



## Lignes horaires dans un cadran bifilaire

Dominique Collin

*Cet article fait suite à celui publié dans cadran Info n° 27 de mai 2013, (section 7). Il présente la nature des lignes horaires dans un cadran solaire horizontal bifilaire à fils quelconques.*

Restituons d'abord le contexte. Dans une première étude sur le cadran solaire bifilaire horizontal<sup>1</sup> où chaque fil a une position quelconque au-dessus du plan du cadran, il a été établi que la *ligne de midi* pouvait être un segment de droite ou une portion d'une conique. Les autres lignes horaires n'avaient pas été traitées d'une part en raison de la complexité des coordonnées du point d'ombre et d'autre part parce que ce cadre d'étude dépassait les objectifs proposés. Suite à la réalisation d'un programme informatique de tracé de ce bifilaire horizontal (Mercier & Collin, *op. cit.*), il a été émis une conjecture sur les lignes horaires : "*les lignes horaires prennent toutes les formes des sections coniques [...]*". Cette conjecture n'est pas tout à fait exacte ; on donne deux propositions rectificatrices, encore inédites, sur les lignes horaires de cette variété de bifilaire. Pour effectuer les vérifications nécessaires de ces propositions face à la considérable multitude de graphiques que l'on peut obtenir, on fournit des critères très utiles concernant les coniques. Les critères, purs extraits de deux théorèmes fondamentaux sur les coniques, seront exposés sous forme de problèmes distincts<sup>2</sup>. Le premier problème consiste à démontrer qu'une ligne horaire est une courbe plane  $L_i$  (éventuellement vide ou réduite à un point) admettant dans un certain repère orthonormal du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ , où  $a, b, c, d, e$  et  $f$  sont six réels quelconques avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . C'est l'application du théorème de *Pascal* sur les coniques. Le deuxième problème est la détermination du genre de la conique, en plus de son équation cartésienne. C'est l'application du théorème de *Papus*. On complète notre analyse par un certain nombre d'exemples numériques appuyés de figures explicites.

**Propositions sur les lignes horaires.** Dans un cadran solaire bifilaire horizontal à fils rectilignes quelconques, supposés sans épaisseur :

- [1] Les lignes horaires sont des coniques.
- [2] Une ligne horaire est une branche d'hyperbole<sup>3</sup>, ou un segment de droite.

□

**Preuve.** Le point de départ est le résultat obtenu dans l'étude initiale (Collin, 2005, *op. cit.*). Au chapitre 5, §5.3, « *famille des lignes horaires* » on retiendra les formules (5-1a) et (5-1c) concernant la ligne de midi. On remarque d'abord que l'équation de la ligne de midi ne

<sup>1</sup> D. Collin, *Vers une finalisation des cadrans solaires bifilaires à fils rectilignes*, Cadran-info n° 13, 2005, Annexes (version CD-Rom).

<sup>2</sup> La méthode développée ici est totalement indépendante de la position du plan du cadran bifilaire sur l'horizon et même du système bifilaire rectiligne utilisé ! Au moment où cette étude était terminée, M. Éric Mercier modifia le logiciel de tracé de bifilaire afin de l'étendre aux bifilaires inclinés et déclinants à fils quelconques, pour proposer le logiciel HUGO fonctionnant sous système Macintosh. Étude qui est présenté dans ce Cadran-Info même.

<sup>3</sup> Conique non dégénérée (ou conique à centre).

dépend pas de la latitude  $\varphi$  : le degré de cette courbe n'est donc pas affecté par les changements de latitude. On observe ensuite que l'équation de la ligne de midi est de forme

homographique :  $y = x \frac{\mu_1 x + \mu_2}{\mu_3 x + \mu_4}$ , où les  $\mu_i$  sont des coefficients réels, déterminés

seulement en fonction des caractéristiques des fils. Alors de même, la modification des caractéristiques géométriques des fils n'affecte pas la ligne de midi. De cette équation on en déduit que la ligne de midi est une *conique* de genre *hyperbole*<sup>4</sup> (et en général, une hyperbole non équilatère) ; si de plus il arrive que  $\mu_4 = 0$ , la ligne de midi est affine (on ne déterminera pas les conditions qui rendent nul ce coefficient). Les propositions [1] et [2] sont vraies pour la ligne de midi.

Mais également, la ligne de midi est un élément de la famille des lignes horaires. Ces lignes ont pour paramètres l'angle horaire vrai  $t$ , qui, lorsqu'il est fixé, impose un lieu géométrique lorsque la déclinaison du soleil varie entre les solstices. Il faut reconnaître que ce qui se produit pour une valeur donnée de  $t$ , se reproduit également pour d'autres valeurs durant toute les périodes d'ensoleillement du plan horizontal. Le *degré* et le *genre* de ces courbes n'est pas affecté par les changements de latitude, ni par les changements de configuration des fils du système bifilaire, ni encore par l'angle horaire  $t$ . Ceux-ci restent les mêmes pour tout élément  $L_t$  de la famille des lignes horaires. D'où les deux propositions. Le cas singulier où la ligne horaire est affine ne concerne que la ligne de midi, en supposant bien entendu que les fils n'aient aucun point en commun, auquel cas toutes les lignes horaires seront concernées en abaissant le degré de la courbe horaire d'une unité, comme nous le savons déjà<sup>5</sup>.



On présente maintenant les outils qui permettent de vérifier par voie numérique les deux propositions énoncées ci-dessus, afin de pouvoir les exercer sur tout espèce de cadran bifilaire, comme ceux exposés dans le précédent article (Mercier & Collin, *op. cit.*).

**Premier problème [1].** La première question que l'on se pose, au vu de la quantité de tracés de bifilaires que l'on peut obtenir avec le logiciel de M. Mercier (*cf.* E. Mercier, 2013), est de savoir si les lignes horaires  $L_t$  sont des sections coniques. Cela avait été démontré pour la ligne de midi seule<sup>6</sup> : qu'en est-il des autres lignes de la famille des lignes horaires ?

*1<sup>ère</sup> Solution.* On utilise la réciproque du théorème de Pascal concernant la propriété de l'hexagone inscrit à une conique<sup>7</sup>. Considérons 6 points distincts (non alignés) d'une ligne horaire  $L_t$  et l'hexagone inscrit  $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$  formé par ces 6 points ordonnées (figures 1-a & 1-b). Considérons les prolongements des côtés opposés de l'hexagone ( $M_6M_1$  ;  $M_3M_4$ ), ( $M_1M_2$  ;  $M_4M_5$ ) et ( $M_2M_3$  ;  $M_5M_6$ ). Si les 3 points d'intersection  $I, J, K$  des trois couples de faisceau de droites sont alignés, alors les sommets de l'hexagone sont sur une conique (figure 1-a). Cette condition est *suffisante*. Si cela fonctionne pour une ligne horaire prise « au

<sup>4</sup> En raison de la forme homographique : rapport de deux polynômes du premier degré, ou rapport d'un polynôme du second degré et d'un polynôme du premier degré.

<sup>5</sup> Si les fils ont un point commun, alors le cadran bifilaire devient un cadran classique dans lequel les lignes horaires sont des portions de droites, intersection des plans horaires passant par l'axe des pôles avec le plan de l'horizon. La désolidarisation du gnomon classique (polaire ou droit) en deux gnomons distincts provoque cette situation extrêmement remarquable et complexe. Rappelons-le, cette idée est due à l'éminent gnomoniste Hugo Michnik.

<sup>6</sup> Sans curieusement en donner le genre – D. Collin, *op. cit.*

<sup>7</sup> Michel Chasles, "*Traité des sections coniques faisant suite au Traité de géométrie supérieure*", édition Jacques Gabay, 2007, réimpression autorisée de la première (et unique) partie du Traité des sections coniques publiée par Gauthier-Villars en 1865. Une très remarquable démonstration du théorème de Pascal se trouve au chapitre II, §22, p. 18.

hasard » dans la famille des lignes horaires, alors on admettra que cela est vrai pour toutes les lignes de la famille des lignes horaires. Dans le cas contraire, la ligne passant par les sommets de l'hexagone n'appartient pas à une courbe du second degré (contre exemple en figure 1-b) ; elle devra être considérée comme étant d'un ordre supérieur. Pour démontrer que les points  $I, J, K$  sont sur une même droite ( $\mathcal{D}$ ), il suffit de montrer que les vecteurs  $\vec{IJ}$  et  $\vec{IK}$  sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel  $\mu$  non nul, tel que  $\vec{IK} = \mu \vec{IJ}$ . Il existe bien sûr d'autres démonstrations, probablement plus élégantes, comme celle fondée sur les propriétés du birapport d'un faisceau de droites ; on a délibérément choisi la voie analytique. Soient donc  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3)$ ,  $M_4(x_4, y_4)$ ,  $M_5(x_5, y_5)$ ,  $M_6(x_6, y_6)$ , six points connus d'une même ligne horaire  $L_t$  (fig.1-a ou 1-b). Soient  $A=0$ ,  $B=0$ ,  $C=0$ ,  $D=0$ ,  $E=0$  et  $F=0$ , les équations en  $x$  et  $y$  des six droites formées par les côtés consécutifs  $M_1M_2$ ,  $M_2M_3$ ,  $M_3M_4$ ,  $M_4M_5$ ,  $M_5M_6$ , et  $M_6M_1$  de l'hexagone inscrit à la ligne horaire  $L_t$  :

$$\begin{aligned} A &= a_{12}x - b_{12}y + c_{12} = 0, & D &= a_{45}x - b_{45}y + c_{45} = 0, \\ B &= a_{23}x - b_{23}y + c_{23} = 0, & E &= a_{56}x - b_{56}y + c_{56} = 0, \\ C &= a_{34}x - b_{34}y + c_{34} = 0, & F &= a_{61}x - b_{61}y + c_{61} = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients  $\{a_{ij}; b_{ij}; c_{ij}\}$  sont de la forme :  $a_{ij} = y_i - y_j$ ,  $b_{ij} = x_i - x_j$  et  $c_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$  et dans lesquels les indices  $i$  et  $j$  sont ceux rencontrés dans les équations des six côtés de l'hexagone. On a les trois points d'intersection :  $I = (M_6M_1) \cap (M_3M_4)$ ,  $J = (M_1M_2) \cap (M_4M_5)$  et  $K = (M_2M_3) \cap (M_5M_6)$ . Leurs coordonnées sont alors respectivement :

$$\begin{aligned} I & \begin{pmatrix} x_I = \frac{b_{34}c_{61} - b_{61}c_{34}}{a_{34}b_{61} - a_{61}b_{34}} \\ y_I = \frac{a_{34}c_{61} - a_{61}c_{34}}{a_{34}b_{61} - a_{61}b_{34}} \end{pmatrix} & J & \begin{pmatrix} x_J = \frac{b_{12}c_{45} - b_{45}c_{12}}{a_{12}b_{45} - a_{45}b_{12}} \\ y_J = \frac{a_{12}c_{45} - a_{45}c_{12}}{a_{12}b_{45} - a_{45}b_{12}} \end{pmatrix} & K & \begin{pmatrix} x_K = \frac{b_{23}c_{56} - b_{56}c_{23}}{a_{23}b_{56} - a_{56}b_{23}} \\ y_K = \frac{a_{23}c_{56} - a_{56}c_{23}}{a_{23}b_{56} - a_{56}b_{23}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à s'assurer de l'unicité du rapport pour conclure.

$$\mu = \frac{x_K - x_I}{x_J - x_I} = \frac{y_K - y_I}{y_J - y_I} \quad (1)$$

Ces formules ont été regroupées dans une feuille du classeur<sup>8</sup> Excel joint à la version CD-Rom de Cadran-Info. Cette feuille est nommée « *Pbl Théorème de Pascal* ». Son utilisation permettra de vérifier au cas par cas la proposition [1].

*2<sup>e</sup> solution.* On exploite un élégant résultat issu de la géométrie projective : le théorème de conicité<sup>9</sup>. Ce théorème sert à la démonstration du théorème de Pascal sur les coniques. Voici comment il peut être énoncé.

Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathbf{P}(E)$  le plan projectif associé. Soient  $a, b, c, d, e, f$  six points plongés dans  $\mathbf{P}(E)$ . Ils sont sur une même conique<sup>10</sup> si et seulement si on a la relation :

$$[a, d, e][b, c, e][a, b, f][c, d, f] - [a, b, e][c, d, e][a, d, f][b, c, f] = 0 \quad (2)$$

<sup>8</sup> Le nom de ce fichier de travail est : « *Theoreme de Pascal Conique projective\_v1.xlsx* ».

<sup>9</sup> On consultera avec un intérêt certain, le projet d'ouvrage de Daniel Perrin « *Géométrie projective* » dont les cinq premières parties sont en ligne sur le site internet : <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/>. On consultera notamment la partie 3, §4.3.1, page 113-115 (<http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie3.pdf>).

<sup>10</sup> Il est sous-entendu qu'il s'agit d'une conique projective.

Il s'agit maintenant de calculer cette expression. Les crochets sont les déterminants formés par les coordonnées des points dans le plan projectif  $\mathbf{P}(E)$ . Écrit dans une base de  $E$ , si  $a=(x_1,y_1,1)$ ,  $d=(x_4,y_4,1)$ , et  $e=(x_5,y_5,1)$ , alors par exemple,

$$[a, d, e] = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_4 & y_5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = x_1 y_4 - x_1 y_5 + y_1 x_5 - y_1 x_4 + x_4 y_5 - x_5 y_4, \quad ,$$

et ainsi de suite pour les sept autres déterminants. L'application de ce critère simplifie considérablement les calculs ! Une autre feuille du même classeur permet d'effectuer très aisément ce calcul dès que sont saisis les paires de coordonnées des six points pris sur une ligne horaire ou sur tout autre ligne d'ailleurs, comme un arc diurne par exemple. Cette feuille est nommée « *Critère de conicité* ». Les coordonnées  $(x; y)$  des six points doivent être impérativement saisis dans la première feuille intitulée « *Pbl Théorème de Pascal* ». Il suffira d'observer la valeur de la différence des produits des quatre déterminants pour conclure.

**Deuxième problème – Genre de la conique [2].** Il nous a fallu 5 points plus 1 pour pouvoir affirmer ou infirmer que les points d'une ligne horaire appartiennent à une courbe du second degré. Il ne faudra désormais que 5 points pour déterminer l'équation de la conique et accéder à son genre.

Plusieurs méthodes existent pour déterminer l'équation de la conique passant par cinq points donnés. La méthode la plus expéditive est celle qui consiste à résoudre le système d'équations en considérant les cinq points pris à la fois. Des logiciels de calcul formel permettent d'automatiser la résolution (méthode de Gauss-Jordan) ; de tels outils ne sont pas à la portée de tous. Une autre solution, plus simple a priori, et qui ne demande qu'une calculatrice ou encore un tableur, est celle qui fait appel au théorème de *Papus*.

*Théorème de Papus sur les coniques.* Il s'agit des propriétés des distances dans un quadrilatère inscrit à une conique. Considérons cinq points d'une conique (fig. 2) :  $M_1, M_2, M_3, M_4$  et  $M_5$  et le quadrilatère inscrit  $M_1M_2M_3M_4$ . Si du cinquième point de la conique on abaisse des perpendiculaires sur les quatre côtés du quadrilatère inscrit, alors le quotient du produit des perpendiculaires abaissées sur les côtés opposés divisé par le produit des perpendiculaires abaissées sur les deux autres côtés est *constant*. Une autre façon de voir les choses, est de dire qu'il existe une et une seule conique passant par les cinq points donnés. C'est ce que nous fait savoir le théorème de Papus en permettant en même temps d'obtenir directement l'équation de cette conique<sup>11</sup>, et c'est ce qui nous intéresse précisément ici.

*Équation d'une ligne horaire.* Soient  $M_1(x_1;y_1)$ ,  $M_2(x_2;y_2)$ ,  $M_3(x_3;y_3)$ ,  $M_4(x_4;y_4)$ , quatre points connus d'une ligne horaire  $L_t$ ,  $t$  étant l'angle horaire vrai du soleil (fig.2). Soient  $A=0$ ,  $B=0$ ,  $C=0$ ,  $D=0$ , les équations en  $x$  et  $y$  des quatre droites<sup>12</sup> formées par les côtés consécutifs  $M_1M_2$ ,  $M_2M_3$ ,  $M_3M_4$ ,  $M_1M_4$  du quadrilatère  $M_1M_2M_3M_4$  inscrit à la ligne  $L_t$ . Soit enfin  $M_5(x_5;y_5)$  un cinquième point de cette ligne horaire. Alors les distances de ce cinquième point de la courbe à ces quatre droites sont proportionnelles aux polynômes du premier degré  $A, B, C, D$ . D'après le théorème de Papus,

$$AC - \lambda BD = 0, \quad (3)$$

<sup>11</sup> Cf. *Équation d'une conique passant par cinq points donnés*, Nouvelles Annales de Mathématiques, 1ère série, tome 16 (1857), p. 418-421. Sans faire de plagia, les résultats contenus dans cette étude nous ont servi de modèle d'application.

<sup>12</sup> On écrira chacune des droites sous la forme cartésienne  $a_kx - b_ky + c_k = 0$ , avec  $k$  numéro correspondant au côté du quadrilatère inscrit à la conique.

où  $\lambda$  est une constante arbitraire exprimant la proportionnalité des distances du cinquième point aux côtés opposés pris deux à deux. On a donc l'égalité:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{A_5 C_5}{B_5 D_5} \quad (4)$$

En notant  $A_5, B_5$ , etc., ce que deviennent chacune des équations des droites lorsqu'on remplace  $x$  et  $y$  par  $x_5$  et  $y_5$ . (4) est alors l'équation de la conique  $L_5$  passant par les cinq points choisis. Pour une certaine commodité d'écriture, posons tout de suite :  $\alpha = A_5$  ,  $\beta = B_5$  ,  $\gamma = C_5$  et  $\delta = D_5$  . Chassons les dénominateurs et développons :

$$\frac{(a_1 x - b_1 y + c_1)(a_3 x - b_3 y + c_3)}{(a_2 x - b_2 y + c_2)(a_4 x - b_4 y + c_4)} = \frac{\alpha \gamma}{\beta \delta}$$

$$(a_1 x - b_1 y + c_1)(a_3 x - b_3 y + c_3)\beta \delta = (a_2 x - b_2 y + c_2)(a_4 x - b_4 y + c_4)\alpha \gamma$$

$$\beta \delta (a_1 a_3 x^2 - a_1 b_3 x y + a_1 c_3 x - a_3 b_1 x y + b_1 b_3 y^2 - b_1 c_3 y + a_3 c_1 x - b_3 c_1 y + c_1 c_3) =$$

$$\alpha \gamma (a_2 a_4 x^2 - a_2 b_4 x y + a_2 c_4 x - a_4 b_2 x y + b_2 b_4 y^2 - b_2 c_4 y + a_4 c_2 x - b_4 c_2 y + c_2 c_4)$$

$$a_1 a_3 \beta \delta x^2 - (a_1 b_3 + a_3 b_1) \beta \delta x y + b_1 b_3 \delta y^2 + (a_1 c_3 + a_3 c_1) \beta \delta x -$$

$$(b_1 c_3 + b_3 c_1) \beta \delta y + c_1 c_3 \beta \delta = a_2 a_4 \alpha \gamma x^2 - (a_2 b_4 + a_4 b_2) \alpha \gamma x y + b_2 b_4 \alpha \gamma y^2 +$$

$$(a_2 c_4 + a_4 c_2) \alpha \gamma x - (b_2 c_4 + b_4 c_2) \alpha \gamma y + c_2 c_4 \alpha \gamma$$

En regroupant les termes identiques, on obtient :

$$(a_1 a_3 \beta \delta - a_2 a_4 \alpha \gamma) x^2 + [(a_2 b_4 + a_4 b_2) \alpha \gamma - (a_1 b_3 + a_3 b_1) \beta \delta] x y + (b_1 b_3 \beta \delta - b_2 b_4 \alpha \gamma) y^2 +$$

$$[(a_1 c_3 + a_3 c_1) \beta \delta - (a_2 c_4 + a_4 c_2) \alpha \gamma] x + [(b_2 c_4 + b_4 c_2) \alpha \gamma - (b_1 c_3 + b_3 c_1) \beta \delta] y +$$

$$c_1 c_3 \beta \delta - c_2 c_4 \alpha \gamma = 0$$

Équation du second degré qui se met sous la forme classique :

$$ax^2 + bx y + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (5)$$

avec les six coefficients de la conique :

$$\begin{cases} a = a_1 a_3 \beta \delta - a_2 a_4 \alpha \gamma \\ b = (a_2 b_4 + a_4 b_2) \alpha \gamma - (a_1 b_3 + a_3 b_1) \beta \delta \\ c = b_1 b_3 \beta \delta - b_2 b_4 \alpha \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} d = (a_1 c_3 + a_3 c_1) \beta \delta - (a_2 c_4 + a_4 c_2) \alpha \gamma \\ e = (b_2 c_4 + b_4 c_2) \alpha \gamma - (b_1 c_3 + b_3 c_1) \beta \delta \\ f = c_1 c_3 \beta \delta - c_2 c_4 \alpha \gamma \end{cases}$$

Les coefficients  $\{a_k, b_k, c_k\}$  s'expriment en fonctions des coordonnées des quatre premiers points :

$$\begin{cases} a_1 = y_1 - y_2 \\ b_1 = x_1 - x_2 \\ c_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = y_2 - y_3 \\ b_2 = x_2 - x_3 \\ c_2 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = y_3 - y_4 \\ b_3 = x_3 - x_4 \\ c_3 = x_3 y_4 - x_4 y_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 = y_4 - y_1 \\ b_4 = x_4 - x_1 \\ c_4 = x_4 y_1 - x_1 y_4 \end{cases} \quad (6)$$

et pour le produit des rectangles faisant intervenir le cinquième point, on a :

$$\begin{cases} \alpha \gamma = (a_1 x_5 - b_1 y_5 + c_1)(a_3 x_5 - b_3 y_5 + c_3) \\ \beta \delta = (a_2 x_5 - b_2 y_5 + c_2)(a_4 x_5 - b_4 y_5 + c_4) \end{cases} \quad (6 \text{ bis})$$

Le calcul du discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  donnera le genre de la conique. Le calcul du triplet  $(a, b, c)$  est alors suffisant pour déterminer à quel genre de conique la ligne horaire est susceptible d'appartenir.

Nous avons ainsi un formulaire très simple permettant d'écrire l'équation cartésienne de n'importe quelle ligne horaire, et de reconnaître par là-même s'il s'agit d'un segment de droite, d'une portion de parabole, d'hyperbole ou encore d'ellipse. Mais nous savons désormais ce qu'il en est grâce aux résultats numériques à disposition et aussi grâce à la proposition [2].

### ***Nature des Lignes horaires au cas par cas – Exemples numériques.***

Voici deux séries d'applications numériques qui illustrent largement les propositions sur les lignes horaires. La première série est celle où la latitude varie pour une même configuration des fils. On a choisi,  $\varphi = 15^\circ$ ,  $\varphi = 43^\circ 43'$  et  $\varphi = 60^\circ$ , sans considération de longitude ( $\lambda = 0$ ) ou de fuseau horaire (cf. figures 3.1). La deuxième série est celle où la configuration des gnomons varie sous une même latitude. On a fixé  $\varphi = 43^\circ 43'$ , là aussi, sans considération de longitude ou de fuseau horaire (cf. figures 3.2). On prendra dans la série 1 une seule ligne horaire,  $t = 9^h$ . Dans la série 2, on prendra les lignes horaires  $t = 10^h$ ,  $t = 12^h$  et  $t = 13^h$ . Les résultats sont regroupés dans les tableaux ci-dessous.

#### ***Série 1 - Différentes latitudes, même angle horaire ( $t = 9^h$ par exemple)***

*Cadran 1-1 (Fig. 3.1a).*

$n^\circ$	Coordonnées du point <sup>13</sup>		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	-65.3489284278786	-7.3981584919402	$\mu_1 = 0,79126351$ $\mu_2 = 0,79126351$ $diff. = 0$	$diff. = -2 \times 10^{-8}$	Hyperbole
M <sub>2</sub>	-59.3539071247452	-17.1634959396151			
M <sub>3</sub>	-55.1515182861185	-26.2061790276964			
M <sub>4</sub>	-51.7368917794779	-34.8743029431454			
M <sub>5</sub>	-48.7331077939580	-43.3454541499275			
M <sub>6</sub>	-46.3428392914812	-50.5534615327265			

*Cadran 1-2 (Fig. 3.1b)*

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	-107.0931937546880	97.9298184022881	$\mu_1 = 1,19545688$ $\mu_2 = 1,19545688$ $diff. = 6,7 \times 10^{-15}$	$diff. = 5 \times 10^{-5}$	Hyperbole
M <sub>2</sub>	-90.5175301725576	75.0480964147486			
M <sub>3</sub>	-76.6086771726269	56.5353392342310			
M <sub>4</sub>	-64.0221646617164	40.9396067430571			
M <sub>5</sub>	-50.9558176121998	27.0840707465826			
M <sub>6</sub>	-31.4382637234876	12.9372045241112			

<sup>13</sup> Le nombre de décimales est volontairement exagéré...

*Cadran 1-3 (Fig. 3.1c)*

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	-132.14906615252	124.09603415804			
M <sub>2</sub>	-106.655205083617	94.9960703156451			
M <sub>3</sub>	-87.2958142417161	73.0814752823379			
M <sub>4</sub>	-71.800392268704	55.7916956536784			
M <sub>5</sub>	-58.7509164447747	41.6113417428756			
M <sub>6</sub>	-47.0329621332196	29.5370402678945			
			$\mu_1 = 1,06169621$ $\mu_2 = 1,06169621$ $diff. = 3,8 \times 10^{-15}$	$diff. = 7,7 \times 10^{-7}$	Hyperbole

*Série 2 - Différentes configurations des fils sous une même latitude.**Cadran 2-1 (Fig. 3.2a)* $t = 10^h$ 

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	32.601388971392	132.261515510476			
M <sub>2</sub>	35.,5565207549591	122.515948055724			
M <sub>3</sub>	37.9260264470224	114.001255992187			
M <sub>4</sub>	39.8194590637939	106.37545610544			
M <sub>5</sub>	41.3023050338976	99.3832536670558			
M <sub>6</sub>	42.405455913774	92.8201037997835			
			$\mu_1 = 0,99727657$ $\mu_2 = 0,99727657$ $diff. = 0$	$diff. = -2,5 \times 10^{-9}$	Hyperbole

 $t = 12^h$ 

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	146.364581595069	226.54561592045			
M <sub>2</sub>	151.402694070931	223.191796265031			
M <sub>3</sub>	157.629616704299	221.872350621007			
M <sub>4</sub>	165.610465418465	222.989231455169			
M <sub>5</sub>	176.329161233419	227.413641199049			
M <sub>6</sub>	189.097265735453	235.184633887970			
			$\mu_1 = 1,06946434$ $\mu_2 = 1,06946434$ $diff. = 1,8 \times 10^{-13}$	$diff. = -1,4 \times 10^{-5}$	Hyperbole

 $t = 13^h$ 

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	247.554195652524	454.599769825366			
M <sub>2</sub>	248.467333411899	426.790312441381			
M <sub>3</sub>	252.512419303113	405.45790589939			
M <sub>4</sub>	259.471563723688	392.761195715706			
			$\mu_1 = 0,99205884$ $\mu_2 = 0,99205884$ $diff. = 0$	$diff. = 4,8 \times 10^{-3}$	Hyperbole

M <sub>5</sub>	269.5077454466	387.036230762364			
M <sub>6</sub>	283.246458430399	387.800637512645			

Cadran 2-2 (Fig. 3.2b)

 $t = 10^h$ 

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	-74.2156022340886	168.377868040319	$\mu_1 = 0,9893361$ $\mu_2 = 0,9893361$ $diff. = -1,2 \times 10^{-15}$	$diff. = -1,2 \times 10^{-11}$	Hyperbole
M <sub>2</sub>	-68.0489611204818	152.751360159827			
M <sub>3</sub>	-62.5781481480308	138.850977776555			
M <sub>4</sub>	-57.6512856510885	126.290977737947			
M <sub>5</sub>	-53.1552242696007	114.780850203402			
M <sub>6</sub>	-49.5739626959455	105.566644292834			

 $t = 12^h$ 

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	22.7778983042455	323.137387446743	$\mu_1 = 0,92767162$ $\mu_2 = 0,92767162$ $diff. = -1,3 \times 10^{-13}$	$diff. = 7,8 \times 10^{-11}$	Hyperbole
M <sub>2</sub>	22.8390783239478	283.642305218417			
M <sub>3</sub>	22.9105848279918	248.213081462861			
M <sub>4</sub>	22.9830115237209	220.357746555656			
M <sub>5</sub>	23.0571019708316	197.681750763661			
M <sub>6</sub>	23.1336679356125	178.69342343732			

 $t = 13^h$ 

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	60.5931376286335	139.191926530619	$\mu_1 = 0,98221389$ $\mu_2 = 0,98221389$ $diff. = -1,1 \times 10^{-15}$	$diff. = 2,7 \times 10^{-13}$	Hyperbole
M <sub>2</sub>	58.3551850904544	126.677576342607			
M <sub>3</sub>	56.3526814992803	115.400432948398			
M <sub>4</sub>	54.5371417997576	105.089250634642			
M <sub>5</sub>	52.8721170565077	95.5349632374707			
M <sub>6</sub>	51.5418213680946	87.8111532251563			



*Cadran 2-3 (Fig. 3.2c)* $t = 10^h$ 

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	0.735276	-2.0951	$\mu_1 = 0,99273455$ $\mu_2 = 0,99273441$ $diff. = -1,4 \times 10^{-7}$	$diff. = 4,3 \times 10^{-20}$	Hyperbole
M <sub>2</sub>	0.680446	-1.95541			
M <sub>3</sub>	0.631579	-1.83065			
M <sub>4</sub>	0.587732	-1.71846			
M <sub>5</sub>	0.548153	-1.61696			
M <sub>6</sub>	0.512232	-1.52461			

 $t = 12^h$ 

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	-0.16715	-0.368098	$\mu_1 = 1,01197148$ $\mu_2 = 1,01196942$ $diff. = -2,1 \times 10^{-6}$	$diff. = -1,7 \times 10^{-22}$	Hyperbole
M <sub>2</sub>	-0.163152	-0.349253			
M <sub>3</sub>	-0.159	-0.330763			
M <sub>4</sub>	-0.154681	-0.312604			
M <sub>5</sub>	-0.15018	-0.294753			
M <sub>6</sub>	-0.145482	-0.277185			

 $t = 13^h$ 

$n^\circ$	Coordonnées du point		Critère 1	Critère 2	Genre
	$x_i$	$y_i$			
M <sub>1</sub>	-0.418646	-0.748161	$\mu_1 = 0,99064806$ $\mu_2 = 0,99064696$ $diff. = -1,1 \times 10^{-6}$	$diff. = 9,1 \times 10^{-22}$	Hyperbole
M <sub>2</sub>	-0.409424	-0.717133			
M <sub>3</sub>	-0.400365	-0.687337			
M <sub>4</sub>	-0.391444	-0.658677			
M <sub>5</sub>	-0.382641	-0.631067			
M <sub>6</sub>	-0.373936	-0.604427			

**Conclusion.** La conjecture annoncée en section 7 de la précédente étude (Mercier & Collin, 2013, *op. Cit.*) concernant les lignes horaires d'un cadran solaire bifilaire horizontal : « (...) prennent toutes les formes des sections coniques » est insuffisante, voire inexacte. En fait, les lignes horaires ne prennent que deux genres : la droite et l'hyperbole. Pour être encore plus explicite, c'est seulement la ligne de midi qui pourra être un segment de droite (dès que l'un des fils est plongé dans le plan méridien), les autres lignes horaires étant astreintes à être des branches d'hyperboles. On retiendra les deux propositions suivantes pour un cadran solaire bifilaire horizontal à fils quelconques<sup>14</sup> :

[1] « Les lignes horaires sont des coniques ».

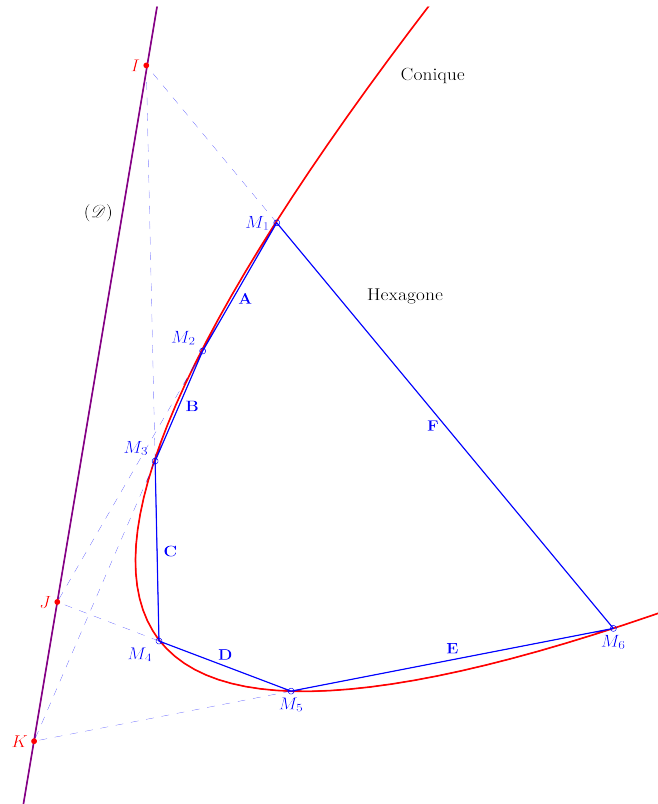
[2] « Une ligne horaire est une branche d'hyperbole, ou un segment de droite ».

<sup>14</sup>Les fils ne doivent pas être simultanément parallèles au plan du cadran bifilaire, car il a déjà été démontré dans des études précédentes que dans ce cas, les lignes horaires sont toujours des segments de droite.

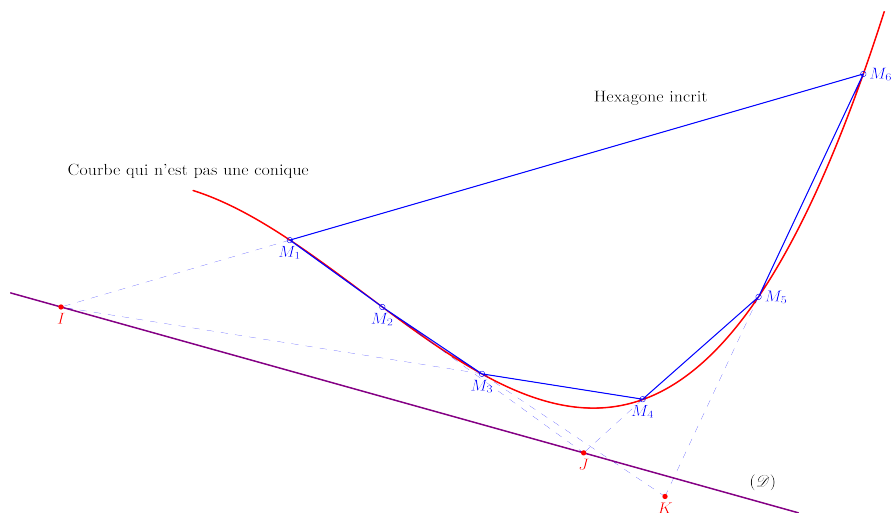
Afin de les valider, numériquement parlant, on a construit sur tableur un programme qui permet de savoir si les points d'une courbe sont sur une conique et d'en déterminer ensuite le genre. Ce programme de test est parfaitement utilisable sur n'importe quelle espèce de ligne d'un cadran solaire, et par extension on pense en particulier aux arcs-diurnes. Avec l'arrivée du logiciel HUGO, la même question demeure : qu'en est-il des lignes horaires dans les cadrans solaires bifilaires inclinés déclinants ? Cela fera peut-être l'objet d'une prochaine étude, et probablement à cette occasion, un changement dans le point de vue géométrique sera nécessaire si l'on veut comprendre pourquoi les lignes horaires sont des hyperboles. Ce changement de point de vue sera plus que nécessaire lorsqu'on envisagera le difficile problème de la nature des arcs-diurnes.

## Figures

**Figure 1-a.** Hexagone inscrit à une conique (théorème de Pascal)

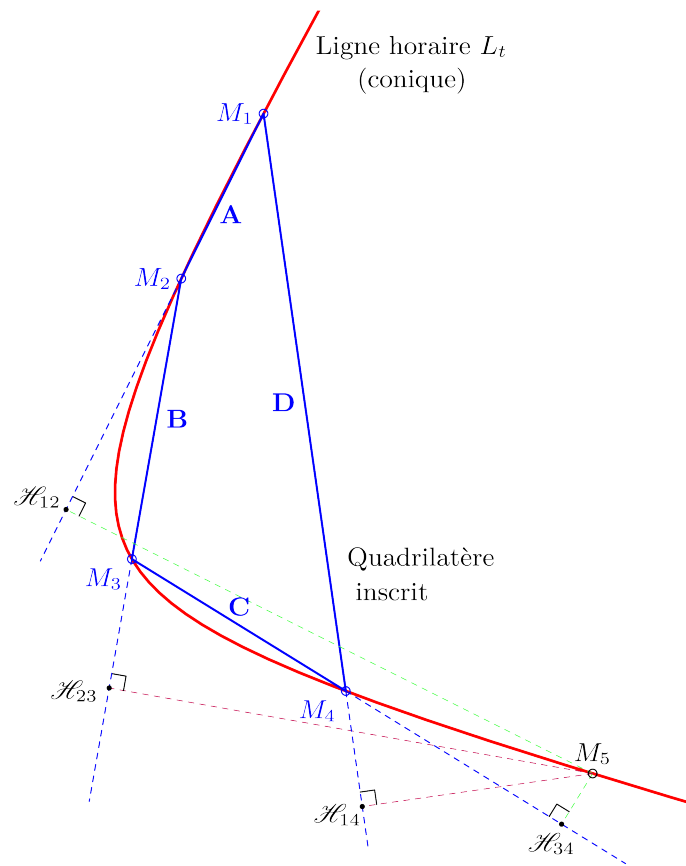


**Figure 1-b.** Hexagone inscrit à une courbe qui n'est pas une conique<sup>15</sup>



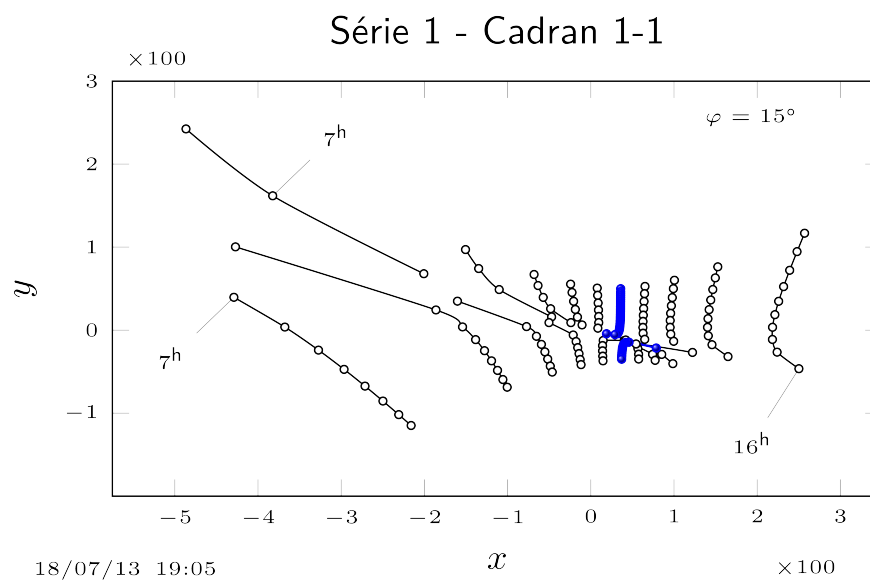
<sup>15</sup>La courbe utilisée en contre-exemple, est une courbe du troisième degré (cubique) :  $0,05 x^3 - 0,75 x - y = 0$ .

**Figure 2.** *Quadrilatère inscrit à une conique (théorème de Pappus).*

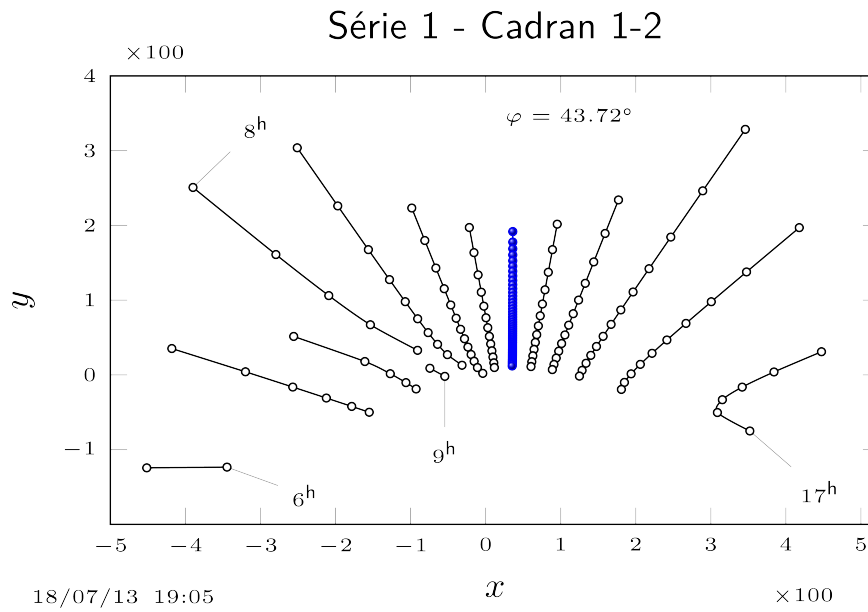


**Figure 3.** *Lignes horaires dans un cadran solaire bifilaire horizontal*

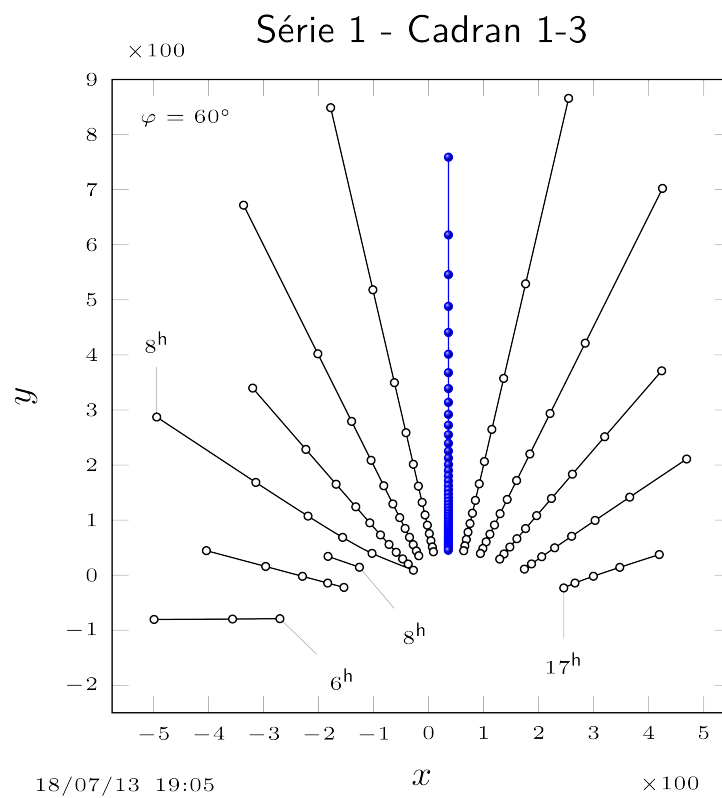
**Série 1.**  
**Fig. 3-1a.**



**Fig. 3-1b.**

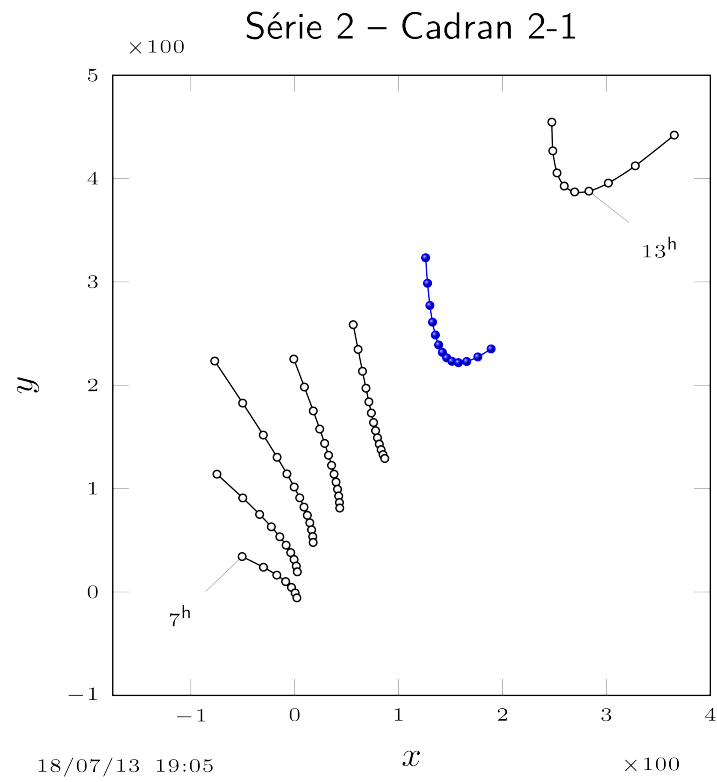


**Fig. 3-1c.**

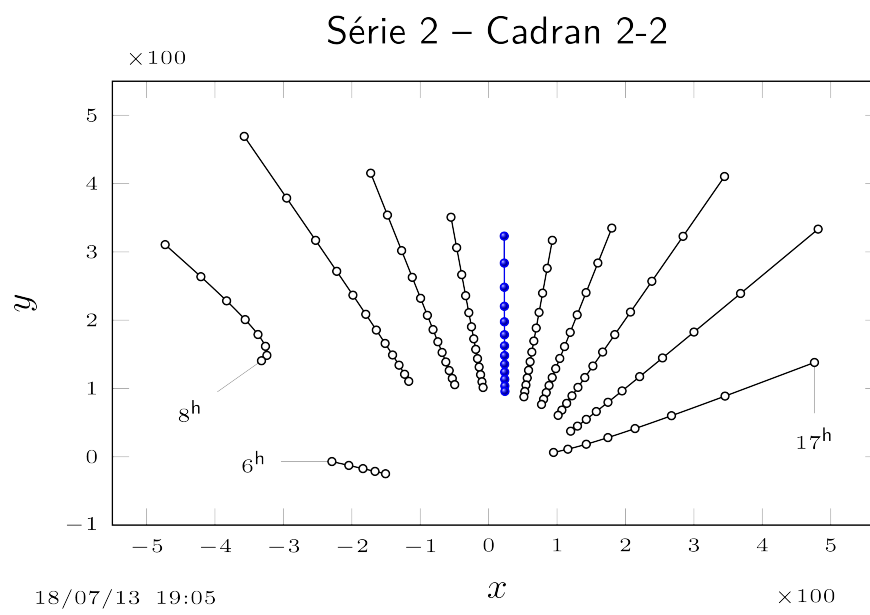


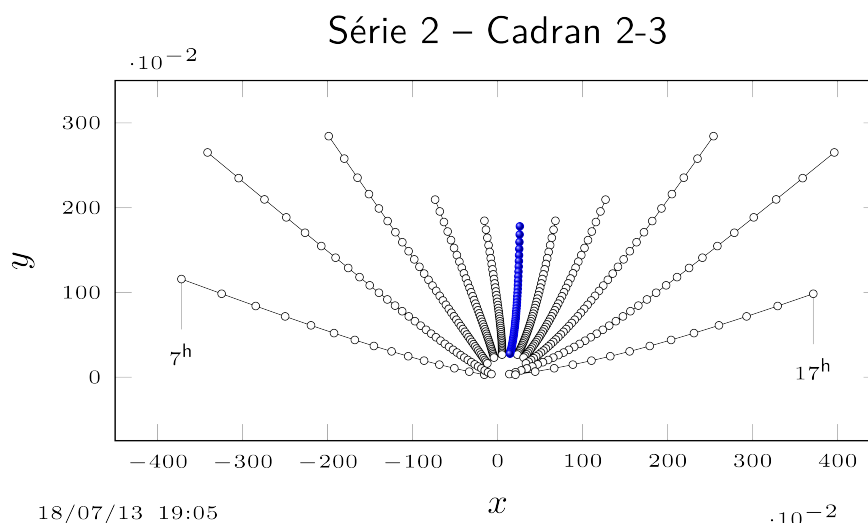
**Série 2.**

**Fig. 3-2a.**



**Fig. 3.2b.**



**Fig. 3.2c.***Tableau des caractéristiques des fils*

N°	Latitude	Fil 1				Fil 2			
		$Az_1$ (°)	$z_1$ (°)	Origine ( $x_{10}$ ; $y_{10}$ )	Distance au cadran	$Az_2$ (°)	$z_2$ (°)	Origine ( $x_{20}$ ; $y_{20}$ )	Distance au cadran
Cadran 1-1	15° N	120	25	(0 ; 0)	--	-120	10	(50 ; -15)	--
Cadran 1-2	43.72° N	120	25	(0 ; 0)	--	-120	10	(50 ; -15)	--
Cadran 1-3	60° N	120	25	(0 ; 0)	--	-120	10	(50 ; -15)	--
Cadran 2-1	43.72° N	45	65	(0 ; 0)	--	50	15	(100 ; 0)	--
Cadran 2-2	43.72° N	25	25	(0 ; 0)	--	-25	30	(50 ; 0)	--
Cadran 2-3	43.72° N	90	90	--	0.75	45	30	(0 ; 0)	--

**Remarques.** La ligne de midi est en bleu. Les images, les listings de coordonnées et les sources LaTeX sont disponibles en annexe de la version CD-Rom.

Avec le contenu du classeur « Theoreme de Pascal\_Conique projective\_v1.xlsx », le lecteur peut tester chacune des lignes horaires à sa convenance et vérifier les conclusions avancées. Il est nécessaire de faire observer que les coordonnées des points obtenus par le logiciel Hugo ne donnent pas encore de résultats probants... Cette difficulté aurait pour origine l'algorithme de calcul de l'éphéméride qui ne serait pas suffisamment précis dans le positionnement des points de coordonnées. Cela n'affecte cependant pas l'allure générale du tracé comme cela peut être vérifié, et suffit probablement même pour des réalisations concrètes. On a utilisé un programme de calcul sous le tableur Excel afin de palier à ce problème. Le fichier est appelé : « bifilaireHorizontal\_2013.xls ». Cependant, le cas d'un fil horizontal n'est pas implémenté dans cette version du fichier : on donc eu recours au logiciel de ray-tracing et je remercie M. Baillet pour son aide à la construction du fichier Povray correspondant (élaboré en 2003-2004). Le logiciel Povray fourni par défaut un listing de coordonnées des points avec 6 décimales. On n'est pas parvenu à faire afficher le même nombre de décimales que le logiciel Excel, mais cela n'a pas d'incidence particulière.