



Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

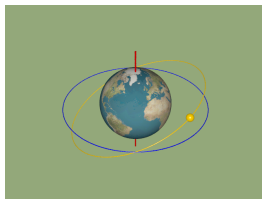
Conclusion

# Étude des lignes de déclinaison d'un cadran solaire plan d'orientation quelconque

Alexandre Vial

Commission des cadrans solaires

25 octobre 2008





# La ligne de déclinaison (ou arc diurne)

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Conclusion

c'est le parent pauvre de la gnomonique

- peu abordé des les ouvrages de référence



# La ligne de déclinaison (ou arc diurne)

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Conclusion

c'est le parent pauvre de la gnomonique

- peu abordé des les ouvrages de référence
- en France, il s'agit d'*hyperboles*



# La ligne de déclinaison (ou arc diurne)

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Conclusion

c'est le parent pauvre de la gnomonique

- peu abordé des les ouvrages de référence
- en France, il s'agit d'*hyperboles*
- sauf aux équinoxes : il s'agit d'une ligne droite



# La ligne de déclinaison (ou arc diurne)

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Conclusion

c'est le parent pauvre de la gnomonique

- peu abordé des les ouvrages de référence
- en France, il s'agit d'*hyperboles*
- sauf aux équinoxes : il s'agit d'une ligne droite

Peut-on trouver une explication simple, puis une loi générale donnant le type de la courbe ?



# La gnomonique est une science géocentrique

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

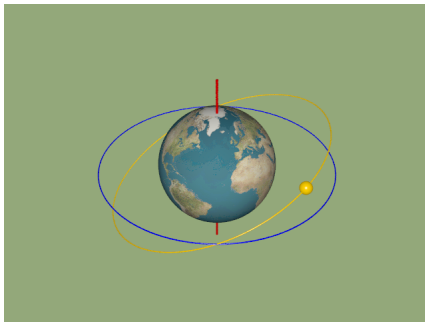
Mouvement annuel

Déclinaison fixe

Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion



**Équateur céleste :**

*projection de l'équateur sur la voute céleste*

**Écliptique :**

*trajectoire annuelle du Soleil vue de la Terre*

**Déclinaison :**

*hauteur du Soleil par rapport à l'équateur céleste*



# Mouvement apparent du Soleil au cours d'une journée

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

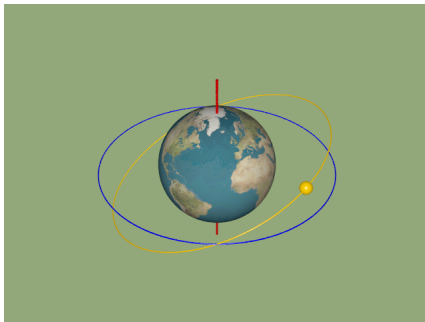
Déclinaison fixe

Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

On fixe la Terre et la déclinaison



Solstice d'été



# Trajectoire du Soleil depuis le centre de la Terre

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

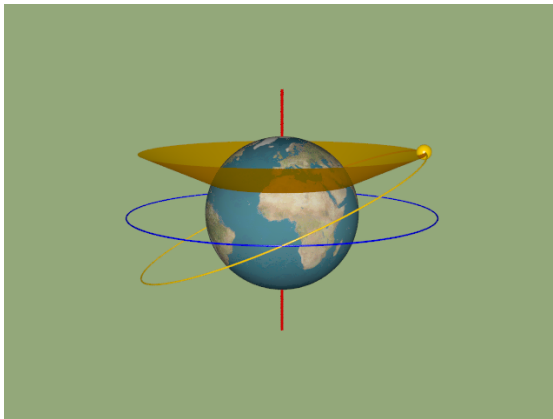
Déclinaison fixe

Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

## Solstice d'été







# Trajectoire du Soleil depuis le centre de la Terre

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

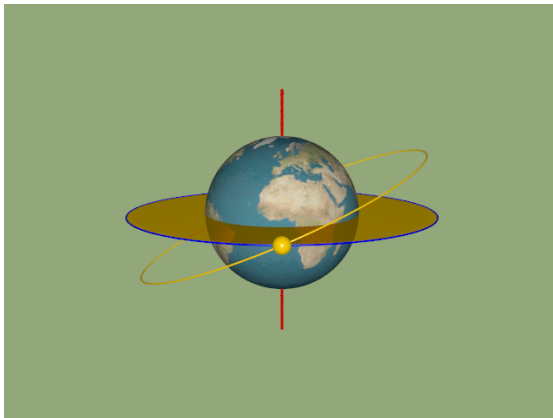
Déclinaison fixe

Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

## Équinoxe de printemps





# Trajectoire du Soleil depuis le centre de la Terre

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

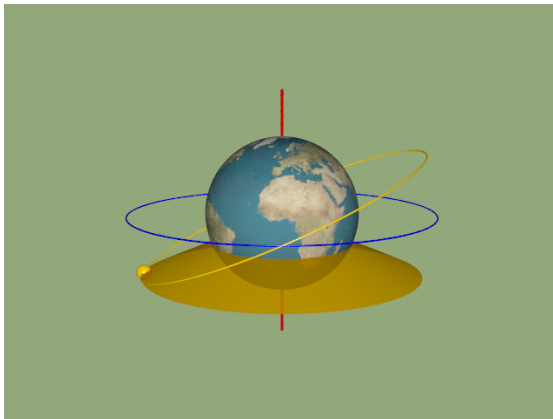
Déclinaison fixe

Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

## Solstice d'hiver





# Trajectoire du Soleil depuis le centre de la Terre

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

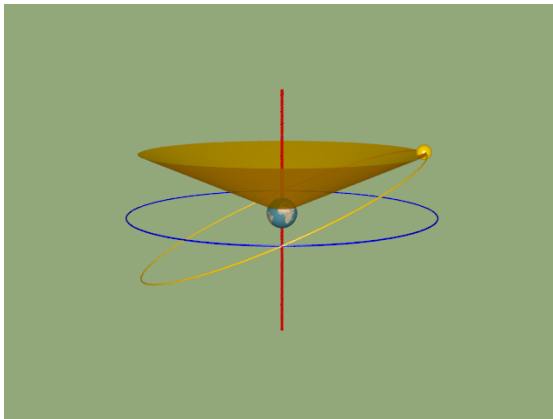
Déclinaison fixe

Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

## Solstice d'été





# Trajectoire du Soleil depuis le centre de la Terre

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

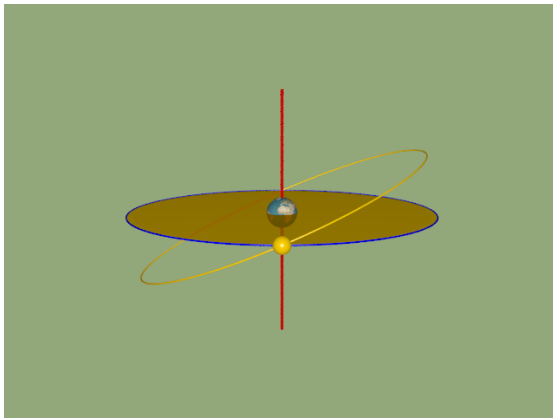
Déclinaison fixe

Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

## Équinoxe de printemps





# Trajectoire du Soleil depuis le centre de la Terre

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

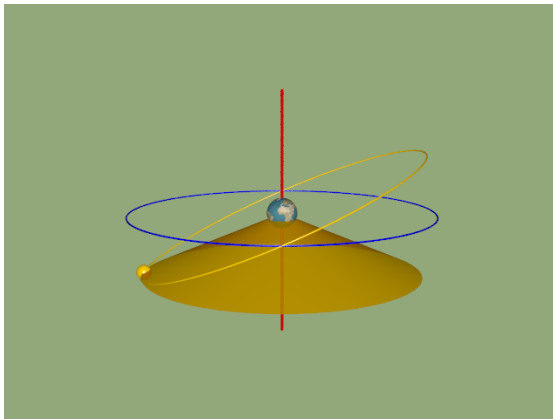
Déclinaison fixe

Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

## Solstice d'hiver





Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

Déclinaison fixe

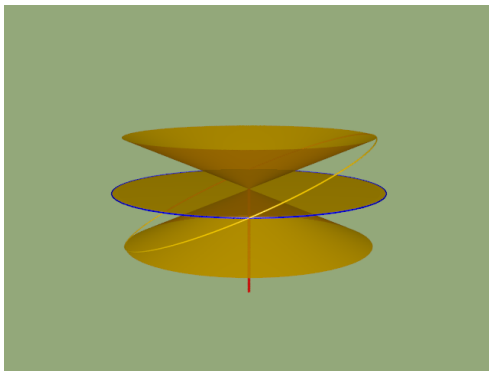
Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

# Tracé des arcs diurnes (lignes de déclinaison)

La distance Terre-Soleil est telle que tout bâton parallèle à l'axe de rotation de la Terre (appelé *style*) peut être confondu avec celui-ci.



Le cône d'ombre de l'extrémité du style correspond au cône du Soleil, mais de déclinaison opposée



# Table du cadran plan et intersection

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

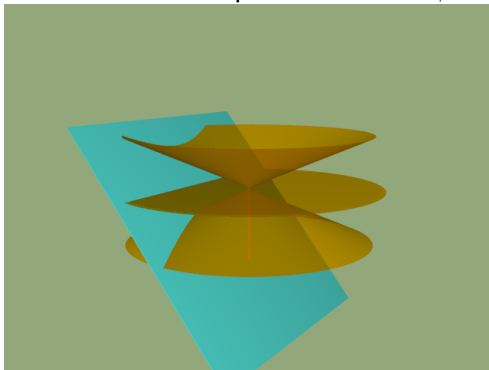
Déclinaison fixe

Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

Pour un cadran horizontal, l'angle entre la table et le style est égale à la latitude  $\phi$  (tout cadran d'inclinaison  $i$  est un cadran horizontal pour la latitude  $\phi - i$ ).





# Table du cadran plan et intersection

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

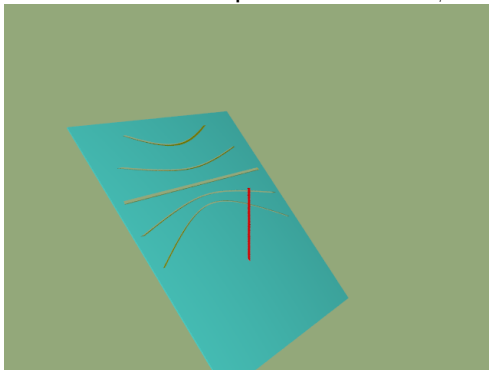
Déclinaison fixe

Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

Pour un cadran horizontal, l'angle entre la table et le style est égale à la latitude  $\phi$  (tout cadran d'inclinaison  $i$  est un cadran horizontal pour la latitude  $\phi - i$ ).







Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Mouvement annuel

Déclinaison fixe

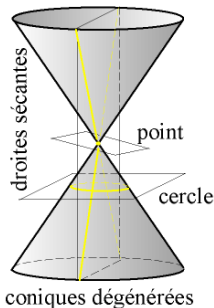
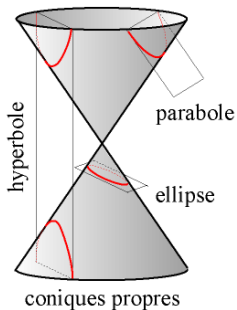
Tracé des arcs

Approche  
analytique

Conclusion

## Type des courbes

Les arcs diurnes sont des *coniques* (intersection d'un plan et d'un cône). Selon l'ouverture du cône (liée à la déclinaison du Soleil) et l'angle entre le style et la table du cadran, il existe plusieurs possibilités sur un même cadran.



Pour un cadran horizontal, les possibilités sont :  
l'hyperbole (zone tempérée), la parabole ou l'ellipse (au delà du cercle polaire), le cercle (pôles N et S), et une *ligne droite* lors des équinoxes !



Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

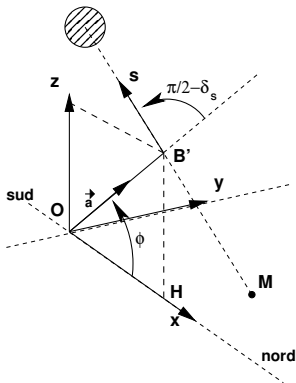
Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

# Principe du calcul (1)

La trajectoire du Soleil définit un cône de demi-angle au sommet  $\pi/2 - \delta_s$  dont l'axe est le style du cadran



Il est judicieux de choisir un système de coordonnées adapté au cadran, de manière à ce que l'une des trois coordonnées du point  $M$  soit nulle (la difficulté étant alors de déterminer les coordonnées de  $B'$  dans ce système).



## Principe du calcul (2)

L'équation de la trajectoire de  $M$  s'obtient en considérant que, comme on l'a rappelé plus haut, l'angle entre  $\vec{OB'}$  et  $\vec{B'M}$  (colinéaire à  $\vec{s}$  mais de sens opposé) est constant au cours d'une journée, on peut donc écrire

$$\frac{\vec{OB'} \cdot \vec{B'M}}{||\vec{OB'}|| \cdot ||\vec{B'M}||} = -\cos(\pi/2 - \delta_s). \quad (1)$$

La longueur  $||\vec{OB'}||$  est notée  $L_s$ , et on définit le vecteur directeur du style  $\vec{a}$  tel que  $\vec{OB'} = L_s \vec{a}$ .

On obtient finalement

$$L_s^2 \cos^2 \delta_s + \vec{a} \cdot \vec{OM} (\vec{a} \cdot \vec{OM} - 2L_s \cos^2 \delta_s) - \sin^2 \delta_s ||\vec{OM}||^2 = 0. \quad (2)$$

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion



# Cas particulier de la déclinaison nulle

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

L'équation précédente se simplifie pour donner  
 $\vec{a} \cdot \vec{OM} = L_s$ , ce qui est équivalent à

$$\vec{a} \cdot \vec{B'M} = 0. \quad (3)$$

Le lieu de  $M$  est donc le plan perpendiculaire au style, passant par son extrémité. Comme  $M$  appartient également à la table du cadran, on en conclut que  $M$  se situe à l'intersection de ces deux plans, qui est une droite.

**Les jours d'équinoxe, quelles que soient l'orientation et l'inclinaison de la table du cadran solaire, l'ombre de l'extrémité du style parcourt une droite.**



# Cadran horizontal : équation

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

On choisit comme axe  $\vec{x}$  le méridien local et comme sens positif la direction vers laquelle pointe le style, donc le nord. Le vecteur  $\vec{OB'}$  représentant le style s'écrit

$$\vec{OB'} = L_s \begin{pmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (4)$$

On considère un point  $M$  de la ligne de déclinaison (ses coordonnées sont  $(x, y, 0)$  car  $M$  est dans le plan  $z = 0$ ). En substituant ces données dans l'équation (2) on obtient

$$x^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s) - y^2 \sin^2 \delta_s - 2L_s x \cos \phi \cos^2 \delta_s + L_s^2 \cos^2 \delta_s = 0. \quad (5)$$



Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

## Cadran horizontal : courbes

Selon le signe du produit des coefficients des termes  $x^2$  et  $y^2$ , plusieurs types de courbes peuvent être obtenus :

- pour des latitudes où le Soleil se couche tous les jours de l'année, on a  $\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s = \cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi > 0$ , il s'agit de l'équation d'une **hyperbole**.
- si l'on se trouve à une latitude où le Soleil ne se couche pas un jour de déclinaison  $\delta_s$ , alors  $\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi < 0$ , et l'équation (5) est alors celle d'une **ellipse**.
- dans le cas très particulier où  $\cos^2 \delta_s = \sin^2 \phi$ , on a alors une parabole :  
$$-y^2 \tan^2 \delta_s - 2xL_s \cos \phi + L_s^2 = 0.$$
- Pour  $\delta_s = 0$  (jour d'équinoxe), alors l'équation (3) nous fournit  $x \cos \phi = L_s$ , ce qui est l'équation d'une **droite**, comme on l'a déjà vu.
- Enfin, si  $\phi = \pm\pi/2$  (Pôle Nord ou Pôle Sud), on obtient un **cercle** :  $x^2 + y^2 = \frac{1}{\tan^2 \delta_s} L_s^2$ .



# Cadran horizontal ou incliné : récapitulatif

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

	Horizontal	Horizontal incliné ( $i$ )
Hyperbole	$\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi > 0$	$\cos^2 \delta_s - \sin^2(\phi - i) > 0$
Parabole	$\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi = 0$	$\cos^2 \delta_s - \sin^2(\phi - i) = 0$
Ellipse	$\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi < 0$	$\cos^2 \delta_s - \sin^2(\phi - i) < 0$
Cercle	$\phi = \pm \pi/2$	$i = \phi - \pi/2$
Droite	$\delta_s = 0$	$\delta_s = 0$

**TABLE:** Lignes de déclinaison d'un cadran horizontal et horizontal incliné.



Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

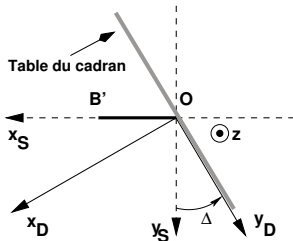
Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

## Cadran vertical déclinant

On part du cadran vertical méridional, et on tourne la table d'un angle  $\Delta$  autour de l'axe  $\vec{z}$  ( $\Delta < 0$  pour une orientation vers l'Est).



Dans le repère  $(O, \vec{x}_D, \vec{y}_D, \vec{z})$  le style est représenté par

$$\vec{OB'} = L_s \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \Delta \\ \cos \phi \sin \Delta \\ -\sin \phi \end{pmatrix}. \quad (6)$$





# Cadran vertical déclinant : équation

On trouve

$$\begin{aligned} & -y_D^2(\sin^2 \delta_s - \cos^2 \phi \sin^2 \Delta) + z^2(\sin^2 \phi - \sin^2 \delta_s) \\ & + -2y_D L_s \cos \phi \cos^2 \delta_s \sin \Delta + 2z L_s \sin \phi \cos^2 \delta_s \\ & + -2y_D z \cos \phi \sin \phi \sin \Delta \\ & + L_s^2 \cos^2 \delta_s \\ & = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

À l'aide d'un changement de repère judicieux, on peut supprimer le terme croisé  $y_D z$  (afin de déterminer plus facilement le type de courbe) : il s'agit d'une rotation d'angle  $\theta$  telle que

$$\tan \theta = \frac{\sin \Delta}{\tan \phi}, \tag{8}$$

ce qui correspond à la pente de la droite des équinoxes avec l'horizontale, ainsi qu'à l'angle que fait la sous-styleire avec la ligne de midi.

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion



# Cadran vertical déclinant : courbes

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

Version Bedos de Celles de la formule précédente :

Le sinus total est au sinus de la déclinaison du plan, comme la tangente du complément de la hauteur du pôle sur l'horizon du lieu est à la tangente de l'angle compris entre la Méridienne et la souffrylaire.

En fin de compte, on montre que si  $\frac{\cos^2 \delta_s}{\cos^2 \phi} > \cos^2 \Delta$ , c'est une hyperbole, ce qui est toujours vrai en dehors de la zone entre les tropiques ( $|\phi| > |\delta_s|$ ).

Par contre, dans la zone tropicale, on peut toujours trouver un mur tel que  $\cos^2 \delta_s / \cos^2 \phi < \cos^2 \Delta$ , et on pourra avoir des ellipses comme lignes de déclinaison. Celles-ci ne seront bien sûr pas complètes, puisque lorsque le Soleil est couché, il n'y a pas d'ombre.



Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

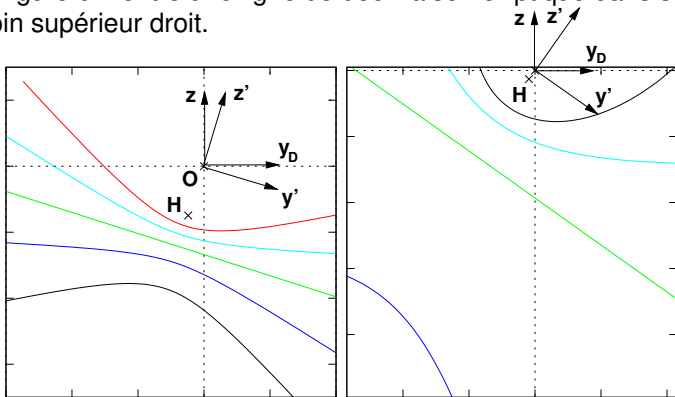
Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

## Cadran vertical déclinant : courbes

Deux exemples de cadrans verticaux déclinants. Le cadran de la figure b montre une ligne de déclinaison elliptique dans son coin supérieur droit.



(a) Cadran vertical de déclinaison  $-30^\circ$  Est pour la latitude  $\phi = 48^\circ$  Nord.

(b) Cadran vertical de déclinaison  $-11^\circ$  Est pour la latitude  $\phi = 15^\circ$  Nord.

**FIGURE:** Exemples de cadrans solaires verticaux déclinants. Lignes calculées pour les déclinaisons  $\delta_s = \pm 23.44^\circ$ ,  $\delta_s = \pm 11.725^\circ$  et  $\delta_s = 0^\circ$ .



# Cadran vertical déclinant : récapitulatif

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

	Vertical	Vertical déclinant ( $\Delta$ )
Hyperbole	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi > 0$	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi \cos^2 \Delta > 0$
Parabole	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi = 0$	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi \cos^2 \Delta = 0$
Ellipse	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi < 0$	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi \cos^2 \Delta < 0$
Cercle	$\phi = 0$	$\phi = 0, \Delta = 0(+\pi)$
Droite	$\delta_s = 0$	$\delta_s = 0$

**TABLE:** Lignes de déclinaison d'un cadran vertical et vertical déclinant.



Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

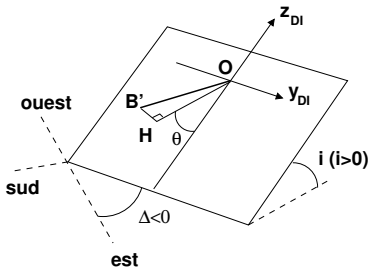
Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

## Cadran déclinant incliné

On part du cadran vertical méridional déclinant, et on l'incline, ce qui conduit à prendre pour système de coordonnées le repère  $(0, \vec{x}_{DI}, \vec{y}_{DI}, \vec{z}_{DI})$  avec  $\vec{z}_{DI}$  la ligne de plus grande pente ascendante.



On peut montrer que les coordonnées du vecteur  $\vec{OB'}$  dans ce nouveau repère sont alors

$$\vec{OB'}_{DI} = L_s \begin{pmatrix} \cos \Delta \sin i \cos \phi - \cos i \sin \phi \\ \sin \Delta \cos \phi \\ -\sin i \sin \phi - \cos \Delta \cos i \cos \phi \end{pmatrix} \quad (9)$$



# Cadran déclinant incliné : récapitulatif

Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Principe du calcul

Cadran horizontal

Cadran vertical déclinant

Cadran déclinant incliné

Conclusion

	Déclinant incliné
Hyperbole	$\zeta^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \Delta - \sin^2 \delta_s > 0$
Parabole	$\zeta^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \Delta - \sin^2 \delta_s = 0$
Ellipse	$\zeta^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \Delta - \sin^2 \delta_s < 0$
Cercle	$\Delta = 0, i = \phi - \pi/2$
Droite	$\delta_s = 0$

**TABLE:** Lignes de déclinaison d'un cadran déclinant incliné, avec  $\zeta = \cos \phi \cos \Delta \cos i + \sin \phi \sin i$ .



Alexandre Vial

Motivation

Approche  
graphique

Approche  
analytique

Conclusion

# Conclusion

Une étude attentive des tableaux montre qu'il est relativement aisé de déterminer toutes les conditions à partir du seul cas du cadran vertical en effectuant des transformations minimales.

Par exemple, il suffit de convertir  $\cos \phi$  en  $\cos \phi \cos \Delta$  pour passer du cadran vertical au cadran vertical déclinant.

La seule chose à retenir est que dans tous les cas, la nature de la ligne de déclinaison est donnée par le signe

de  $(\text{style polaire})^2 \cos^2 \text{déclinaison} - (\text{style droit})^2$ .

- positif : hyperbole
- nul : parabole
- négatif : ellipse