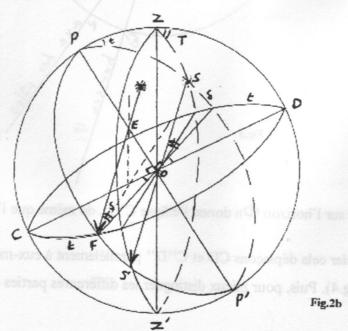
La projection du cercle de centre O de x ε v sur le vertical x ε z donne l'ellipse de centre Q de grand axe 2R et de petit axe 2R cos ($\pi/2$ -E); les projetantes redonnent le cercle de centre Q'égal au cercle de centre O sur le plan symétrique x ε w.

Les plan x & z et x & y étant bissecteurs de plans faisant entre eux 2 angles supplémentaires sont donc perpendiculaires.

Là est le principe du cadran de Foster et Lambert analemmatique circulaire nord et sud. Nous nous servirons ci-dessous de la démonstration de Terpstra (1951) pour ce qui concerne l'analemmatique elliptique de Vaulezard (1644). Soit donc fig.2a une sphère céleste de centre O, son équateur céleste COD, son axe des pôles POP', le soleil le jour des équinoxes dans l'équateur donc, à un instant t matèrialisé par l'intersection de 3 grands cercles de cette sphère:



le cercle horaire PSP'd'angle horaire t, le cercle vertical ZSZ' d'angle azimutal T et le grand cercle de l'équateur CSD de diamètre COD. Le rayon solaire passant par l'intersection du cercle horaire et du vertical est contenu entièrement dans l'équateur et vient indiquer l'heure correspondant à l'instant t sur la grande horloge équatoriale où 15° = 1 heure. Observons maintenant la figure 2b où le soleil se trouve au même instant à une époque différente des équinoxes.



Dans ce cas de figure on se situe dans l'hémisphère nord lorsque la déclinaison est>0.

Le rayon solaire SO, intersection du cercle horaire et du vertical passant par l'astre n'est plus contenu dans l'équateur mais perce la sphère céleste en S'. Pour que ce rayon indique l'heure sur la grande horloge équatoriale il convient de le déplacer parallèlement à lui-même dans le plan de son cercle horaire: en le remontant l'été et le descendant l'hiver.

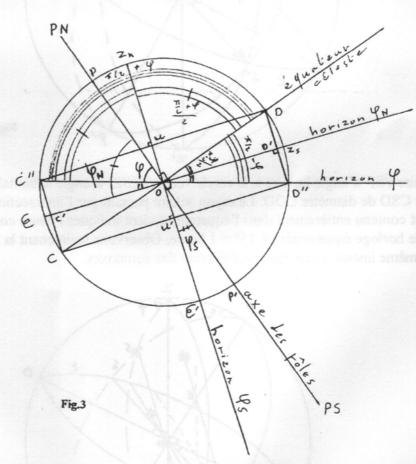
Lorsque ce rayon coupe l'équateur en F il indique l'heure t et coupe alors l'axe des pôles en E. C'est là l'idée de Terpstra. OS et FE sont parallèles et toutes deux contenues dans le plan du cercle horaire t. Elles font donc avec le diamètre OF le même angle égal à la déclinaison .

La figure 3 montre une sphère céleste avec un horizon de latitude Φ , l'axe des pôles perpendiculaire à l'équateur et cet équateur faisant avec cet horizon un angle égal à $\pi/2$ - Φ .

Choisissons un horizon de latitude Φ n bissecteur du dièdre DOD'' et un horizon de latitude Φ s bissecteur du dièdre C''OD. Ces 2 horizons comme vu lors de l'étude de la figure 1 sont perpendiculaires entre eux.

On voit immédiatement que $\Phi_{S}=\epsilon'OP'=DOD'=\frac{\pi/2-\Phi}{2}$ comme angles à côtés perpendiculaires.

De même $\Phi_n = \Phi + C''OC' = \Phi + \pi/2 - \Phi = \pi/2 + \Phi$.



L'équateur projeté sur l'horizon Φ n donne l'ellipse C'D', de même que l'horizon Φ projeté sur Φ n.

Pour mieux apprécier cela déplaçons CD et C''D'' parallèlement à eux-mêmes de façon que C et C'' viennent en E (fig.4). Puis, pour mieux distinguer les différentes parties des éléments, faisons

glisser CD sur ED d'une longueur E C et C''D'' sur ED'' d'une longueur EC'' de façon à ce que EC soit égal à EC''.

On retrouve l'équateur COD de la figure 2b avec le rayon solaire coupant l'axe du monde en E et l'équateur en F.

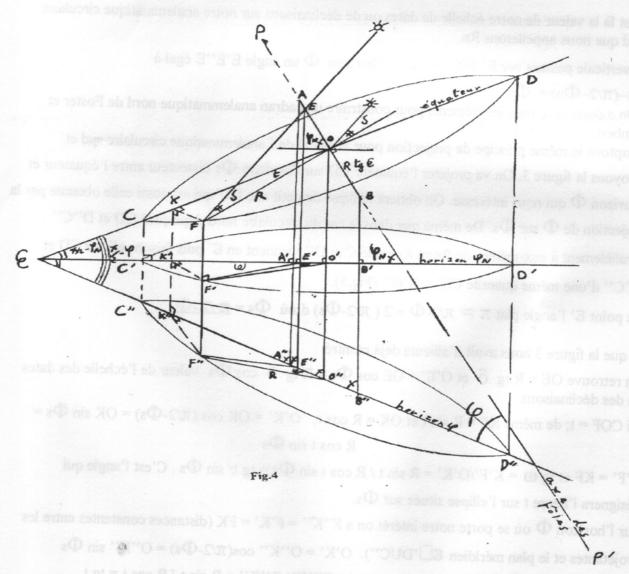
Le rayon de la sphère céleste étant R on a EO=R tg δ.

Le jour de l'été δ est maximum et égal pendant encore de nombreuses années à 23.44°. E est alors en A. De même le jour de l'hiver δ est à son minimum égal à -23.44° et E est en B. On a KF = R sin t et OK = R cos t.

Projetons maintenant l'équateur sur l'horizon Φn . On obtient un analemmatique classique de Vaulezard de centre O', de grand axe 2R et de petit axe $2R\cos(\pi/2-\Phi n)=2R\sin\Phi n=C'D'$. O'K' = OK $\cos(\pi/2-\Phi n)=OK\sin\Phi n=R\cos t\sin\Phi n$.

K'F' = KF et tg
$$\omega = \underline{K'F'} = \underline{R \sin t} = \underline{tg t}$$
.

O'K' $R \cos t \sin \Phi n \sin \Phi n$



C'est cet angle ω qui désignera l'heure t sur l'ellipse.

O'E' = OE $\cos \Phi_n$ = R tg $\delta \cos \Phi_n$. C'est là la valeur de l'échelle des dates (ou des déclinaisons).

Sur l'horizon Φ qui nous intéresse en tout premier plan puisque c'est l'horizon sur lequel sera construit notre cadran on aura F''K'' = F'K'=FK comme distances constantes entre la projetante FF'F" et le plan méridien EDD'D").

De O'K' = O''K'' $\cos (\pi/2 - \Phi_n) = O''K'' \sin \Phi_n$ on tire O''K'' = O'K' / $\sin \Phi_n = R \cos t$. $FK = F''K'' = R \sin t \text{ et tg } \omega' = F''K'' / O''K'' = R \sin t / R \cos t = \text{tg t. D'où } \omega' = \text{t.}$

O'E' = O''E'' $\cos(\pi/2 - \Phi n)$ $\cot DED' = \pi/2 - \Phi n$ et par hypothèse D'ED'' = DED'. Donc O'E' = O''E'' $\sin \Phi_n$.

$$O''E'' = \underline{O'E'}, = \underline{OE\cos\Phi_n}, = \underline{Rtg}\,\underline{\delta}$$

$$\sin\Phi_n \qquad \sin\Phi_n \qquad tg\,\Phi_n$$

et O''E'' =
$$\frac{R \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi/2 + \Phi}{2}\right)}$$

C'est là la valeur de notre échelle de dates ou de déclinaisons sur notre analemmatique circulaire nord que nous appellerons Rn.

La verticale passant par E' fait alors avec l'horizon Φ un angle E'E'' ϵ égal à $\pi/2 - (\pi/2 - \Phi_n) = \Phi_n$

On a donc ainsi tous les éléments pour construire un cadran analemmatique nord de Foster et Lambert.

Adoptons le même principe de projection pour le calcul de l'analemmatique circulaire sud et revoyons la figure 3. On va projeter l'équateur CD sur l'horizon Φ s bissecteur entre l'équateur et l'horizon Φ qui nous intéresse. On obtient l'ellipse de petit axe UU'qui est aussi celle obtenue par la projection de Φ sur Φ s. De même que dans le cas du circulaire nord déplaçons CD et D''C'' parallèlement à eux-mêmes de façon à ce que C et D'' viennent en E' puis faisons glisser CD et D''C'' d'une même quantité CE' = E'D'' (Fig.5).

Au point E' l'angle plat
$$\pi = \pi/2 - \Phi + 2 (\pi/2 - \Phi s)$$
 d'où $\Phi s = \pi/2 - \Phi$

ce que la figure 3 nous avait d'ailleurs déjà montré.

On retrouve OE = R tg $\,\delta\,$ et O'E' = OE $\cos\Phi_s$ = R tg $\,\delta\,$ $\cos\Phi_s\,$ valeur de l'échelle des dates ou des déclinaisons.

Ici COF = t; de même KF = R sin t et OK = R cos t; O'K' = OK cos
$$(\pi/2 - \Phi_s)$$
 = OK sin Φ_s = R cos t sin Φ_s

 $K'F' = KF \text{ et tg } \omega = K'F'/O'K' = R \sin t \ / \ R \cos t \sin \Phi_S = tg \ t \ / \sin \Phi_S \ . \ C'est \ l'angle \ qui$ désignera l'heure t sur l'ellipse située sur Φ s.

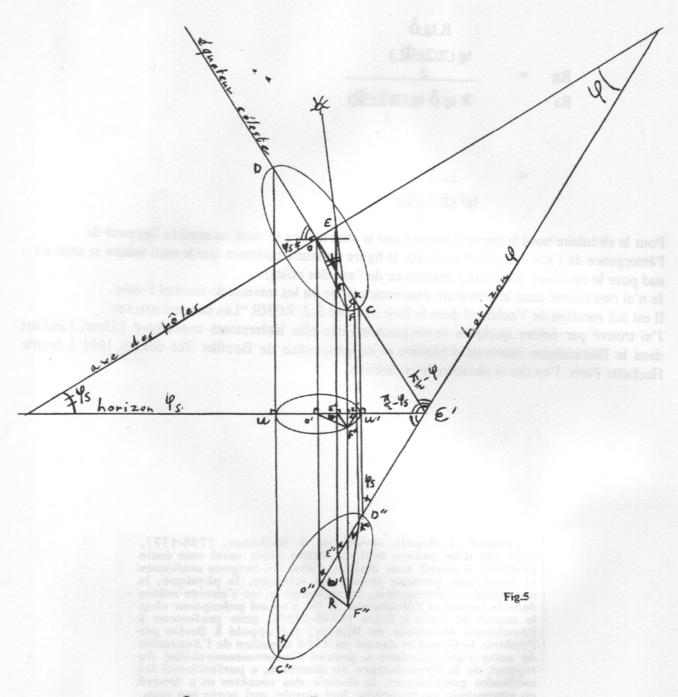
Sur l'horizon Φ où se porte notre intérêt on a F''K'' = F'K' = FK (distances constantes entre les projetantes et le plan méridien \mathbb{E}^{n} 'DUC''). O'K' = O''K'' $\cos(\pi/2 - \Phi_s) = O''K'' \sin \Phi_s$ $tg \omega' = F''K''/O''K'' = R \sin t / R \cos t = tg t$ $O''K'' = O'K'/\sin\Phi_S = R\cos t$.

$$d'où \Omega' = t$$

 $d'où\ \omega'=t$ De même O'E' = O''E'' $\cos\ (\pi/2-\Phi s)=O''E''$ $\sin\ \Phi s.$

O''E'' = O'E'/sin
$$\Phi_s$$
 = OE $\cos\Phi_s$ / $\sin\Phi_s$ = R tg δ / tg Φ_s = R tg δ . tg $(\pi/2-\Phi)$

C'est la valeur de l'échelle des dates ou des déclinaisons sur notre analemmatique circulaire sud.



En remarquant que $(\pi/2-\Phi)/2=\pi/2-(\pi/2+\Phi)/2$ on peut écrire que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi/2 - \Phi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi/2 + \Phi}{2}\right)$$

D'où O''E'' = R tg
$$\delta$$
 tg $(\pi/2+\Phi)$

que nous appellerons Rs.

Ainsi, si les rayons des cercles analemmatiques nord et sud ont même valeur, la valeur de la table des dates ou des déclinaisons varie par contre dans le rapport

$$Rn = \frac{R \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} (\pi/2 + \Phi)}$$

$$Rs = \frac{2}{R \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} (\pi/2 + \Phi)}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}^2 (\pi/2 + \Phi)}$$

Pour le circulaire nord la figure 4 montre que le midi solaire se situe au nord (a l'opposé de l'émergence de l'axe des pôles) alors que la figure 5 montre aisément que le midi solaire se situe au sud pour le circulaire sud (vers l'émergence de l'axe des pôles).

Je n'ai rien trouvé dans la littérature concernant la vie ou les travaux de Samuel Foster. Il est fait mention de Vaulezard dans le livre de René R.J. ROHR "Les cadrans solaires".

J'ai trouvé par contre quelques renseignements des plus intéressants concernant J.Henri Lambert dans le Dictionnaire universel d'histoire et de géographie de Bouillet 32è édition 1901 Librairie Hachette Paris. J'en tire la photocopie ci-dessous.

tambert (J.-Henri), savant, né à Mulhouse, 1728-1777, était fils d'un pauvre tailleur. Après avoir suivi une école gratuite, il apprit sans maître, outre les langues anciennes et modernes, presque toutes les sciences, la physique, la mécanique, l'astronomie, la philosophie, et s'exerça même dans la poésie et l'éloquence. Il fut d'abord précepteur chez le comte de Salis à Coire (1748-1758), puis professeur à l'Académie électorale de Munich; fut appelé à Berlin par Frédéric le Grand et devint en 1764 membre de l'Académie de cette ville. Lambert a prouvé l'incommensurabilité du rapport de la circonférence au diamètre, a perfectionné les méthodes géodésiques, la théorie des comètes et a trouvé en astronomie un théorème fort simple, qui porte son nom. Outre une quantité innombrable de mémoires, on a de lui : en physique et en mathématiques, la Route de la lumière, 1759; la Perspective libre, 1759; Photometria, de gradibus luminis, 1760; Lettres cosmologiques (en all.), 1761; Echelles logarithmiques, 1761; Hygrométrie, 1770; Pyrométrie, 1779; — en philosophie, Novum Organum ou Nouvelle Logique, en all., 1763; Architectonique, en all., 1771, etc.

D'où O'E' = R te o ta (22+Q)

Pour terminer ce travail je ferai un aparté à propos du tracé de l'ellipse point par point (ou au moins de demi heure en demi heure) à partir de l'angle ω dont il a été question ci-dessus (fig.6). Soit Oxy un système d'axes orthonormés. Portons sur Ox le grand axe 2a et sur Oy le petit axe 2b.

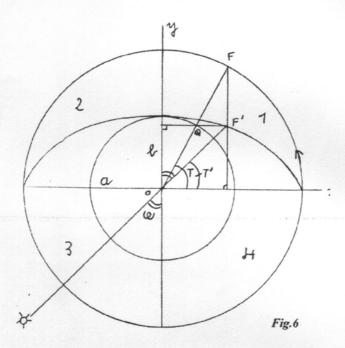
a et b seront 2 rayons de cercles concentriques en O.

Menons un rayon OF faisant avec l'axe Ox un angle T dans le sens trigonométrique. Ce rayon coupe le petit cercle en Q. Par F menons la perpendiculaire à Ox et par Q la perpendiculaire à Oy. Ces deux perpendiculaires se coupent en F'. Les coordonnées de F' sont

$$x = OF \cos t = a \cos T$$

 $y = OQ \sin t = b \sin T$

Le point F' est donc sur l'ellipse de centre O, de grand axe 2a et de petit axe 2b, ses coordonnées correspondant à l'équation paramétrique de l'ellipse.



Le point F' fait avec l'axe Ox un angle T' tel que tg T' = y/x = (b/a) tg T.

Considérons maintenant que l'axe Oy est la méridienne et l'axe Ox la direction est-ouest.

Considérons qu'un angle horaire t se compte matin comme aprés-midi de façon arbitraire à partir de la méridienne. Nous aurons ainsi 13 h = 11 h <=> 15° etc...

les points d'heure de l'aprés-midi se trouveront dans les secteurs 1 et 4 du cercle trigonométrique et

l'angle T' à considérer sera égal à $\pi/2-\omega$ sachant que tg $\omega=$ tg t/ $\sin\Phi$ comme nous l'avons vu ci-dessus.

Les points d'heure du matin se trouvent dans les secteurs 2 et 3 et l'angle T' à considérer est alors

égal à $\omega + \pi/2$. On retrouve dans les deux cas l'angle T par la relation tg T = (a/b) tg T'.

Puis x et y par les équations paramétriques.

Lorsque les points d'heure sont en 1 et 4 il n'y a aucune ambiguité:

En 1, $\pi/2-\omega$ correspond à un angle compris entre 0 et 90°.

En 4, $\pi/2-\omega$ sera <0. T sera compris entre 0 et -90° et x et y auront les valeurs correspondantes à la position de F'.

En 2, on aura un angle ω + π /2 compris entre 90 et 180°. On rajoutera donc π à la valeur de l'arc tangente.

En 3, $\omega + \pi/2$ sera compris entre 180 et 270°. La calculatrice donnera donc un angle compris entre 0 et 90° et il conviendra d'ajouter aussi 180°.