

2. La méthode de la planchette

2.1 Le principe général

Cette méthode consiste à relever sur un plan horizontal la direction de la projection de l'ombre d'un fil à plomb. La mesure de cette direction combinée avec celle du soleil au même instant fournira la valeur de la déclinaison. Précisons qu'il n'est nul besoin de déterminer de méridienne pour obtenir l'azimut du soleil ou la déclinaison du mur. Pour l'azimut du soleil, c'est le calcul qui nous donnera sa valeur à tout instant désiré.

La position de l'ombre prise par rapport à la perpendiculaire au mur, donnera accès au signe de la déclinaison ainsi qu'à la formule à utiliser (voir tableau 1, §2.3.4, pour toutes les configurations possibles des ombres du fil à plomb ainsi que les formules correspondantes). Ceci sera nécessaire et suffisant pour déterminer la nature déclinante du cadran. On aura alors la mesure algébrique de l'angle orienté qu'est la déclinaison.

Pour obtenir une valeur plus précise on répétera un certain nombre de fois l'expérience au voisinage d'une même heure à une date donnée, puis sur plusieurs dates à intervalles suffisants.

La valeur moyenne calculée sera considérée comme un estimateur⁽ⁱ⁾ de la valeur vraie recherchée, de même que l'écart type du jeu complet des mesures sera considéré comme caractérisant la dispersion des mesures autour de l'estimateur. L'intervalle de confiance (à 95% par exemple) permettra d'obtenir un encadrement de la valeur moyenne dans l'hypothèse où les erreurs de mesures obéissent à une loi normale (gaussienne) et sera donc pour nous le meilleur intervalle dans lequel est censé se trouver la valeur vraie de la déclinaison. On pourra l'associer à la précision de l'estimateur de la valeur vraie.

2.2 Le dispositif expérimental

2.2.1 Le matériel

La liste ci-dessous donne le strict minimum de ce dont aura besoin l'apprenti gnomoniste pour effectuer ses mesures.

- Une table de dimension 80×80 cm au minimum.
- Un niveau à bulles (ou deux pour plus de commodité) pour assurer l'horizontalité de la table.
- Un trépied de photographe ou d'un télescope (tripode).
- Un fil à plomb :
 - fil épais (diamètre ≈ 8 mm)⁽ⁱⁱ⁾ ;
 - masse.
- Système amortisseur (récipient + eau).
- Une règle graduée (50 cm).
- Du Papier kraft blanc et de dimension suffisante (100×80 cm).
- Du Ruban adhésif pour fixer la feuille de papier kraft sur la table.
- Un bon chronomètre réglé quelques instants avant la série de mesures sur l'horloge parlante.
- Un crayon à papier à pointe fine pour marquer toutes les informations utiles qui seront exploitées ultérieurement.

2.2.2 La mise en place du montage

Il faudra dans l'ordre effectuer les opérations suivantes :

- placer un "plan de travail" contre le mur ;
- fixer le papier kraft et marquer toutes les références utiles à une exploitation ultérieure de la feuille (Cf. *Annexe A*) ;
- poser tout le matériel nécessaire sur la table avant le réglage de l'horizontalité ;
- assurer à l'aide de deux niveaux à bulle l'horizontalité du plan de travail (Opération délicate et un peu longue ; donc avoir un peu de patience et du soin) ;
- tracer sur la feuille de papier une parallèle au mur et ce, au plus près du mur ;
- positionner et régler le trépied et le fil à plomb afin d'obtenir une ombre exploitable sur la feuille ;
- assurer la stabilité du fil à plomb par le système amortisseur.

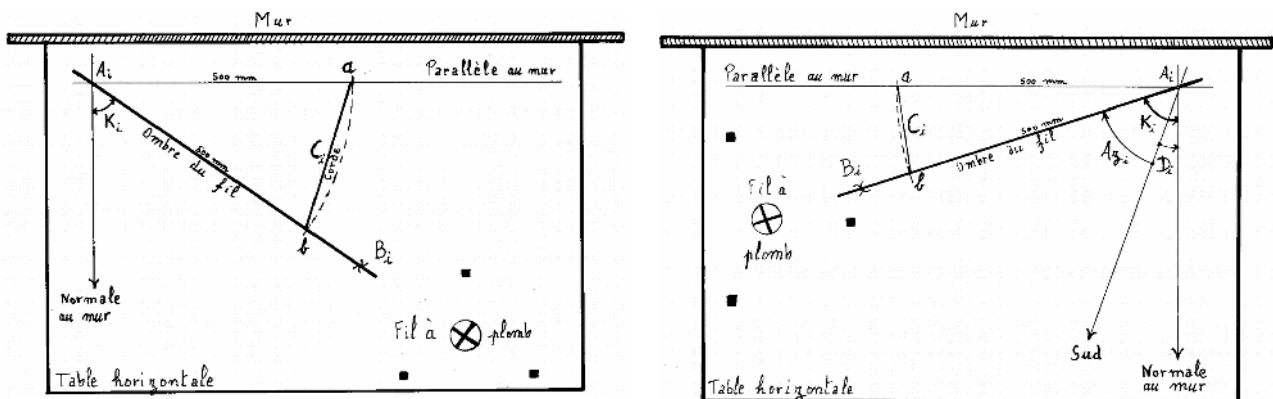
2.3 Acquisition et traitement des mesures

Pour une date donnée, on effectue une série de mesures d'indice $i=1, \dots, n$. Dans tout ce qui suit et pour simplifier, on considérera une mesure numérotée i . Toutes les grandeurs, y compris le temps, seront affectées de l'indice i , signifiant ainsi qu'elles se rapportent à la i -ième mesure d'une même expérience. L'entier n sera donc le nombre total de mesures effectuées à une date donnée.

2.3.1 Le mode opératoire

Le schéma du montage ainsi que les notations utilisées se trouvent dans les figures 1 et 2 ci-dessous.

Fig. 1 & 2 : Les notations utilisées et les angles mesurés



Après la mise en place du montage, les relevés de la direction de l'ombre peuvent commencer. Simultanément si possible :

- marquer deux points sur un *même bord* de l'ombre ;
- l'un noté A_i , intersection de l'ombre avec la parallèle au mur⁽ⁱⁱⁱ⁾ ;
- l'autre noté B_i , le plus éloigné possible de cette parallèle, donc au plus près du pied du fil à plomb ;
- noter l'heure en repérant d'abord les secondes, les minutes, et enfin l'heure ;
- numéroté soigneusement le couple de points $(A_i; B_i)$ d'après les notations employées sur les figures précédentes.

Pour recommencer, d'une part sans devoir attendre que l'ombre se soit nettement déplacé, et d'autre part pour obtenir un plus grand nombre de mesures centrées autour d'une même heure^(iv), on procède de la façon suivante :

- déplacer légèrement le système {trépied + fil à plomb} de façon à obtenir une ombre voisine de la précédente ;
- contrôler et assurer la stabilité du fil à plomb ;
- marquer deux points bien distincts situés toujours sur le même bord de l'ombre et ce, pour toute la série. Ceci est important.
- leur attribuer un numéro (*indice i*) suivit de l'instant du marquage ;
- et ainsi de suite...

Réaliser au moins une dizaine de relevés d'ombre ($n=10$).

Ce travail constitue la première étape de la méthode de la planchette.

2.3.2 Mesure de l'angle K_i

On exploite maintenant la feuille de mesure (on est donc au bureau d'étude).

Il faut tout d'abord déterminer les angles formés par les directions des ombres du fil à plomb avec la normale au mur. On se référera aux figures 1 et 2 pour le schéma de principe.

On désignera par K_i l'angle entre l'ombre A_iB_i et la normale au mur (demi-droite qui n'est pas utile de matérialiser). Pour mesurer K_i on utilisera de préférence la méthode des cordes, qui, bien que relativement ancienne, donnera la meilleure précision possible (en tout cas bien mieux qu'un rapporteur du commerce !). Et ce qui est très important c'est que l'on pourra évaluer l'erreur théorique commise sur cette façon de procéder et c'est ce qui sera fait ci-après.

On mesure la longueur ab , où a et b sont respectivement les intersections de la parallèle au mur et de la direction de l'ombre avec l'arc de cercle de centre A_i et de rayon $R_i = 500 \text{ mm}$. Ce sera la longueur de la corde notée C_i .

On obtiendra K_i par la relation^(v) :

$$\sin K = 1 - 2C^2$$

(C_i étant à exprimer en mètre).

Puis, on réitère l'opération pour autant de direction d'ombres que l'on a relevées ($i = 1, \dots, n$). On pourra très efficacement consigner toutes ces informations dans un tableau (cf. *annexe A*).

2.3.3 Calcul de l'azimut du soleil

Cet azimut peut être obtenu au moins de trois façons :

- à partir d'une formule issue de la trigonométrie sphérique ;
- à partir d'une publication des éphémérides ;
- à partir d'un logiciel d'astronomie fournissant les éphémérides du soleil.

Pour ce qui nous concerne on a utilisé le logiciel "éphémérides" (fonctionnant sous Windows) fournissant directement l'argument Az_i , évitant ainsi de passer par les calculs de l'angle horaire (t_i) et de la déclinaison du soleil (δ_i). (On prendra garde à l'azimut : ce logiciel compte les azimuts depuis le nord)

Pour les calculateurs, on donne en *annexe B*, un organigramme de calcul mettant en relation les données astronomiques indispensables pour effectuer la détermination de la déclinaison gnomonique.

2.3.4 Calcul de la déclinaison gnomonique D_i

On dispose à ce stade des angles K_i et Az_i . Ces angles ne peuvent pour l'instant être combinées, car l'un est un angle géométrique (K_i), l'autre un angle orienté^(vi) (Az_i). Pour déterminer à la fois la valeur et le signe de D_i on procède en deux temps.

Tout d'abord, on considère la valeur absolue de l'azimut, puis :

1. On calcule la valeur géométrique en choisissant dans le tableau 1 ci-dessous la relation qui donne D_i .

2. Le signe de D_i se lit dans ce tableau sur la même ligne correspondant au cas de figure.

L'angle orienté D_i est ainsi complètement déterminé.

On trouvera ci-dessous un tableau contenant toutes les situations possibles entre l'ombre relevée, la direction du méridien et la normale au cadran. Il suffira simplement de comparer la valeur absolue des angles Az et K pour savoir quelle est la formule à utiliser. Ce tableau fournit également le signe de la déclinaison et donc la nature déclinante du cadran (matin ou soir).

Exemple :

Soit le 13/03/96, à 13^h53^{mn}15^s TU :

$$K=30,13^\circ \quad \text{et} \quad Az=+33,08^\circ$$

Calculé Mesuré

avec une ombre située à gauche de la normale au mur. Quelle est alors la déclinaison de ce mur ?

Solution : On constate que $Az > 0$ et $|Az| > K$. Dans le tableau 1 on lit que la formule à utiliser pour calculer D est : $D = |Az| - K$, puis que le cadran est déclinant du "soir".

Conclusion : $D = +2,95^\circ$.

Tab.1 : Tableau récapitulatif des positions des ombres dans la méthode de la planchette

	Signe	Position de l'ombre par rapport à la normale au mur		
		$ Az < K$	$ Az > K$	$ Az < K$ ou $ Az > K$
Cadran déclinant du MATIN	-	Ombre à GAUCHE avec $Az > 0$	Ombre à DROITE avec $Az < 0$	Ombre à GAUCHE* avec $Az < 0$
Cadran déclinant du SOIR	+	Ombre à DROITE avec $Az < 0$	Ombre à GAUCHE avec $Az > 0$	Ombre à DROITE avec $Az > 0$
FORMULES		$D = K - Az $ <small>D et Az sont de signes contraires</small>	$D = Az - K$ <small>D et Az sont de même signe</small>	$D = Az + K$ <small>D et Az sont de même signe</small>

* Si cette condition se produit c'est que l'ombre du fil à plomb se trouve entre la méridienne et la normale au cadran

2.3.5 Les modèles de grille de mesure

Afin de faciliter la lecture des données, les calculs et leurs exploitations tant sur le terrain qu'au bureau, on conçoit aisément que seul un tableau ou une grille permet cette souplesse et la rigueur qu'exige toute expérience. On trouvera en annexe des modèles de grilles, parmi d'autres, qui ont servi à la campagne de mesure. On en donnera deux, suivant que l'on utilise ou non un logiciel pour les éphémérides. Se reporter à l'annexe A.

3. Essai sur l'analyse des erreurs de mesures

3.1 Classement des actions expérimentales

Toute la description au §2 a porté sur une seule mesure numérotée i , et dont le traitement a conduit à D_i . Étant donné que l'on a n mesures effectuées à une date donnée, on aura alors un ensemble de n valeurs : $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$. Ensemble de valeurs dont la dispersion dépendra du soin de l'expérimentateur, tant lors de l'installation que lors de l'exploitation. Si l'on veut tenter de déceler les différentes sources d'erreurs responsables d'une dispersion faisons d'abord un classement de toutes les actions effectuées lors de cette expérience et attribuons à chacune d'elles une erreur probable notée $\varepsilon_{\text{action } n^\circ i}$. La bonne compréhension de toutes les manipulations effectuées au cours de cette expérience permet de ne retenir que les actions qui sont susceptibles de produire une part d'erreur non négligeable.

Tab2. : Table des erreurs commises dans la méthode de la planchette

Actions effectuées	Erreurs	
- Pour la mesure de Az :		
1. Relevé de l'instant du marquage,	ε_t	ΔAz
2. Calcul de l'azimut du soleil,	ε_{Az}	
- Pour la mesure de l'angle K :		
1. Report sur la feuille d'une parallèle au mur,	$\varepsilon_{//,1}$	ΔK
2. Horizontalité de la table,	$\varepsilon_{//,2}$	
3. Report d'une longueur de 500 mm,	$\varepsilon_{//,3}$	
4. Tracé de la demi-droite $A_i B_i$,	$\varepsilon_{//,4}$	
5. Stabilité du fil à plomb,	$\varepsilon_{//,5}$	
6. longueur utile de l'ombre,	$\varepsilon_{//,6}$	
7. Problème de pénombre,	$\varepsilon_{//,7}$	
8. Diamètre du fil à plomb,	$\varepsilon_{//,8}$	
9. Mesure de la longueur de la corde,	ε_{corde}	
10. Calcul de l'angle K ,	ε_K	

Le but que l'on se propose est de chercher à évaluer les erreurs $\varepsilon_{\text{action } n^{\circ}i}$, composantes des erreurs sur la détermination des angles K et Az . On montrera qu'il y a deux principales sources d'erreurs dans la détermination de K . L'une que l'on pourra évaluer (ε_K), l'autre qui ne sera pas directement quantifiable car composée de la somme d'erreurs elles-mêmes non quantifiables et probablement corrélées et que l'on désignera par le terme d'erreur de parallélisme ($\varepsilon_{//}$). Une étude statistique s'imposera donc. C'est ce que l'on fera au §4.

3.2 Incertitude sur la déclinaison : ΔD

On suppose que l'incertitude sur la déclinaison gnomonique provient de la superposition de toutes les erreurs engendrées par les actions listées précédemment. Sous cette hypothèse de travail on peut écrire :

$$\Delta D = \Delta Az + \Delta K \quad (1)$$

Où ΔAz et ΔK , représentent les erreurs globales dues aux actions expérimentales.

3.3 Incertitude sur le calcul de l'azimut (ΔAz)

Le calcul de l'Azimut du soleil ne nécessite que la connaissance de l'instant t_i d'une mesure $n^{\circ}i$. L'expérimentateur n'agit sur l'azimut que par l'intermédiaire du seul temps t_i , et on admettra que le temps t_i n'agit que sur la connaissance de $Az_i^{(vii)}$. On admettra également que cet azimut est "correctement" déterminé pour chaque t_i . Ce qui revient à dire que ε_{Az} est parfaitement négligeable devant les erreurs instrumentales ΔK .

Comme le temps est supposé être bien maîtrisé et correctement évalué lors des marquages^(viii), on assure donc que :

$$\Delta Az \ll \Delta K \quad (2)$$

De là, l'incertitude sur la déclinaison devient :

$$\Delta D \approx \Delta K \quad (3)$$

3.4 Incertitude sur la mesure de l'angle K (ΔK)

Il est facile de constater d'après le tableau 2 que l'incertitude sur la mesure de K provient de deux sources bien distinctes :

- du calcul de K après avoir mesuré la corde C ,
- du relevé "physique" de l'ombre sur le papier kraft.

Analysons en détail ces deux sources d'erreur.

3.4.1 Évaluation de l'erreur ε_K sur l'angle K due à une erreur $\varepsilon_{\text{corde}}$ sur la longueur C de la corde

On peut avoir accès à l'erreur théorique commise dans cette méthode de mesure de l'angle K . Partons de la relation vue au §2.3.2 (pour un rayon de 500 mm et pour une mesure n° i) :

$$\sin K = 1 - 2C^2 \quad (4)$$

en différenciant et après une petite transformation^(ix) :

$$dK = -\frac{2}{\sqrt{1-C^2}} dC \quad (5)$$

En première approximation, on pourra confondre la différentielle dK avec la différence finie ε_K qui elle, est mesurable. ε_K est l'erreur sur l'angle K due à une erreur de mesure sur la longueur de la corde. De la même façon on pourra confondre dC avec $\varepsilon_{\text{corde}}$ à condition que $\varepsilon_{\text{corde}} \ll C$.

On aura donc :

$$|dK| \approx \varepsilon_K \quad \text{et} \quad \varepsilon_K = \frac{2}{\sqrt{1-C^2}} \varepsilon_{\text{corde}} \quad (6)$$

Si l'on construit maintenant une table des valeurs donnant ε_K en minutes de degré en fonction des valeurs prises par la corde C et pour différentes valeurs probables pour $\varepsilon_{\text{corde}}$ on aura, sachant que les longueurs sont en mm :

Tab.3 : Table des $\varepsilon_{\text{corde}}$ pour $R = 500$ mm

C_i en mm. → ΔC_i en mm. ↓	350	400	450	500	550
0,25	1',8	1',9	1',9	2',0	2',1
0,50	3',7	3',8	3',8	4',0	4',1
0,75	5',5	5',6	5',8	6',0	6',2
1,00	7',3	7',5	7',7	7',9	8',2
1,25	9',2	9',4	9',6	9',9	10',3
1,50	11',0	11',3	11',5	11',9	12',3
1,75	12',8	13',1	13',5	13',9	14',4
2,00	14',7	15',0	15',4	15',9	16',5
2,25	16',5	16',9	17',3	17',9	18',5

On s'est limité à ces longueurs des cordes puisque expérimentalement on n'a pas été en dessous de 400 mm ni au-dessus de 550 mm (cf. *annexe C*). Admettons que les cordes soient mesurées au demi-millimètre près (c'est-à-dire $\varepsilon_K \approx 0.50 \text{ mm}$) alors on peut lire dans le tableau 3 que l'erreur commise sur l'angle K sera de l'ordre $4'$ de degré. Ce qui, il faut le reconnaître, n'est déjà pas si mal ! Mais c'est théorique, d'autant plus que l'erreur sur l'angle K n'admet pas pour seule composante des erreurs dues à la mesure de la longueur de la corde.

On retiendra que pour toutes les mesures des cordes (et dans le cas des expériences menées pour la mesure de la déclinaison du cadran du CLG République) :

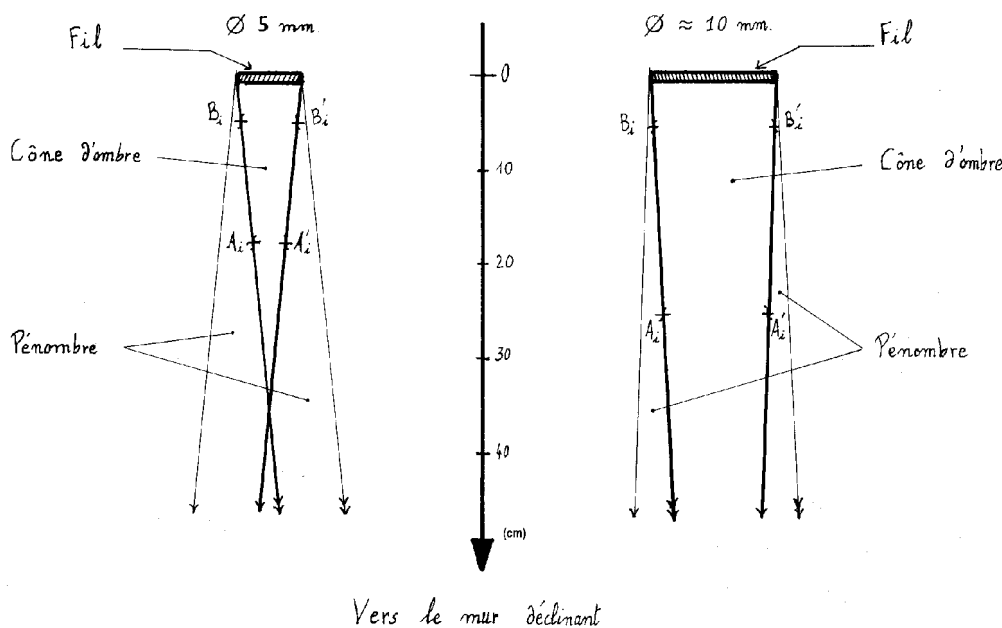
$$\varepsilon_K \approx 4'$$

3.4.2 Autres erreurs commises sur l'angle K -- Erreurs de parallélisme

Les autres sources d'erreur viennent des actes délicats : [1] à [8]. Intéressons-nous à l'item [8] du tableau 2, puisqu'il se trouve qu'il conditionne l'image formée sur le plan de travail à savoir l'*ombre*.

Le problème central à ce stade est que le soleil est une source étendue et non ponctuelle. L'image formée sur le plan horizontal est donc conique et ainsi les deux bords de l'ombre du fil ne sont pas parallèles ! Alors quels bords de l'ombre faut-il prendre au moment de la mesure ? Et que mesure-t-on avec un seul bord de l'ombre ? On se reportera à la figure 3 ci-dessous pour comprendre l'influence de ce nouveau facteur.

Fig.3 : Influence de l'épaisseur du fil à plomb dans la formation de l'ombre.



Pour répondre à ces questions, on a réalisé l'expérience suivante :

On relève simultanément, avec un fil à plomb de diamètre 5 mm, la direction des deux bords de l'ombre. En un même instant t_i si possible, on marque les couples de points : $(A_i; B_i)$ pour le premier bord et $(A'_i; B'_i)$ pour le deuxième bord de l'ombre.

L'ensemble des mesures effectuées se trouve à l'*annexe C*, feuilles II-a et II-b.

Pour pouvoir comparer les deux jeux de mesures, on applique un traitement statistique. On calcule la valeur moyenne de la déclinaison obtenue en considérant chaque bord, puis on calcule l'intervalle de confiance des deux valeurs obtenues. En s'étant appliqué sur tous les autres points [1] à [6], on a obtenu les valeurs suivantes :

Tab.4 : Résultats des mesures lorsque celles-ci sont prises de chaque côté du bord de l'ombre.

Moyenne (\overline{D})	Écart type σ	Précision sur \overline{D}	Différence
2°46'20"	4'06"	3'09"	20'08"
3°06'28"	4'41"	3'36"	

On constate un écart de 20' de degré en moyenne entre ces deux valeurs. Ce qui est considérable en regard de la précision obtenue. Puisque la déclinaison D_i a été obtenue en passant par la mesure de K_i , cela donne en fait un excédent de (20' - 4') c'est-à-dire 16' de degré. Dans le tableau 3, on peut lire que l'incertitude sur la position des demi-droites A_iB_i , est alors de 2 mm puisque $0.40 \leq C_i \leq 0.45$ mm, alors que l'on s'est assuré que l'erreur sur la mesure de la corde était de l'ordre de 0.50 mm. La première source d'erreur ε_K abordée précédemment ne suffit pas à elle seule à expliquer cette différence. Il faut admettre que d'autres erreurs peuvent se superposer à l'erreur commise sur la longueur de la corde. Il est clair qu'il faut attribuer cet excédent au relevé de la direction de l'ombre et en général à tout ce qui concourt au relevé de cette direction. Le diamètre du fil à plomb peut entacher lourdement la détermination de la déclinaison gnomonique, et peut même fausser la mesure. Cependant celui-ci ne sera pas le seul responsable de l'apparition de mesures marginales. Il suffit de penser par exemple que le fil à plomb n'a pas été bien stabilisé ou encore que la longueur de l'ombre est trop courte ou alors trop longue (c'est le problème de la *pénombre*)...

On introduira la notation $\varepsilon_{//}$ pour désigner cet excédent. Il faut voir dans $\varepsilon_{//}$ toutes les accumulations des actions produisant un défaut de parallélisme des bords de l'ombre et dont le diamètre du fil à plomb (que l'on aura soin de corriger) et la mesure de la longueur de la corde ne suffirait à justifier (sont donc concernées les actions [1] à [7] du tableau 2). Ce défaut de parallélisme se produit toujours et ne peut être que seulement réduit (cela dépend en partie de l'expérimentateur et c'est une source supplémentaire d'erreurs systématiques). Par conséquent on est en droit d'écrire :

$$\varepsilon_{//} = \sum_j \varepsilon_{//,j} \quad (7)$$

Un calcul direct d'incertitude, comme on a pu le faire pour le calcul de l'angle K par l'intermédiaire de la mesure de la corde, est impossible à faire pour évaluer les $\varepsilon_{//,j}$. La seule chose dont on est sûr c'est que celles-ci agissent sur la connaissance de K et donc de D .

3.5 Modélisation des erreurs de mesure

Les sources d'erreur restent encore nombreuses et non quantifiables^(x). On retiendra qu'il existe deux principales sources d'erreur sur l'angle K pour une mesure i :

- ε_K : pour la mesure de la corde C .
- $\varepsilon_{//}$: pour tout ce qui concerne la direction de l'ombre AB .

L'incertitude sur la mesure de la corde s'écrira :

$$\Delta K = \varepsilon_K + \sum_j \varepsilon_{//,j} \quad (8)$$

$$\Delta K = \varepsilon_K + \varepsilon_{//} \quad (9)$$

La "forme" de l'ombre du fil est importante et il appartient à l'expérimentateur de juger si le "parallélisme" des bords de l'ombre est réalisé ou non sur la portion utile au moment du marquage des repères (estimation d'un facteur de qualité q).

Dans cette méthode de la planchette, l'incertitude sur la déclinaison pour une mesure donnée pourra s'écrire :

$$\Delta D \approx \varepsilon_K + \varepsilon_{//} \quad (10)$$

Et si l'on pose

$$\varepsilon_{//} = q \times \varepsilon_K \quad (q = 1, 2, \dots) \quad (11)$$

Alors on doit s'attendre à obtenir pour chaque mesure :

$$\Delta D \approx (q + 1) \times \varepsilon_K \quad \text{avec } q = 1, 2, \dots \quad (12)$$

L'entier naturel q caractérisera la qualité du montage expérimental pour ce qui est des actions [1] à [10]. Une façon d'évaluer q est de réaliser l'expérience décrite en §3.4.2, et de comparer les deux valeurs obtenues. La différence devra être de l'ordre de $q \times \varepsilon_K$.

4. Compensation par les moindres carrés d'un ensemble de mesures

4.1 Introduction

On a pu associer à chaque mesure un intervalle dans lequel on pense être sûr que se trouve la valeur cherchée : il s'agit de l'intervalle $[D_i - (q_i + 1) \times \varepsilon_{K_i}; D_i + (q_i + 1) \times \varepsilon_{K_i}]$. On dispose en fait d'un autre moyen pour obtenir une information sur cette incertitude mais cette fois-ci non pas sur une mesure mais sur un ensemble de mesures.

Chaque mesure est porteuse d'une information (de bonne ou mauvaise qualité), et celle-ci se retrouve dans la dispersion des mesures dont on se sert pour évaluer l'intervalle de confiance que l'on peut accorder à la moyenne que l'on va calculer à partir de toutes ces valeurs. Il ne faut pas penser qu'il suffit de faire une infinité de mesure pour améliorer la précision du résultat. Rappelons que les statistiques sont prévues pour traiter des erreurs aléatoires. Elles font une compensation autour d'une valeur centrale de la dispersion d'un ensemble donné de mesures, en supposant justement que les erreurs aléatoires sont centrées. Et c'est tout. Elles ne traitent pas des erreurs systématiques qui ont pour effet de déplacer la valeur centrale qu'est notre moyenne.

4.2 Traitement des mesures et valeur retenue pour D

4.2.1 Modèle stochastique

On trouvera dans le tableau 5 le formulaire à utiliser dans le cas très fréquent où le nombre n de mesures est faible. On a recours alors à la loi de Student qui traite le cas d'un faible nombre de mesures.

Tab. 5 : *Formulaire statistique*

	Cas d'un très grand nombre de mesures	Cas de n mesures
	Loi de gauss	Loi de Student
Valeur moyenne	\bar{D}	$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$
Écart-type	σ_n	$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}}$
Intervalle de confiance à 95%	$1.96 \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$	$t \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$

Le coefficient de Student t sera à choisir suivant le nombre de mesures et le niveau de confiance que l'on désire accorder aux mesures (en général un niveau de confiance de 95% est satisfaisant).

On donne dans le tableau 6 les valeurs des pourcentages $t_{0,95}$ de la distribution de Student selon le nombre n de mesures effectuées^(xi).

Tab. 6 : Valeurs des $t_{0,95}$ dans la distribution de Student

Nombre de mesures	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t_{0,95}$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23

Nombre de mesures	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
$t_{0,95}$	2.20	2.18	2.16	2.14	2.13	2.11	2.12	2.10	2.09	2.06

Nombre de mesures	30	40	50	60	∞
$t_{0,95}$	2.04	2.02	2.01	2.00	1.96

4.2.2 Application numérique

On se reportera à l'annexe C où l'on trouvera la grille complète des 47 mesures effectuées pour la détermination de la déclinaison gnomonique du mur du CLG République. On calcule grâce à un tableur (comme Excel) et pour le total des 47 mesures :

- la valeur moyenne \overline{D}
- l'écart type σ
- l'intervalle de confiance à 95% en prenant $t_{0,95}$.

Pour déterminer l'azimut du soleil et la déclinaison on a effectué les calculs de deux façons :

- par le logiciel "éphémérides".
- par la trigonométrie sphérique (voir l'annexe B pour l'organigramme de calcul).

Tab.7 : Résultats statistiques de la mesure de la déclinaison du mur du Collège République.

	Moyenne	Écart type	Intervalle de confiance à 95% ($t_{0,95}=2.01$)
Par le Logiciel EPHÉMÉRIDES	$\overline{D}_1 = 3^{\circ}05'49''$	$\sigma_1 = 17'13''$	$\Delta\overline{D}_1 = 4'55''$
Par la TRIGONOMETRIE SPHÉRIQUE	$\overline{D}_2 = 3^{\circ}04'55''$	$\sigma_2 = 17'34''$	$\Delta\overline{D}_2 = 5'02''$

L'écart type nous renseigne sur la dispersion, tandis que l'intervalle de confiance à 95%, qui est une plage située de part et d'autre de la moyenne, nous informe de la précision globale de nos mesures ($\Delta\overline{D}$).

Soit à peine 1' de degré entre les deux valeurs moyennes de la déclinaison ce qui confirme bien que $\Delta Az \ll \Delta K$ dans notre expérience. Les dispersions des deux séries de mesures sont très voisines. On peut dire que les deux séries ont la même précision. Le très faible écart entre les deux moyennes montre que l'exactitude est la même.

L'erreur probable sur \overline{D} pour l'ensemble complet des mesures est de :

$$\boxed{\Delta\overline{D} \approx 5'}$$

Cette erreur est du même ordre de grandeur que ε_K . On a donc fait mieux que le critère prévu par la relation (12) et ce, malgré l'étendue des mesures qui est de 1°. La valeur retenue pour la déclinaison du mur sera :

$$\boxed{(\overline{D} \pm \Delta\overline{D}) = (3^{\circ}06' \pm 0^{\circ}05')}$$

C'est cette valeur qui a permis d'effectuer le plan du cadran et d'en réaliser une maquette ; maquette qui a été installée et laissée sur le mur durant les années 1996, 1997, 1998, en attente de la construction à la dimension réelle du cadran du Collège République (Réalisation finale : 02 juillet 1999).

Remarque :

Le défaut du fil à plomb a été corrigé afin de minimiser ε_i . On a conjecturé qu'il était nécessaire de disposer d'un fil à plomb ayant un diamètre d'au moins 8 millimètres, et qu'il ne fallait pas dépasser une longueur d'ombre de 40 centimètres pour marquer les points A_i et B_i . En effet si le fil à plomb est trop mince soit on a plus d'ombre du tout, soit on aperçoit un cône d'ombre et on ne sait plus où mettre les repères. Si le fil est suffisamment épais, d'une part, l'image formée est un peu plus nette et d'autre part l'image est plus longue de la base du plomb à la parallèle au mur et les deux bords "semblent" nettement parallèles. Faut-il rappeler qu'il est nécessaire d'avoir comme condition un soleil bien brillant et suffisamment haut dans le ciel ?

En tout état de cause, dans les autres mesures on a essayé le plus possible d'améliorer le relevé des directions des ombres afin d'abaisser au plus de la moitié cette erreur de "parallélisme". Le but étant d'obtenir $\varepsilon_i \ll \varepsilon_K$. Mais on ne pourra pas l'atteindre avec une seule mesure... Et en ce sens augmenter le nombre de mesures en restant pour chacune d'elles dans le critère précédent, ne pourra que rendre meilleure la détermination de D .

5. Conclusion sur la précision fournie par la méthode de la planchette

A propos de la méthode :

1. La résolution angulaire est de l'ordre de ε_K .
Pour donner une valeur numérique théorique, elle est de l'ordre de 2' d'angle si $\varepsilon_{corde}=0.25$ mm et $C_i < 550$ mm. Elle ne sera pratiquement jamais atteinte.
2. Une mesure sera telle que sa précision est de l'ordre de $(q+1) \times \varepsilon_K$.
Pour $q=10$, on pourra estimer que la mesure est vraiment mauvaise, mais cependant elle est porteuse d'information. Pour $q=1$, la précision est de $2\varepsilon_K$ ($\Delta D=2\varepsilon_K$).
3. Pour n mesures, seule une étude statistique permettra de donner une valeur numérique à ΔD .
On a vu au §4 quel est le modèle à utiliser pour tirer parti au mieux des mesures (surtout lorsque $n < 20$) afin de diminuer le facteur de qualité q , c'est à dire compenser les défauts des mesures en supposant qu'elles ne soient pas systématiques. On peut déjà avancer qu'une étude statistique sur un ensemble de mesures devrait donner une précision comprise dans l'intervalle $]\varepsilon_K ; 2\varepsilon_K[$.

A propos du choix du modèle statistique :

La loi de probabilité de Student doit être appliquée lorsque l'on a à faire à un faible nombre de mesures, ce qui est toujours le cas en ce qui concerne la détermination de la déclinaison gnomonique. En effet, suivant les conditions, il ne sera pas possible de réaliser un grand nombre de mesures comme on a pu le faire ici. Les conditions qui restreignent les mesures peuvent être liées à la disponibilité du matériel, du personnel (il faut au minimum être deux), de la météo, de l'accessibilité du site, des critères liés au coût qui imposent un délai (location d'un échafaudage...) etc....

Extension possible :

Pour finir, signalons que les méthodes de mesures citées au paragraphe 1.2 méritent d'être expérimentées et analysées comme on l'a fait ici. Il serait intéressant de comparer leur performance (pour ne pas dire précision) et ainsi déterminer leur exactitude, à condition bien sûr

que le mur déclinant soit le même pour l'expérimentation de toutes les méthodes. Ces travaux sont en cours.

Annexes

A. Modèles de grille de mesures

En utilisant les éphémérides (Logiciels)

FEUILLE n°					
Date	Numéro de l'ombre $A_i B_i$ du fil à plomb	Instant du pointé	Longueur de la corde C_i	Calcul de K_i	Calcul de l'azimut du soleil : Az_i
jj/mm/aa		hh:mm:ss	(m)	(DD°,xx)	(DD°,xx)

En utilisant la Trigonométrie Sphérique (calculette)

FEUILLE n°								
Date	Numéro i de l'ombre $A_i B_i$ du fil à plomb	Instant du pointé	Longueur de la corde : $ab = C_i$	Calcul de K_i	Heure de passage au méridien	Calcul du temps vrai local : AH_i	Calcul de la déclinaison du soleil : δ_i	Calcul de l'azimut du soleil : Az_i
jj/mm/aa		hh:mm:ss	(m)	(DD°,xx)	hh:mm:ss	hh:mm:ss	(DD°,xx)	(DD°,xx)

D. Collin



C. La grille complète des mesures

Dates	N°	Instant TU du pointé (hh:mm:ss)	Corde C_i (m)	Calcul de K_i (deg)	Angle horaire du soleil : Ahi (deg.)	Déclinaison du Soleil : δ_i (deg.)	Azimet du soleil : Az_i (deg.)	Déclinaison du c
Feuille n° : I	1	13:49:00	0,5060	29,204	26,750	-2,668	31,910	2,705
	2	13:51:00	0,5015	29,801	27,250	-2,668	32,462	2,661
13-mars-96	3	13:53:15	0,4990	30,132	27,813	-2,668	33,081	2,949
	4	13:55:00	0,4945	30,726	28,250	-2,668	33,561	2,835
Paris : 12:00:04	5	14:01:00	0,4830	32,237	29,750	-2,668	35,194	2,957
CLG : 12:02:00	6	14:04:00	0,4750	33,281	30,500	-2,668	36,003	2,722
	7	14:07:00	0,4700	33,931	31,250	-2,668	36,807	2,876
	8	14:12:00	0,4620	34,968	32,500	-2,668	38,137	3,170
Feuille n° : II_a	1	14:11:00	0,4320	38,811	33,279	2,850	41,608	2,797
	2	14:12:15	0,4295	39,128	33,592	2,850	41,951	2,822
27-mars-96	3	14:13:30	0,4260	39,572	33,904	2,850	42,292	2,720
	4	14:14:45	0,4230	39,952	34,217	2,850	42,633	2,681
Paris : 11:55:58	5	14:16:00	0,4210	40,205	34,529	2,850	42,973	2,768
CLG : 11:57:53	6	14:17:00	0,4190	40,457	34,779	2,850	43,244	2,787
(Bord droit de l'ombre)	7	14:20:30	0,4120	41,339	35,654	2,850	44,188	2,849
	8	14:21:30	0,4075	41,904	35,904	2,850	44,456	2,552
	9	14:23:00	0,4060	42,092	36,279	2,850	44,857	2,765
Feuille n° : II_b	1	14:11:00	0,4340	38,557	33,279	2,850	41,608	3,051
	2	14:12:15	0,4310	38,938	33,592	2,850	41,951	3,013
27-mars-96	3	14:13:30	0,4295	39,128	33,904	2,850	42,292	3,164
	4	14:14:45	0,4260	39,572	34,217	2,850	42,633	3,061
Paris : 11:55:58	5	14:16:00	0,4235	39,888	34,529	2,850	42,973	3,085
CLG : 11:57:53	6	14:17:00	0,4205	40,268	34,779	2,850	43,244	2,976
(Bord gauche de l'ombre)	7	14:20:30	0,4145	41,024	35,654	2,850	44,188	3,164
	8	14:21:30	0,4115	41,402	35,904	2,850	44,456	3,054
	9	14:23:00	0,4095	41,653	36,279	2,850	44,857	3,204
Feuille n° : III	1	13:15:30	0,5265	26,461	20,742	9,983	29,922	3,460
	2	13:17:00	0,5225	27,000	21,117	9,983	30,421	3,421
15-avr.-96	3	13:18:00	0,5195	27,403	21,367	9,983	30,753	3,351
	4	13:19:00	0,5170	27,738	21,617	9,983	31,084	3,347
Paris : 11:50:37	5	13:20:00	0,5145	28,072	21,867	9,983	31,415	3,343
CLG : 11:52:32	6	13:21:00	0,5110	28,539	22,117	9,983	31,744	3,205
	7	13:23:30	0,5055	29,271	22,742	9,983	32,564	3,293
	8	13:24:30	0,5045	29,404	22,992	9,983	32,890	3,486
	9	13:25:30	0,5010	29,868	23,242	9,983	33,216	3,348
	10	13:26:30	0,5005	29,934	23,492	9,983	33,540	3,606
Feuille n° : IV	1	09:27:20	0,4620	34,968	-32,867	-20,226	-31,534	3,434
	2	09:28:51	0,4645	34,644	-32,488	-20,226	-31,191	3,453
22-nov.-96	3	09:30:00	0,4670	34,321	-32,200	-20,226	-30,931	3,389
	4	09:32:24	0,4700	33,931	-31,600	-20,226	-30,387	3,544
Paris : 11:36:53	5	09:34:34	0,4750	33,281	-31,058	-20,226	-29,895	3,386
CLG : 11:38:48	6	09:35:20	0,4750	33,281	-30,867	-20,226	-29,720	3,561
	7	09:37:02	0,4800	32,629	-30,442	-20,226	-29,333	3,297
	8	09:40:02	0,4885	31,516	-29,692	-20,226	-28,647	2,869
	9	09:45:00	0,4955	30,595	-28,450	-20,226	-27,505	3,089
	10	09:48:45	0,5035	29,536	-27,513	-20,226	-26,640	2,897
	11	09:50:54	0,5090	28,806	-26,975	-20,226	-26,141	2,664

**

MOYENNE = 3,081

Ecart-Type = 0,292

Intervalle de confiance à 95% 0,084

ⁱ□. On démontre que l'estimateur "valeur moyenne" est le meilleur estimateur d'une série statistique.

ⁱⁱ□. On justifiera au §3.4.2 pourquoi il est nécessaire d'avoir une corde aussi épaisse, ce qui, il est vrai, est tout le contraire d'un vrai fil à plomb ou l'on cherche plutôt à avoir un fil le plus fin possible ! Et bien entendu, la masse doit être plus importante afin de tendre la corde.

ⁱⁱⁱ□. Si l'ombre n'est pas assez longue ou trop floue parce que le fil est trop éloigné du mur, on ne pourra avoir directement le point A_i sur la parallèle au mur. Dans ce cas marquer un autre repère sur le même bord de l'ombre comme il a été fait avec B_i . Tracer ensuite la droite A_iB_i pour obtenir l'intersection de l'ombre avec la parallèle au mur et pouvoir poursuivre l'exploitation de la feuille.

^{iv}

□. Si l'ensemble des mesures est de préférence centré sur une heure donnée, c'est pour assurer approximativement une valeur constante à la déclinaison du soleil pour cette date. La valeur de la déclinaison calculée à cet instant moyen est suffisante pour le calcul de chaque azimut de la série, d'autant plus que si cette déclinaison est interpolée entre deux dates au moyen d'éphémérides (comme ceux de la SAF par exemple).

^v□. La corde ab permet en fait d'obtenir directement l'angle aA_ib c'est-à-dire l'angle entre la parallèle au mur et la direction de l'ombre. On obtient K simplement en faisant $(90^\circ - aA_ib)$. Ce sera l'angle entre la direction de l'ombre et la normale au mur qui, rappelons-le, n'est pas utile de matérialiser. Pour un rayon R quelconque ($A_ia = A_ib = R$), il faut considérer la relation plus générale : $\sin K = 1 - \frac{C^2}{2R^2}$.

^{vi}□. Rappelons qu'un angle orienté est un angle géométrique affecté d'un sens de parcours imposé, caractérisé par le signe + ou le signe -. La convention de signe étant ici celui du sens horaire : positif du sud vers l'ouest, négatif du sud vers l'est. Cette valeur est ensuite ramenée dans l'intervalle $]-180 ; +180]$ (on parle alors de mesure principale).

^{vii}□. En fait à l'instant t_i apparaît le couple $(Az_i ; K_i)$ et de ce couple résulte une déclinaison D_i . Il intervient donc a priori aussi sur K_i puisque celui-ci mesure une direction d'ombre qui n'est pas autre chose que l'azimut du soleil compté depuis une autre origine que le sud.

^{viii}□. Cela demande un petit entraînement et de l'organisation. Ce qui compte, se sont d'abord les secondes et la décision de marquer les points A_i et B_i en tenant compte de la présence de la pénombre et d'un éventuel bougé du fil à plomb.

^{ix}□. Pour un rayon R quelconque on aura :

$$dK = \frac{dc}{R\sqrt{1 - \frac{C^2}{4R^2}}} \text{ avec } dK \text{ en radian, } R, C \text{ et } dC \text{ en mètres.}$$

^x□. L'expérience sur le diamètre du fil à plomb montre bien que les erreurs listées au tableau 2 puissent être à tout moment aléatoires mais aussi systématiques comme le suggère le problème du à la pénombre. Il y aura toujours un défaut dans le relevé de la direction de l'ombre car le soleil n'est pas une source ponctuelle mais une source étendue : la diffraction "noyant" toujours l'ombre géométrique (A_iB_i). Ainsi, de l'expérience menée avec le fil à plomb, il faut en retirer que l'augmentation du diamètre du fil permet d'obtenir une ombre plus nette et plus régulière, et permet seulement de minimiser la différence entre les directions des deux bords de l'ombre. Mais la diffraction affectera toujours la direction de l'ombre. C'est donc bien une erreur systématique et celle-ci n'est pas quantifiable avec les moyens dont nous disposons.

^{xi}□. Ce tableau est extrait de l'article des auteurs Y. Baima, A. Jorandan, S. Morlen et M. Vincent, intitulé : "Changement de fréquence, effet Doppler", **BUP** n°804, pp. 869-884, mai 1998. (Page 878 pour le tableau des coefficients $t_{0,95}$).