



Du calcul à la réalisation des



Cadran

solaires

Pierre TOSI

SOMMAIRE

Part 1		Appellations particulières les plus courantes Rappels sur les mouvements de la terre Comment utiliser des ombres pour apprécier les heures Géométrie des mouvements apparents du soleil Calcul des heures de lever et coucher du soleil Détermination des cadrans plans à style polaire Détermination par tracés Détermination par calculs simples : Peut-on avoir l'heure exacte avec un cadran solaire ? Formules de calculs de la déclinaison et de l'équation du temps Comment trouver le Nord (ou la déclinaison gnomonique d'un mur) Problème de l'ombre d'un mat vertical ou de l'arête d'un mur	Page 3
Part 2		Cadrans équatoriaux Cadran cylindrique sans style Cadran polaire escalier Cadran à colonne inclinée Utilisation de l'hélicoïde développable Cadran à développante de cercle Cadrans coniques Cadran à style circulaire Cadran sans calcul du type escalier	Page 22
Part 3		Méthode astronomique, trigonométrie sphérique Rappel des démonstrations Inclinaison de la ligne jour nuit Coordonnées astronomiques, hauteur et azimut solaires Détermination de l'ombre d'un mat vertical sur un plan horizontal Méthode générale de calcul des cadrans par la trigonométrie sphérique Application au cadran sur un toit et au triple cadran Tolérances de construction et de calage. Effets sur les indications Cotations du style dans un cadran pseudo vertical	Page 36
Part 4 a		Cadran solaire à fil dans un cylindre Cadran analemmatique Cadran analemmatique généralisé. Cas particulier du cadran circulaire Cadrans dans des cylindres horizontaux Hauteur d'ombre portée par un encorbellement sur un mur vertical	Page 54
Part 4 b		Densité de flux sur une surface plane ensoleillée Ombre d'un clou sur un arbre Cadran à colonne verticale Cadran colonne à style tournant Cadran de berger Cadran conique creux Cadran dit de capucin : Cadran pendulaire de hauteur Cadran à chapiteau carré sur colonne cylindrique Cadran cylindrique vertical Cadran bicylindre	Page 65

Part 5

Chemin du marcheur vers le soleil (ou autre méthode de calcul de l'azimut)
Déterminer l'heure à laquelle l'ombre d'un poteau aura une longueur donnée :
Cadran à mat vertical immergé ou à réfraction
Cadrans d'azimut à mats verticaux et araignées
Cadran avec sphère tangente à 2 plans inclinés symétriques
Cadran à style vertical dans un Vé
Cadran conique creux pour heures d'hiver et d'été

Page 82

Part 6 a

Bifilaire orthogonal horizontal
Bifilaire orthogonal vertical
Bifilaire horizontal à fils non orthogonaux
Géométrie plane du bifilaire non orthogonal
Bifilaire sur plan incliné quelconque, Etude de l'ombre d'un bâton planté à angle droit sur un sol plan quelconque
Propriétés du graphique bifilaire
Méthode de tracé
Comment calculer les lignes par points ?
Avec changement de coordonnées pour utiliser les hauteur et azimut soleil
Autre méthode de calcul d'un bifilaire horizontal
Et avec un 3^{ème} fil ?
Cadran solaire cubique

Page 99

Part 6 b

Considérations théoriques et pratiques sur les cadrans bifilaires à plan quelconque
Cadran bifilaire polaire
Cadran bifilaire type B. Rouxel

Page 122

Bibliographie

Page 131

PARTIE 1

Un cadran solaire est un appareil destiné à l'observation de l'ombre créée par le soleil pour en déduire l'heure du jour.

Connus depuis au moins 5 siècles avant Jésus-Christ, leur théorie et leur précision se sont perfectionnées jusqu'au XVIII^{ème} siècle, époque où ils tombent en désuétude à cause des horloges mécaniques devenues précises et assez fiables.

Aujourd'hui ce sont des objets de curiosité, à caractère historique, qui restent cependant les meilleurs témoins des mouvements de rotation et de translation qui animent notre planète.

Muni d'un cadran solaire vous pouvez connaître l'heure à condition de savoir où est le Nord; réciproquement, il vous donne le Nord si vous connaissez l'heure. Evidemment, il faut encore que le soleil veuille bien briller et que le cadran soit construit pour la latitude locale !

La théorie en est assez simple et ne fait appel qu'à des bases de géométrie dans l'espace et dans le plan, aidées par de la trigonométrie et un peu d'algèbre. Le plan du document n'obéit pas à une logique bien formelle mais au cheminement, étendu sur quelques années, des réflexions de l'auteur.

Appellations particulières les plus courantes :

Gnomon : Bâton ou obélisque planté verticalement dans le sol. A permis les premières observations. Pratiquement inutilisable pour lire l'heure, sauf à midi

Gnomonique : Art de déterminer les cadrans solaires

Style : Tige fine, inclinée, dont l'ombre projetée sur des graduations permet de lire l'heure. Peut être remplacée par l'arête, rectiligne et également inclinée, d'un solide dont l'ombre couvre partiellement des graduations

Quadrannier : Spécialiste des cadrans. Appellation utilisée du XII^{ème} au XVII^{ème} siècle

Cadran horizontal : L'ombre du style est projetée sur un plan horizontal portant les graduations du temps

Cadran vertical méridional : Les graduations sont tracées sur un mur vertical orienté exactement Est-Ouest.

Cadran vertical déclinant : Cadran établi sur un mur vertical présentant un certain écart, d'un côté ou de l'autre, par rapport au plan Est-Ouest

Cadran équatorial : Cadran dont l'ombre du style se projette sur une surface de révolution dont l'axe coïncide avec le style

Rappels sur les mouvements de la terre :

Chaque jour la terre tourne sur elle-même, d'Ouest en Est, à vitesse constante autour de l'axe passant par les pôles. Ceci produit la succession des jours solaires dont la durée est de 24 h. Tout en tournant elle se déplace dans une translation de même sens, presque circulaire, autour du soleil, en une année de 365 jours 6 heures 9 minutes 2 secondes. Elle fait donc un tour de plus sur elle-même et sa vitesse de rotation par rapport aux étoiles est de 1 tour en 23 heures 56 minutes 4 secondes, qui est la durée du jour sidéral.

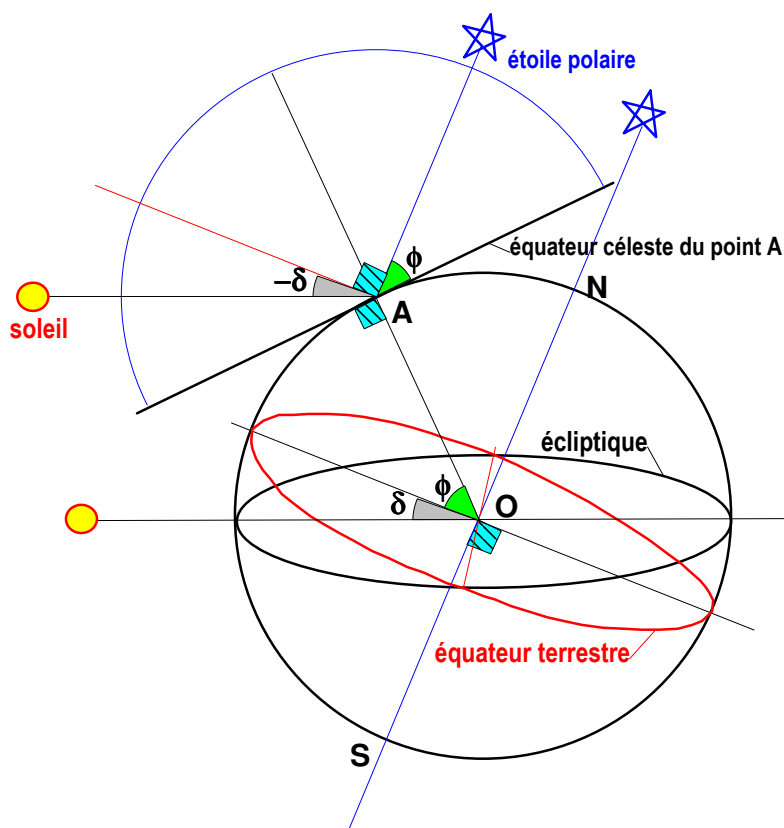
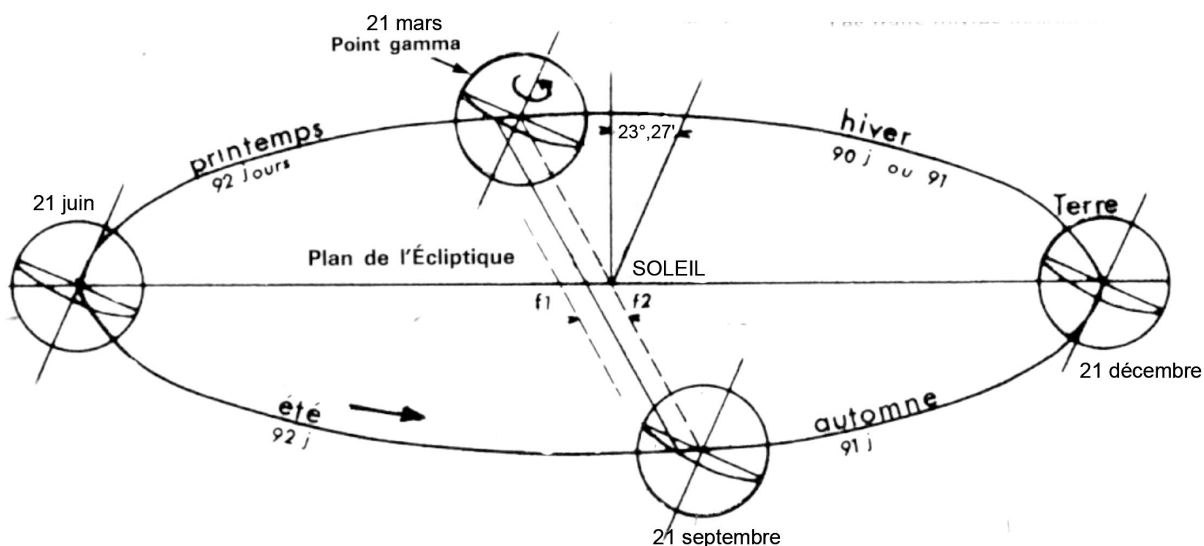
La trajectoire autour du soleil s'appelle écliptique. Elle appartient au plan écliptique qui contient le soleil. L'axe de rotation de la terre est incliné de $23^{\circ} 27'$ par rapport à la normale à ce plan. Il en résulte le cycle répétitif des saisons et la variation de durée des jours et des nuits au cours de l'année.

Pour un observateur de l'espace stellaire, considéré comme fixe, la terre est une boule de rayon 6367 km qui tourne sur elle-même autour d'un axe incliné, et se déplace à la vitesse de 29,8 km/sec sur une ellipse, presque circulaire, de rayon moyen 149,6 E⁶ km et au foyer de laquelle se trouve une sphère, lumineuse et chaude, de 675000 km de

rayon. La vitesse tangentielle dans la rotation journalière est beaucoup plus faible, mais à la latitude de 48.6 elle est cependant de 302 m/sec, c'est-à-dire 100 fois moins.

On imagine mieux ces proportions par une réduction d'échelle :

Diamètre de la terre	2 cm
Diamètre du soleil	2,18 m
Rayon moyen de l'orbite	235 m
Déplacement sur l'orbite en 24 h	4,04m



Comme il y a combinaison de déplacements l'analyse des ombres portées ne devient simple que si on isole, le temps de comprendre..., l'ensemble terre-soleil en lui appliquant une rotation de vitesse opposée et d'axe confondu avec celui de la terre. Dans cette hypothèse la terre paraît fixe et le terrien retrouve ses habitudes, avec le soleil qui tourne de gauche à droite. Les dimensions relatives font que les conclusions restent exactes quand on considère un axe issu de la surface terrestre pourvu qu'il soit parallèle à l'axe de la terre.

La figure ci-contre représente la terre en position de solstice d'hiver. L'équateur terrestre perpendiculaire à l'axe de rotation Nord-Sud a une angularité qui varie de $\pm \delta$ par rapport au plan écliptique.

Au point A de latitude Φ , le plan horizon perpendiculaire à la verticale OA définit l'équateur céleste du point A

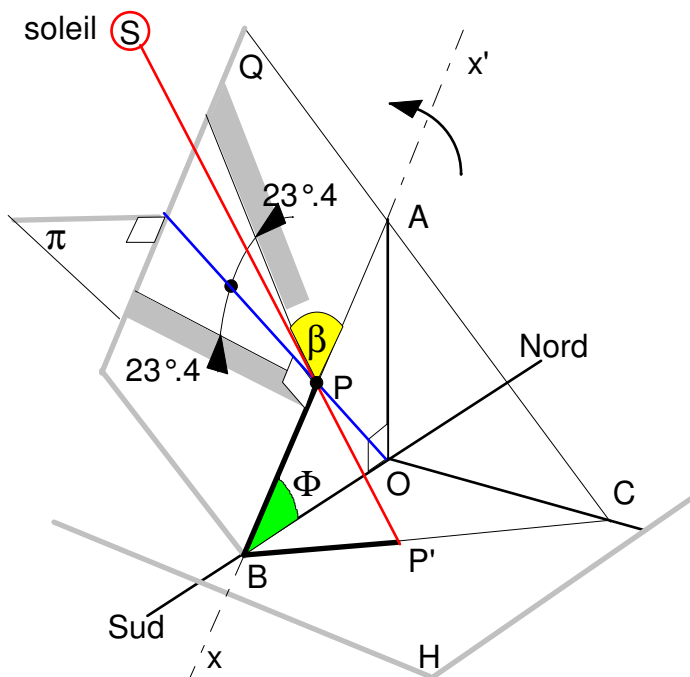
Comment utiliser des ombres pour apprécier les heures

En observant au cours de l'année et à une même heure, les ombres d'un gnomon vertical, on constate que leurs directions présentent une divergence notable. Le gnomon n'est exact qu'à midi quand les ombres de longueurs variables sont confondues et orientées au Nord (dans l'hémisphère nord).

Pour avoir des directions d'ombre indépendantes des saisons il faut utiliser un style parallèle à l'axe de la terre. C'est-à-dire situé dans un plan vertical orienté Nord-Sud et incliné sur le plan horizontal d'un angle égal à la latitude du lieu considéré. (la latitude est l'angle mesuré sur un méridien entre le lieu concerné et l'équateur, par définition la latitude de l'équateur est 0° et celle du pôle 90°)

Géométrie des mouvements apparents du soleil

Considérons une droite (x, x') parallèle à l'axe de la terre et sur cette droite un point P. Dans le plan (Q) constitué par cette droite et le centre du soleil est tracée la droite SP qui fait un certain angle (β) avec (x, x') . Comme le chemin parcouru par la terre en une journée sur l'écliptique est relativement faible, on peut dire que cet angle est constant au cours d'une journée d'observation. Le mouvement apparent du soleil se décrit alors par la rotation régulière, (1 tour en 24 heures), du plan (Q) autour de la charnière (x, x') . Ses rayons engendrent un cône d'axe (x, x') et de demi angle au sommet (β)

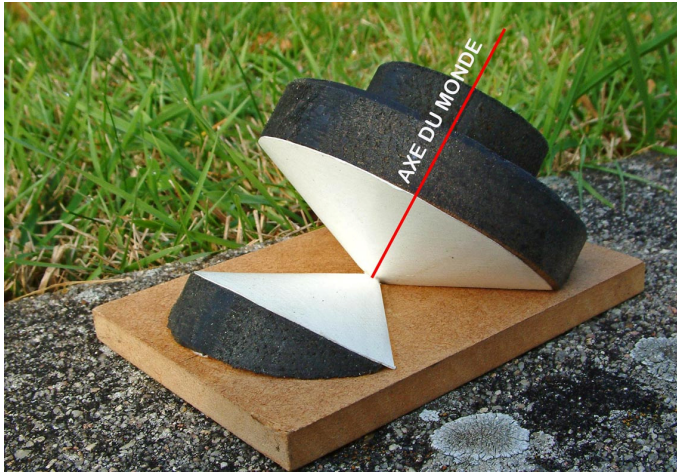


Si maintenant on considère le moment particulier de l'équinoxe, où l'on sait que le rayon solaire SP est perpendiculaire à l'axe de la terre. Le soleil apparent reste donc toute la journée dans le plan (π) perpendiculaire à x, x' en P, le cône précédent est devenu un plan.

En allant vers les solstices l'angle solaire évolue de part et d'autre pour engendrer 2 familles de cônes opposés par le sommet. Cet angle passe par un maximum à chaque solstice et sa valeur est égale à l'inclinaison de l'axe de la terre par rapport à une perpendiculaire au plan de l'écliptique ($\pm 23^\circ 27'$)

Il est localement midi (heure solaire) quand le plan (Q) passe

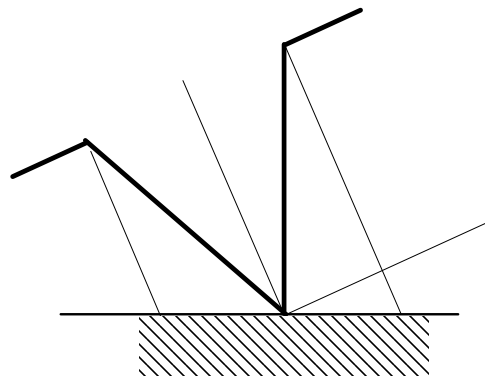
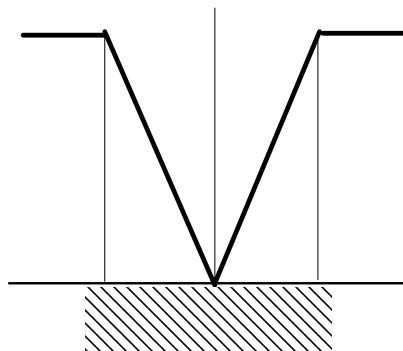
par l'axe de la terre. C'est donc un plan vertical pour le lieu considéré et il est perpendiculaire au plan (H) du sol horizontal. L'angle (Φ) de la droite x, x' avec le plan (H) est égal à la latitude locale.



La figure montre l'espace où évoluent les rayons solaires entre 2 cônes tout en appartenant au plan horaire qui tourne autour de l'axe du monde à la vitesse de 15 degrés par heure

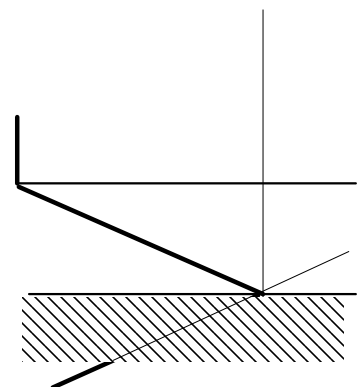
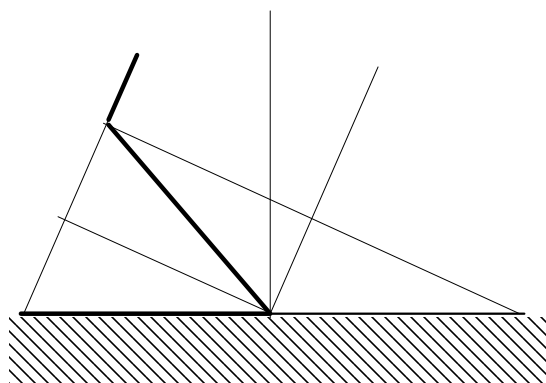
Cette maquette correspond à la latitude de Paris (env. 48.6 deg.).

Les croquis suivants montrent des latitudes particulières. L'angle α est le complément de l'angle θ , expliqué et calculé page suivante.



A l'équateur, latitude = 0
La longueur des jours est invariable de 6 h. à 18 h.. A midi aux équinoxes le soleil passe exactement au zénith

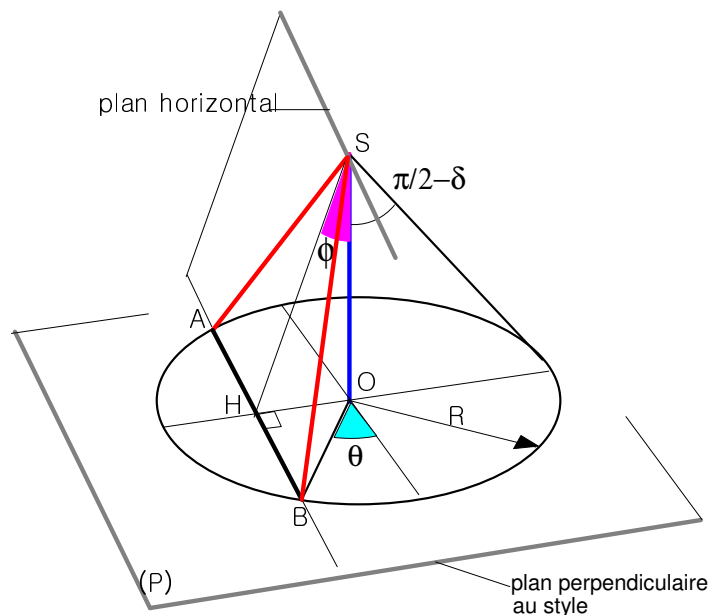
Aux tropiques, latitudes + ou - 23.45 deg
 $\cos \alpha = \tan \phi \times \tan \delta = 0.4338^2 \rightarrow \alpha = 79.15 \text{ deg.}$
 $\frac{79.15}{15} = 5.28 \text{ heures} \rightarrow \text{différence} = 6 - 5.28 = 0.72h$



Au cercle polaire, latitude = 66.55 deg.
 $\cos \alpha = 0.4338 \times 2.305 \rightarrow \alpha = 90 \text{ deg.}$
Au solstice d'été le soleil ne se couche pas.
Au solstice d'hiver il ne se lève pas

Au pôles, latitude 90 deg. la période comprise entre les équinoxes reste constamment ensoleillée ou plongée dans la nuit

Calcul des heures de lever et coucher du soleil



En faisant abstraction du diamètre apparent du soleil, de la courbure de la terre et des effets de pénombre on peut ramener le problème à l'intersection d'un cône variable avec un plan horizontal passant par son sommet. La figure est retournée pour aider le dessin et la compréhension.

Le cône d'angle au sommet $\frac{\pi}{2} \pm \delta$ est

coupé par le plan (SAB) incliné de l'angle ($\Phi =$ latitude) par rapport à son axe. Le plan (P) perpendiculaire à l'axe peut être considéré comme plan horaire (parallèle au plan équinoxial). Il suffit donc de calculer l'angle (θ) pour estimer l'écart par rapport à 6 heures ou 18 heures

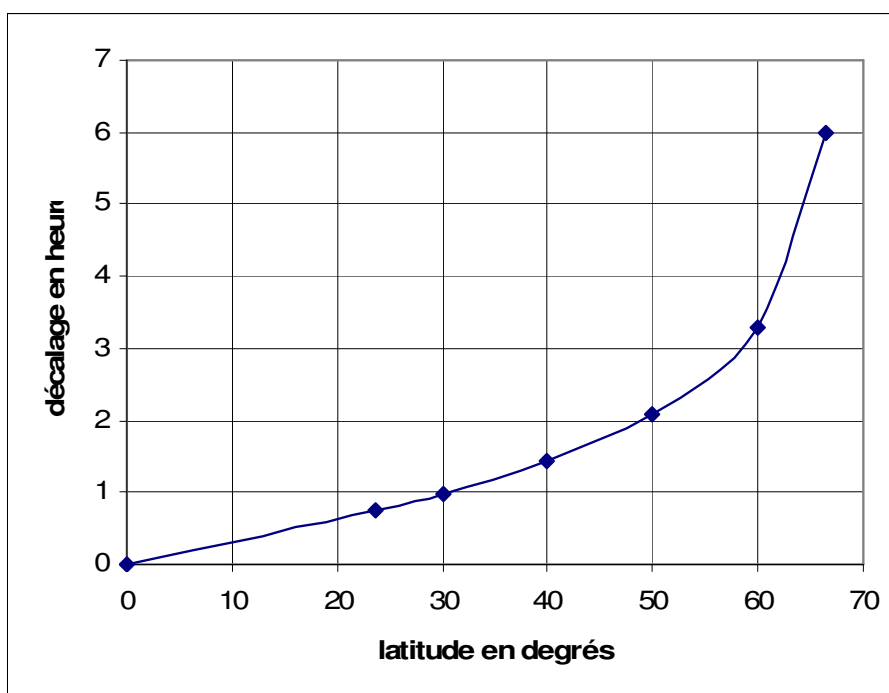
$$\text{On a } \sin \theta = \frac{OH}{OB}$$

$$\text{Avec : } OH = OS \times \operatorname{tg} \phi \quad \text{et } OB = OS \times \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \quad \text{d'où : } \boxed{\sin \theta = \operatorname{tg} \phi \times \operatorname{tg} \delta}$$

Application $\delta = \pm 23^{\circ},4$ (solstices) $\phi = 48^{\circ},6$ (latitude)

On trouve $\theta = 29^{\circ},4$, c'est-à-dire qu'aux solstices la différence, en région parisienne, est d'environ ± 2 heures par rapport à l'équinoxe (lever 6 h et coucher 18 h).

En calculant depuis l'équateur jusqu'au cercle polaire on obtient la courbe ci-contre du décalage en heures du lever et du coucher du soleil par rapport à 6 heures. On voit qu'à l'équateur les jours et les nuits ont une durée constante de 12 heures.



Détermination des cadrans plans à style polaire

Déterminer un cadran solaire, c'est connaître la position apparente du soleil au cours de chaque journée de l'année.

L'adepte de géométrie considère d'abord, que le soleil est toujours dans un plan qui pivote régulièrement, à la vitesse de 15 degrés à l'heure, autour de l'axe de la terre, (ou plus simplement, par le fait des très grandes distances, autour d'un axe local qui lui est parallèle). Au cours de l'année la position peut être précisée par l'angle de déclinaison qui exprime alors que les rayons solaires décrivent des cônes variables de sommet commun et dont la transition passe par l'état de plan perpendiculaire à l'axe de la terre aux moments des équinoxes.

Partant de ces éléments la théorie des cadrans polaires repose sur la géométrie plane, la géométrie dans l'espace, la géométrie descriptive et la trigonométrie.

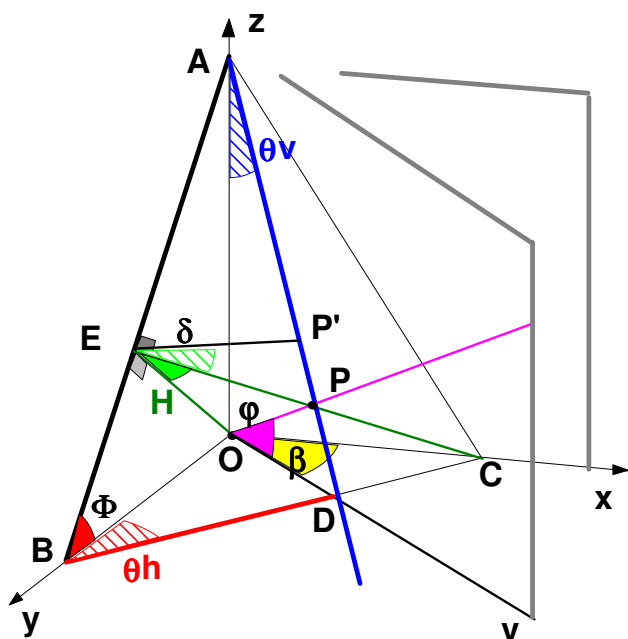
Pour une latitude constante, il n'y a donc que 2 paramètres à considérer : l'angle horaire et l'angle de déclinaison.

Les astronomes considèrent le soleil comme un astre et sa position s'exprime par 4 angles : l'azimut, la hauteur, l'angle horaire et l'angle de déclinaison.

Cela conduit par principe à des calculs plus complexes basés sur la trigonométrie sphérique, l'algèbre à coordonnées tridimensionnelles avec des changements de coordonnées qui permettent la conception de cadrans capables de s'affranchir du style polaire

Détermination par tracé

La géométrie simple permet de déterminer les cadrans polaires courants, à projection sur plan horizontal et sur plan vertical en général modérément incliné par rapport à la direction Est-Ouest. (inférieur à environ 40 deg.)



Dans la figure ci-contre, le plan vertical yOz est orienté Nord-Sud, le plan xOy est horizontal, le plan xOz est vertical orienté Est-Ouest.

On se propose de graduer un plan vertical vOz , orienté de l'angle β (vers l'Ouest dans le cas de figure)

La droite AB faisant l'angle Φ de latitude par rapport à l'horizontale représente un style polaire. En projetant en E le point O sur AB se trouvent constitués le style BE d'un cadran horizontal et le style AE d'un cadran vertical.

Le plan OEx qui est perpendiculaire au style AB est donc le plan équinoxe commun aux 2 cadrans.

A un point C sur Ox correspond l'angle horaire H (où 15 degrés représentent 1 heure). C'est l'heure où le soleil est présent dans le plan ABC et par

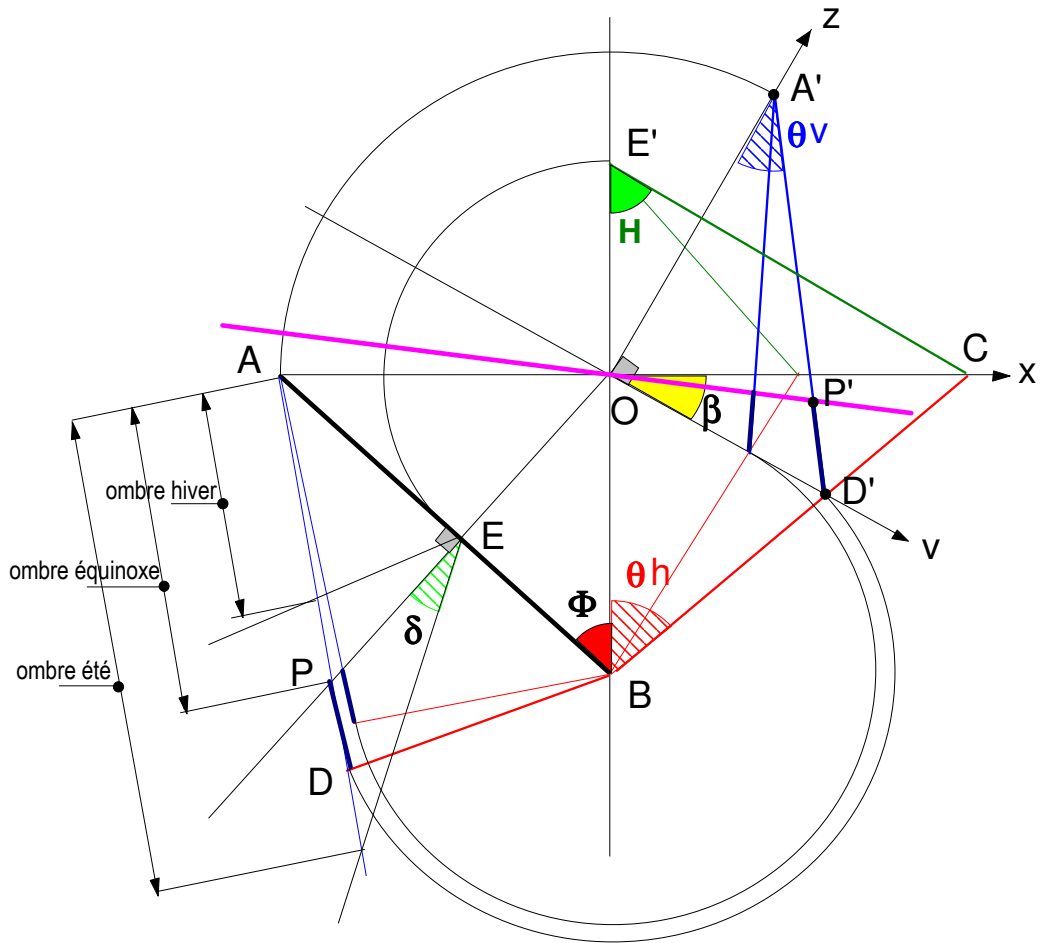
conséquent BC est l'ombre sur le plan horizontal, AC l'ombre sur le plan vertical Est-Ouest et AD l'ombre sur le plan vertical qui nous intéresse.

On peut graduer le plan horizontal où θ_h correspond à l'heure H et le vertical où θ_v correspond à l'heure H.

Le point P est l'ombre de l'extrémité E du style vertical à l'heure H et à l'équinoxe.

En traçant l'angle PEP' (δ) on obtient l'ombre du point E quand la déclinaison est égale à δ . Sur la figure l'angle est pris dans le sens du solstice d'hiver qui donne l'ombre minimale quand $\delta = 23.6 \text{ deg.}$. Il suffit de porter δ de l'autre côté pour arriver aux ombres du solstice d'été. La droite OP à l'intersection du plan équinoxe et du

plan concerné représente le lieu géométrique de l'ombre du point E au jour de l'équinoxe
 La figure suivante montre la détermination d'un cadran vertical par simple tracé



Les données sont l'angle Φ de latitude, l'angle horaire H , l'angle β du plan, l'angle δ de déclinaison. La longueur AB est choisie pour la facilité et la précision des tracés. Il en résulte la longueur AE du style qui servira à mettre le cadran à l'échelle désirée.

On se propose avec une règle, un compas et un rapporteur d'angle de déterminer : l'angle d'ombre θ_v , les longueurs de l'ombre à l'équinoxe, aux déclinaisons $+$ et $- \delta$ ainsi que la droite d'équinoxe.

La figure correspond à une certaine heure de l'après-midi d'un cadran orienté vers l'Ouest.

Le plan vertical Nord-Sud est rabattu à gauche autour de Oy . Le plan vertical Est-Ouest est rabattu en haut autour de Ox . Le plan du cadran est rabattu autour de Oz . La vraie grandeur du triangle ABD est rabattue autour de AB .

L'angle H à partir de E' donne le point C . la droite BC conduit à l'angle θ_h d'un cadran horizontal et au point D' . En joignant D' à A' , on obtient l'angle cherché θ_v .

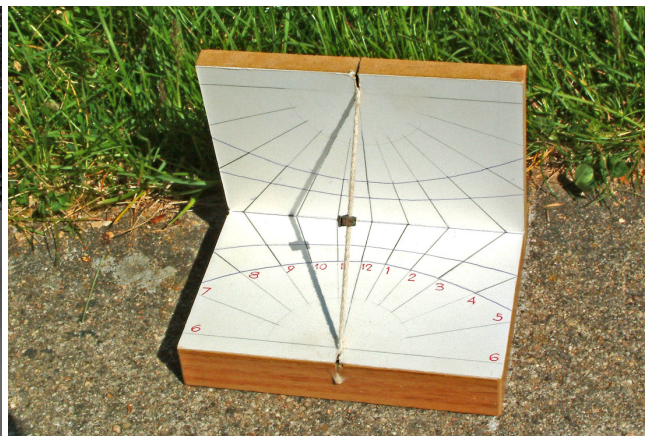
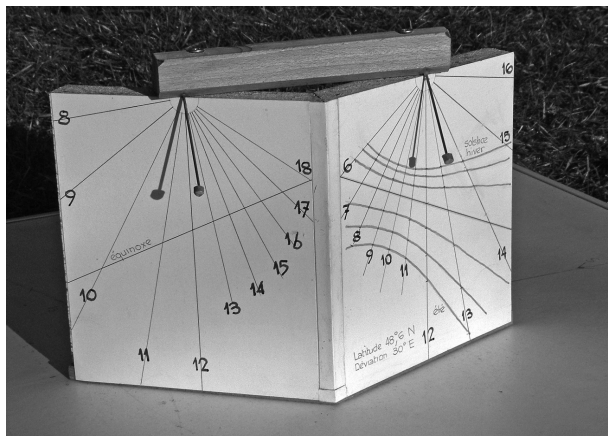
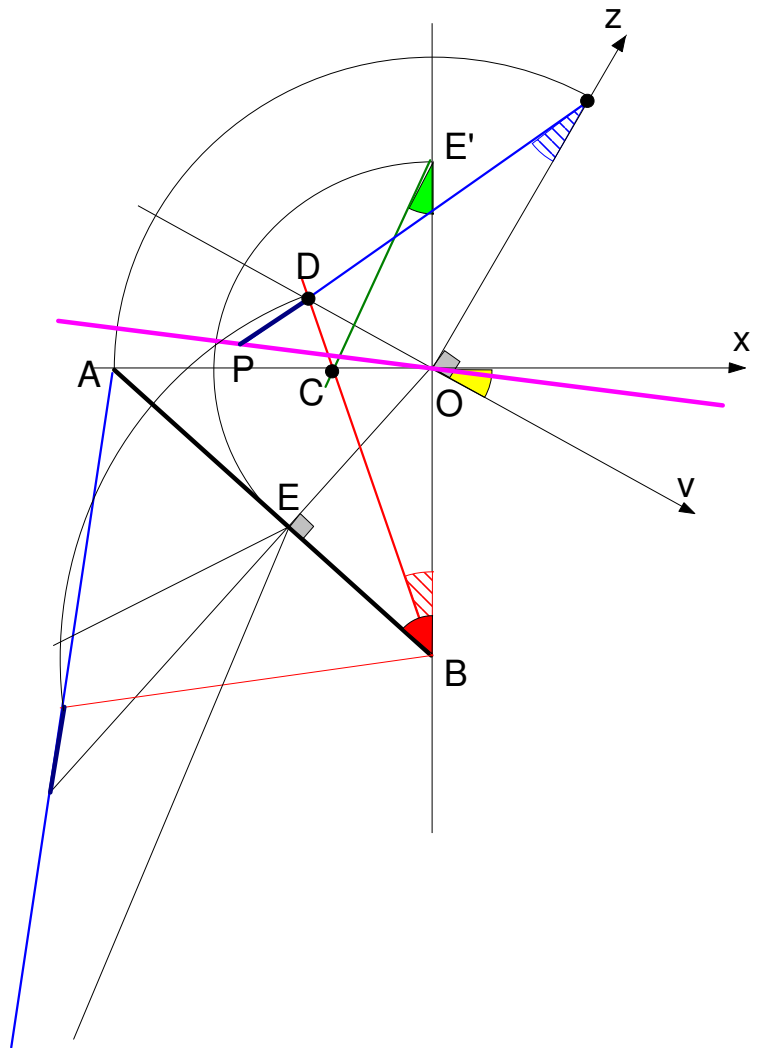
Le triangle ADB est construit avec $BD = BD'$, $AD = A'D'$.

Son côté AD est coupé par la perpendiculaire OE à AB en un point P qui correspond à la longueur d'ombre à l'équinoxe. En portant l'angle δ de chaque côté de OE , on détermine sur AB les longueurs d'ombres d'hiver et d'été.

En reportant la longueur AP en $A'P'$, la droite $P'O$ est la droite équinoxe du cadran

La figure montre le tracé pour une heure quelconque de l'après-midi

Le procédé est identique pour un cadran orienté vers l'Est. Si on ne change que le sens de l'angle β , le résultat doit être exactement symétrique (les lignes d'heures de l'après-midi correspondant à celles du matin, voir photo ci-dessous)



La photo de gauche montre 2 cadrans verticaux déclinants de 30 degrés, l'un vers l'Est et l'autre vers l'Ouest, où s'observe la symétrie des tracés. A droite un cadran horizontal est associé à un cadran incliné en avant par rapport à la verticale. La ligne équinoxe est sur l'arête du dièdre des 2 plans

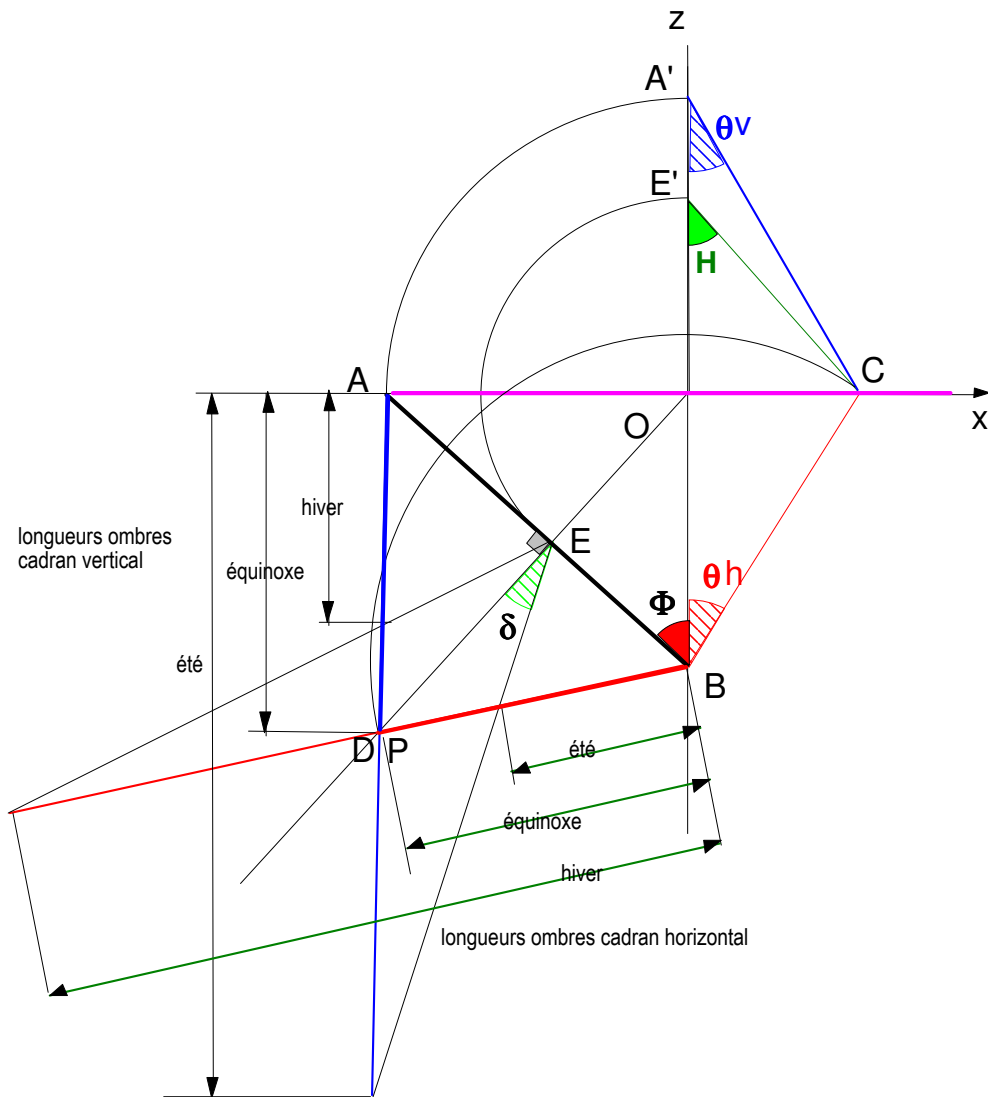
Cas particulier du cadran horizontal et du cadran vertical sur un plan exactement Est-Ouest

Le tracé se simplifie car le point P, confondu avec le point C du triangle ABC appartient toujours à l'axe Ox qui est la ligne équinoxe pour les 2 cadrans.

Il suffit de reporter la longueur BP = BC qui détermine le point P sur la perpendiculaire OE.

Le prolongement de AP permet de lire les longueurs d'ombres du cadran vertical. Et sur BP les longueurs pour le cadran horizontal.

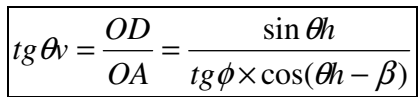
Comme le plan vertical Nord-Sud est un plan de symétrie, il suffit d'étudier seulement une demie journée.



Détermination par calculs simples :

Données : angle horaire H
latitude Φ
déclinaison δ

paramètre de dimension : $OE = l$


$$AE = l \times \tan \phi \qquad BE = \frac{l}{\tan \phi}$$

L'angle vertical demande le calcul de OD dans le triangle ODB :

$$\frac{OD}{\sin \theta h} = \frac{OB}{\sin(\frac{\pi}{2} + \beta - \theta h)} \rightarrow OD = \frac{l}{\sin \phi} \times \frac{\sin \theta h}{\cos(\theta h - \beta)}$$

L'angle vertical est alors:

Dans le cas particulier du cadran exactement Est-Ouest, $\beta = 0$, et il vient :

$$tg\theta_v = \frac{tg\theta_h}{tg\phi} = tgH \times \cos\phi$$

The diagram shows a 3D coordinate system with axes \$x\$, \$y\$, and \$z\$. A vertical plane contains points \$A\$, \$B\$, and \$C\$. Point \$E\$ is on the \$AB\$ edge. A point \$P\$ lies on the \$BC\$ face, with its projection \$P'\$ on the \$AC\$ edge. Other points include \$O\$ at the origin, \$J\$ on the \$BC\$ face, and \$K\$ on the \$AC\$ edge. Several angles are defined: \$\theta_v\$ (blue hatched area) is the angle between the \$z\$-axis and vector \$\vec{AP}\$; \$\delta\$ (green hatched area) is the angle between vectors \$\vec{EP}\$ and \$\vec{EP'}\$; \$\phi\$ (red hatched area) is the angle between vectors \$\vec{OP}\$ and \$\vec{OJ}\$; \$\Phi\$ (black hatched area) is the angle between vectors \$\vec{OB}\$ and \$\vec{OC}\$; and \$\theta_h\$ (red hatched area) is the angle between the \$y\$-axis and vector \$\vec{BP}\$. Unit vectors \$\hat{A}\$ and \$\hat{H}\$ are also shown.

Considérer le point P commun aux plans horaire (OEC), au plan vertical (vOz) et au plan équinoxe (EOx),
couper le trièdre OP, Ox, Ov par un plan parallèle au plan vertical (yOz) pour avoir les triangles : PJK rectangle en J et OKJ rectangle en K

$$\sin \beta = \frac{JK}{OJ} \text{ et } tg \phi = \frac{JK}{PJ}, \text{ d'où}$$

$$tg \varphi = \frac{PJ}{OJ} = \frac{\sin \beta}{tg \phi}$$

***Le signe des résultats n'indique pas le sens de la droite.
Il faut savoir que la droite est montante vers la droite sur un
cadran orienté ver l'Ouest, et inversement
Cette formule est utile pour vérifier et restaurer un vieux cadran
dont les indications sont douteuses***

Calcul des longueurs d'ombres

Calculer d'abord l'ombre d'équinoxe par le triangle AOP dont on connaît OA et les angles en O et en A

$$\frac{AP}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{OA}{\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi - \theta v)} \rightarrow AP = \frac{l}{\cos \phi} \times \frac{\cos \varphi}{\cos(\theta v - \varphi)}$$

Dans le cas particulier du cadran exactement Est-Ouest, $\beta = 0$, il vient $\varphi = 0$

et $AP = \frac{l}{\cos \phi \times \cos \theta_v}$

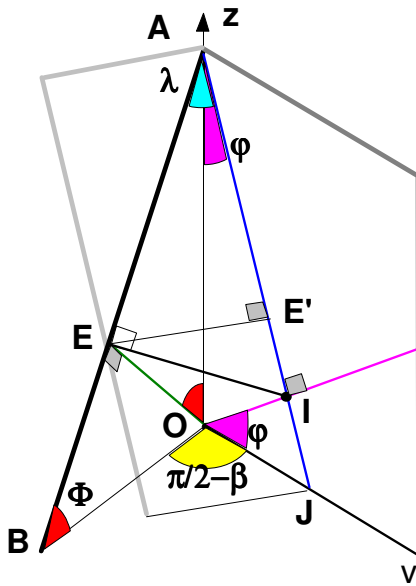
En déduire l'angle an A du triangle AEP rectangle en E par :

$$\cos A = \frac{AE}{AP} = \frac{\sin \phi \times \cos(\theta_v - \varphi)}{\cos \phi}$$

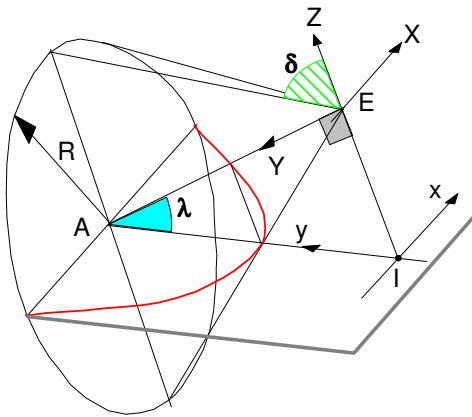
Le triangle AEP' se construit en portant la déclinaison de part et d'autre de PE. Ses angles et le côté AE étant connus, calculer AP' par :

$\frac{AP'}{\sin(\frac{\pi}{2} + \delta)} = \frac{AE}{\sin(\frac{\pi}{2} - \hat{A} - \delta)}$
--

Dans la formule précédente utiliser δ avec son signe, négatif côté hiver et positif côté été



C'est-à-dire E'A avec A à l'intersection du plan et de l'axe du cône et IO perpendiculaire à E'A, à distance connue du point A.



Les lieux géométriques des extrémités des ombres AP' sont des hyperboles qui sont l'intersection avec le plan du cadran, des cônes d'axe AB, de sommet commun E et d'angles au sommet = $\frac{\pi}{2} \pm \delta$.

Ces hyperboles ont un axe de symétrie qui est la projection de l'axe des cônes sur le plan du cadran. Cet axe issu du point A est perpendiculaire à la droite équinoxe puisque lorsque les angles au sommet des cônes tendent vers $\frac{\pi}{2}$, les cônes deviennent le plan équinoxe.

On arrive à la figure ci-contre où le sommet E d'un cône d'axe EA se projette en E' sur un plan où l'on choisit des axes de coordonnées capables de faciliter l'étude.

Pour calculer l'angle λ il faut rappeler que le point I étant sur la ligne équinoxe implique que le triangle IEA est rectangle en E, d'où, en rappelant que OE = l:

$\cos \lambda = \frac{AE}{AI} = \frac{l \times \tan \phi}{OA \times \cos \phi} = \frac{l \times \tan \phi}{\frac{l}{\cos \phi} \times \cos \phi} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$

On est ramené au problème de la figure ci-contre où le cône est défini dans le système X, Y, Z avec origine en E, par les équations :

$$R^2 = Z^2 + X^2 \text{ et } R = \frac{Y}{\tan \delta} \text{ d'où } X^2 + Z^2 = \frac{Y^2}{\tan^2 \delta}$$

Recherche des hyperboles d'intersection du cône avec le plan incliné de l'angle λ par rapport à son axe :

Il est trop complexe d'arriver à l'équation de l'hyperbole par rapport aux coordonnées en x et y du plan. On préfère couper le cône par des plans parallèles au plan $E A I$ avec X constant. Il vient alors des paraboles dont les intersections avec une droite du plan parallèle à AI définit les points recherchés.

Poser $X = p$ et $EI = AE \times \operatorname{tg} \lambda = \frac{l \times \operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi} = m$,

Il vient :

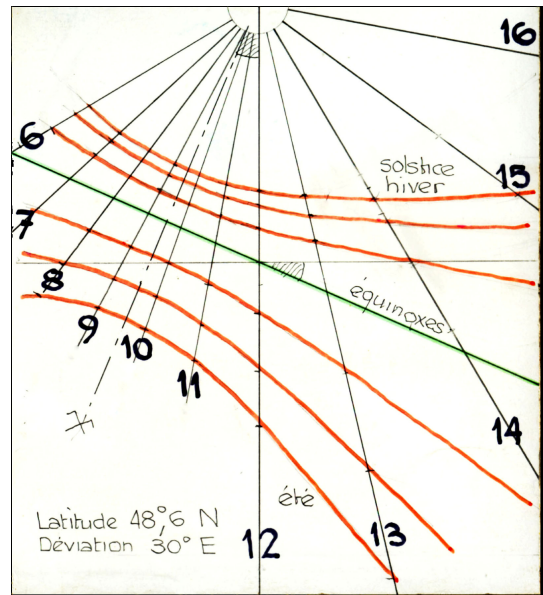
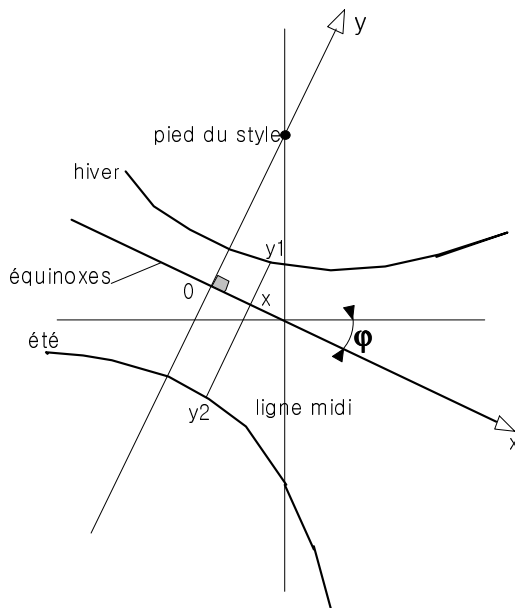
$$p^2 + Z^2 = \frac{Y^2}{\operatorname{tg}^2 \delta^2} \quad \text{pour la parabole et} \quad Z = \operatorname{tg} \lambda \cdot Y - m \quad \text{pour la droite du plan}$$

$$p^2 + Y^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \lambda + m^2 - 2Y \cdot \operatorname{tg} \lambda \cdot m = \frac{Y^2}{\operatorname{tg}^2 \delta^2}$$

$$Y^2 \left(\operatorname{tg}^2 \lambda - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \delta^2} \right) - 2Y \cdot \operatorname{tg} \lambda \cdot m + m^2 + p^2 = 0$$

En résolvant il y a 2 solutions en Y qui se transforment en valeurs de y du plan par :

$y = \frac{Y}{\cos \lambda}$. Il suffit donc de calculer par points un seul côté des hyperboles en choisissant la déclinaison.



Le cadran ci-dessus est orienté de 30 degrés vers l'Est. Remarquer la ligne équinoxiale inclinée et l'axe de symétrie des hyperboles

La méthode s'applique aussi au **cadran horizontal** en remplaçant l'angle λ par l'angle ϕ et EI par la longueur (l). L'équation à résoudre devient :

$$Y^2 \left(\operatorname{tg}^2 \phi - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \delta^2} \right) - 2Y \cdot \operatorname{tg} \phi \cdot l + l^2 + p^2 = 0$$

D'où on déduit aussi les valeurs de y par : $y = \frac{Y}{\cos \phi}$

Peut-on avoir l'heure exacte avec un cadran solaire ?

Etant construit pour une seule latitude et gradué en général pour le midi local, on peut dire que chacun voyait midi à sa porte.

Avec des horloges précises, il a été observé à la fin du XVIII^{ème} que le midi solaire variait, tantôt en avance tantôt en retard, sur le midi des horloges.

Cette variation est suffisamment fidèle et régulière pour donner lieu à l'établissement d'une courbe d'étalonnage qui permet de connaître le midi vrai à chaque moment de l'année. Cette courbe a été baptisée Equation du Temps.

Elle représente la somme de 2 variations périodiques. L'une due à l'inclinaison de l'axe terrestre sur l'écliptique d'amplitude 9 min 52 s, et l'autre due à la variation de la vitesse de déplacement de la terre sur l'orbite elliptique avec un maximum de 16 min 20 s le 3 novembre.

D'autre part le temps universel est réglé sur le méridien de Greenwich qui passe en France par Saumur, Angoulême et Tarbes.

A Paris l'écart est de 2° Est, à Strasbourg environ 7° Est et à Brest 4° Ouest

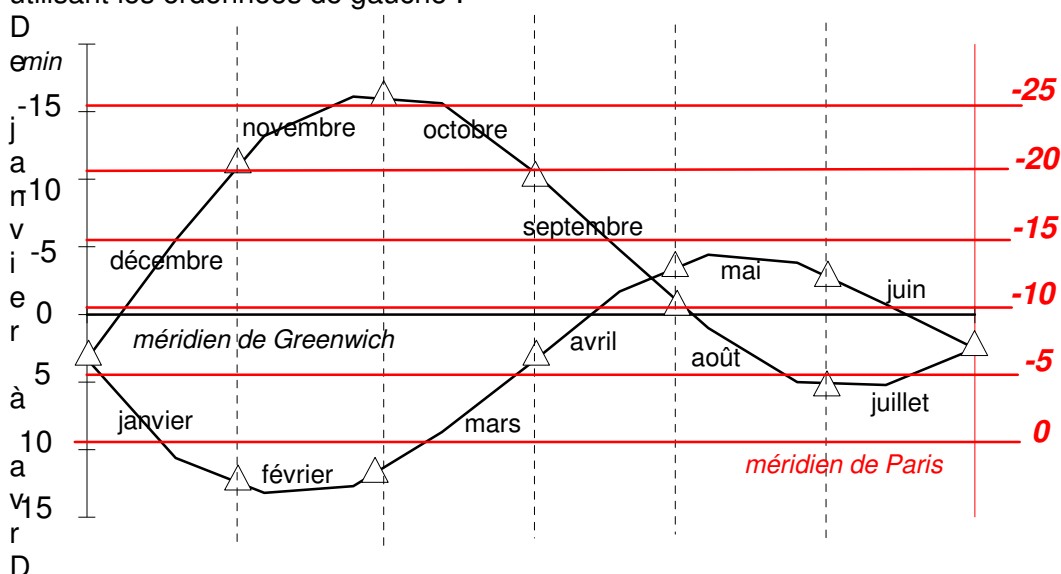
Donc à midi de Greenwich, l'heure solaire indique :

12 h 28 à Strasbourg, 12h 10 à Paris, 11 h 50 à Brest

Cet écart peut être pris en compte dans le tracé des graduations,

La courbe suivante est l'Equation du Temps établie pour le méridien de Greenwich.

Pour un cadran solaire installé sur le même méridien la correction s'applique en utilisant les ordonnées de gauche :



De janvier à avril le cadran est en retard sur le temps universel, si bien qu'en lisant le midi solaire il est déjà 12 h 14 sur une horloge, (la courbe indique +14).

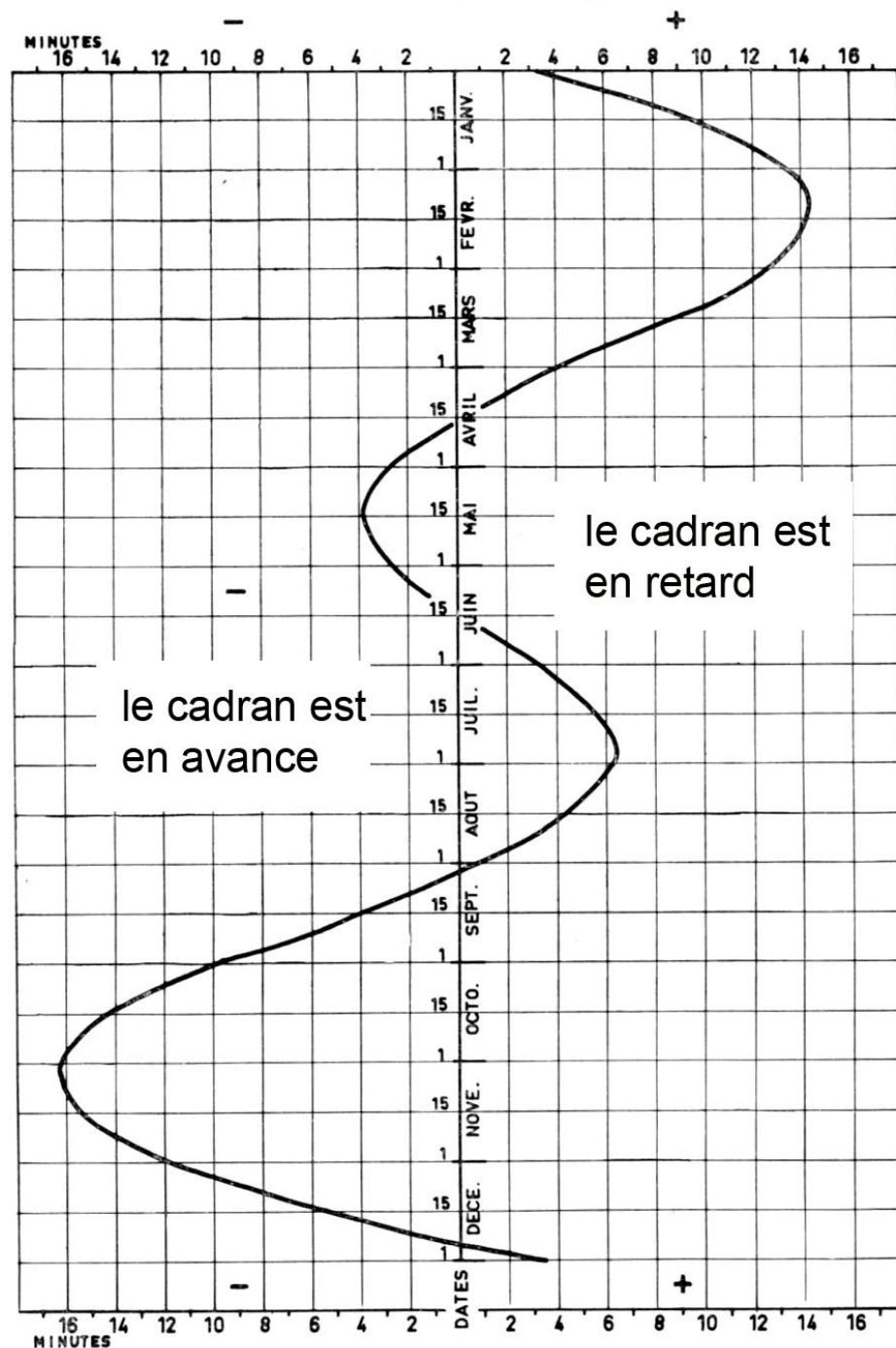
Par contre de septembre à novembre la terre va plus vite et le midi solaire est en avance sur le midi universel (la courbe indique - 16. C'est-à-dire que le cadran indique midi quand une horloge marque 11 h 44)

Chaque **degré de longitude correspond à 4 minutes de temps**. Pour les cadrans du méridien de Paris, l'écart de longitude correspond à 9 min 41 s d'avance,

Le zéro de l'échelle rouge est décalé de cette valeur par rapport au zéro du méridien de Greenwich. Quand il est midi solaire à la fin d'octobre, une horloge indique 11 h 34 Il convient enfin de ne pas manquer d'apporter aussi la différence avec l'heure légale, qui est toujours en avance sur le temps universel de Greenwich : 2 heures en été, 1 heure en hiver

Cette autre présentation de l'équation est plus explicite, (le signe + indique le temps à ajouter à l'indication d'un cadran solaire, situé à Greenwich, pour avoir l'heure universelle)

EQUATION du TEMPS (valeur moyenne)



Exemple de correction tenant compte de l'équation du temps:

Quand un cadran de la région de Nancy indique midi le 1^{er} août, que lit-on sur une montre ?

Longitude près de Nancy = 6° E, donc une correction de : $6 \times (-4) = -24$ min

Equation du temps au 1^{er} août = +6 min

Indication théorique de la montre : $11h + 60 \text{ min} + 6 \text{ min} - 24 \text{ min} = 11h + 42 \text{ min}$, en temps universel, mais l'heure légale est en avance de 2 heures en été, donc la montre indique 13 heures 42 minutes)

L'équation du temps peut aussi se traduire par la courbe en forme de « huit » qui est parfois dessinée, de part et d'autre de la ligne de midi sur les cadrans solaires.

Elle porte l'indication des mois et en général elle est tracée de façon telle que lorsque l'extrémité de l'ombre du style touche la courbe dans la zone correspondante à la date du jour, on sache qu'à l'heure universelle il est déjà 12 heures, ou bien qu'il n'est que 12 heures

Formules de calculs de la déclinaison et de l'équation du temps

On trouve en particulier par internet des formules de calcul de la déclinaison solaire pour chaque jour de l'année, elles donnent des résultats proches mais légèrement différents. La plus élaborée, donnée par J. P. Cornec, conduit aussi à l'équation du temps

Formule simple de 1969 :

$$\delta = 23.45 \times \sin\left(\frac{360}{365} \times (J + 284)\right)$$

exprimée en degrés avec J = numéro du jour (1^{er} janvier : J = 1)

Formule simple de 1997 :

$$\delta = \arcsin\left[0.4 \times \sin\left(\frac{2 \times \pi \times (J - 80)}{365}\right)\right] \text{ exprimée en radians}$$

Formule de J. P. Cornec :

M : Anomalie moyenne : $M = 357 + 0.9856 \times J$

C : Equation du centre de l'orbite écliptique :

$$C = 1.914 \times \sin(M) + 0.02 \times \sin(2M)$$

L : Longitude vraie du soleil : $L = 280 + C + .9856 \div J$

R : Réduction à l'équateur de l'inclinaison terrestre :

$$R = -2.465 \times \sin(2L) + 0.053 \times \sin(4L)$$

Les coefficients M, C, L, R sont homogènes à des angles exprimés en degrés

Il vient alors :

$$\text{Déclinaison au jour J : } \sin \delta = 0.3978 \times \sin(L)$$

$$\text{Equation du temps : } E = 4 \times (C + R) \text{ exprimée en minutes}$$

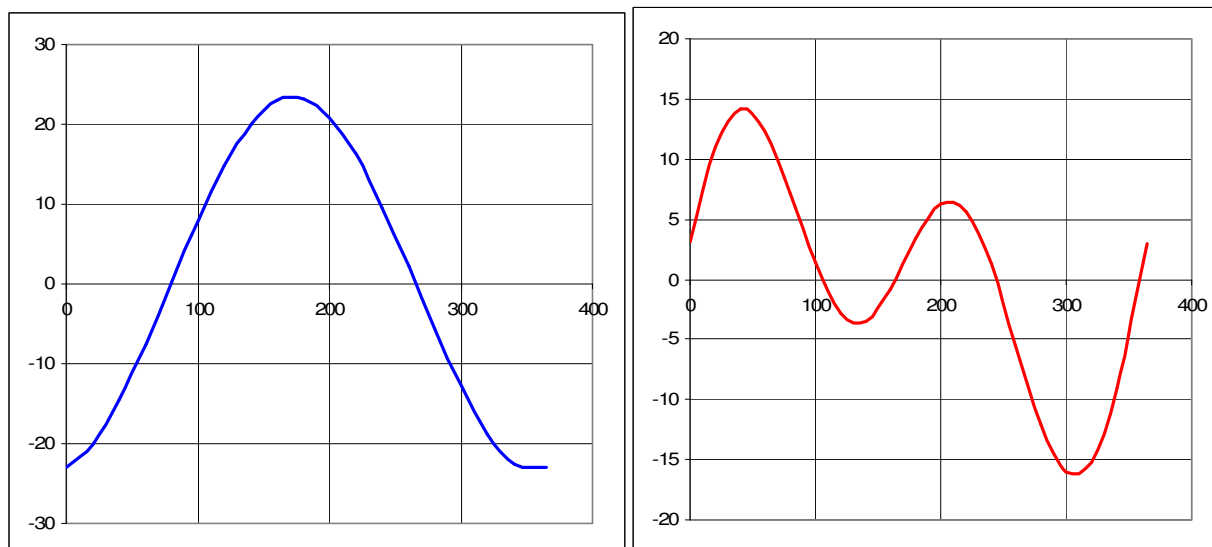
Remarques : $0.3978 = \sin(23.45) \text{ deg}$ et $0.9856 = \frac{360}{365.25}$

La déclinaison passe par des valeurs remarquables au début de chaque signe du zodiaque : -23.45 -20.15 -11.7 0

11.7 20.15 23.45+

mois	num	déclinaison
janv-01	0	-23,07
janv-14	14	-21,28
janv-31	31	-17,35
févr-28	59	-7,92
mars-21	80	0,09
mars-31	90	4,20
avr-30	120	14,81
juin-01	152	22,07
juin-21	171	23,44
juin-30	181	23,17
juil-31	212	18,24
août-31	243	8,60
sept-22	265	0,08
sept-30	273	-2,84
oct-31	304	-14,14
nov-30	334	-21,66
déc-23	356	-23,44
déc-31	365	-23,09

A gauche la déclinaison dans l'année, à droite l'équation du temps



La déclinaison a une courbe d'allure sinusoïdale en fonction du temps. Si bien qu'elle varie beaucoup moins vite au moment des solstices qu'aux moments des équinoxes. C'est elle qui permet de calculer et faire figurer des repères de dates sur les graphiques de cadrans solaires.

Le tableau précédent donne la correspondance entre les numéros des jours, la date et la déclinaison moyenne du jour, (les valeurs de déclinaison ont été calculées avec la formule de J. P Cornec).

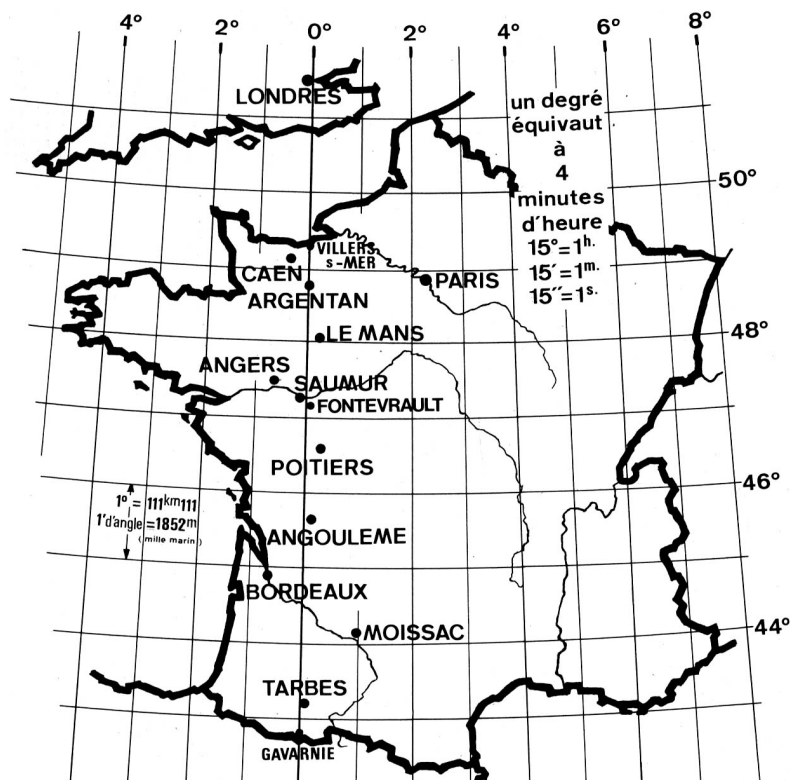
En assez bonne concordance avec ce tableau, il est conseillé pour le tracé des hyperboles (dites aussi arcs diurnes) d'utiliser les déclinaisons suivantes qui correspondent sensiblement au 21^{ème} jour de chaque mois et presque aux dates du zodiaque.:

déclinaison	Jours du mois
-23.45 deg	21 décembre
-20 deg	21 janvier & 21 novembre
-11 deg	21 février & 21 octobre
0	21 mars et 21 septembre
+12 deg	21 avril & 21 août
+20 deg	20 mai & 21 juillet
+23.45	21 juin

Capricorne	du 21/12 au 19/01
Verseau	du 20/01 au 18/02
Poissons	du 19/02 au 20/03
Bélier	du 21/03 au 20/04
Taureau	du 21/04 au 20/05
Gémeaux	du 21/05 au 21/06
Cancer	du 22/06 au 22/07
Lion	du 23/07 au 22/08
Vierge	du 23/08 au 22/09
Balance	du 23/09 au 22/10
Scorpion	du 23/10 au 21/11
Sagittaire	du 22/11 au 20/12

Pour atteindre la meilleure précision possible, il faut consulter les tables annuelles de déclinaison du soleil et de l'équation du temps

La carte ci-dessous rappelle les latitudes et longitudes qui couvrent le territoire



En général un cadran solaire se calcule pour une latitude donnée sans tenir compte de la longitude. Dans ce cas la graduation de midi est exactement dans le plan vertical du style et il indique l'heure solaire locale.

Il est aussi possible de décaler la graduation pour lui faire indiquer l'heure universelle. On doit alors calculer les lignes d'heures en ajoutant ou retirant la longitude à l'angle horaire.

Exemple :

Pour un cadran à 6 degrés Est du méridien 0, l'heure solaire est en avance sur l'heure universelle de $6 \times 4 = 24$ min

Il suffit donc de calculer le cadran en majorant tous les angles horaires de la valeur de la longitude.

Ainsi on calculera la ligne midi avec 6 deg. au lieu de 0 deg., la ligne 13 h avec 21 deg. au lieu de 15 la ligne 11 h. avec - 9 deg. au lieu de - 15 deg.

On reconnaît de tels cadrans au décalage de la ligne midi (à droite pour les longitudes Est, à gauche pour les longitudes Ouest)

Pour un cadran destiné à donner l'heure universelle locale (c'est-à-dire décalée en avance de 1 à 2 heures par rapport à l'heure de Greenwich, il faut diminuer l'angle horaire de 15 degrés par heure et l'augmenter de la longitude quand à l'Est de Greenwich et réduire de la longitude si on est à l'Ouest.

Exemple : Calcul de l'angle horaire de midi pour l'horaire d'hiver à Paris

Longitude 2.35 deg. Est

Angle horaire de calcul de la ligne midi

$$H = 0 - 15 + 2.35 = -12.65 \text{ deg}$$

Angle horaire de calcul de la ligne 13 heures

$$H = 0 + 2.35 = 2.35 \text{ deg}$$

Comment trouver le Nord (ou encore la déclinaison gnomonique d'un mur)

Avec les facilités d'Internet, on peut déjà consulter les vues aériennes et le cadastre local qui montrent avec une bonne précision l'orientation des bâtiments et des terrains.

En général on s'intéresse à un mur et il existe le très bon logiciel de : <http://olravel.fr> qui donne des résultats immédiats ainsi que l'indication en continu de l'heure solaire, de l'azimut et de la hauteur du soleil.

Ces logiciels sont basés sur le relevé sur un plan horizontal de l'ombre d'un fil à plomb ou de l'arête, d'une équerre, puis sur le calcul de l'azimut du soleil lorsqu'on connaît :

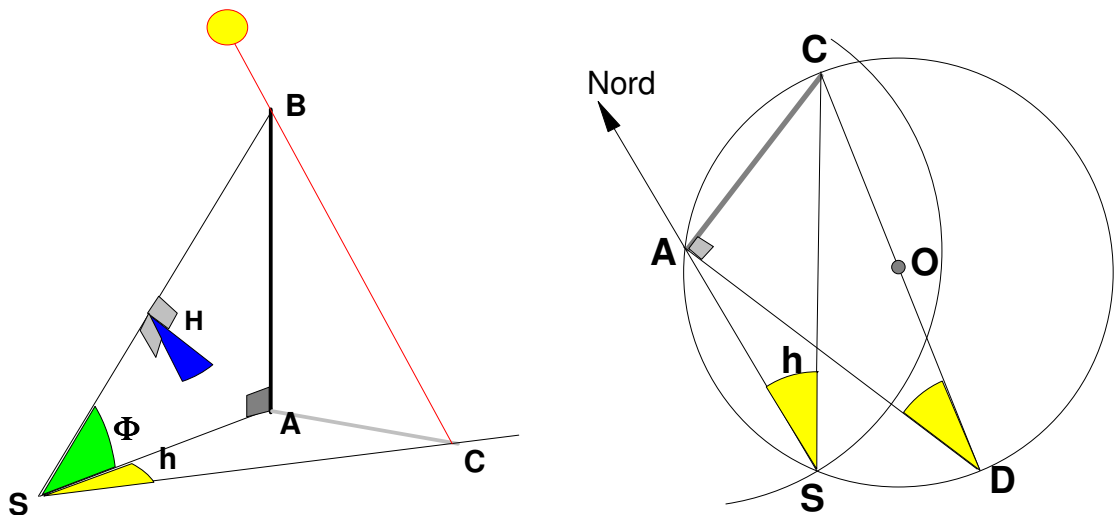
- L'heure GMT du relevé, laquelle doit être corrigée de l'équation du temps et de la longitude locale pour donner l'heure solaire
- Le jour de l'année pour en déduire la déclinaison du soleil
- La latitude locale qui intervient dans les calculs

Il reste à transformer l'heure solaire en angle solaire (1 heure = 15 deg.) et à appliquer l'une ou l'autre des formules de l'azimut. (voir en 2^{nde} partie du document)

Autre méthode semi graphique :

Elle est basée sur un cadran fictif horizontal dont l'angle de l'ombre est indépendant de la déclinaison. Il faut connaître comme précédemment :

- L'heure solaire au moment du relevé
- Le tracé et la longueur de l'ombre de l'arête d'une équerre de hauteur AB connue
- La latitude locale



L'arête AB perpendiculaire à un plan horizontal donne une ombre AC. En supposant un cadran ABS bien orienté, on sait que le point C appartient à l'ombre du style SB et l'angle (h) se calcule par : $tgh = tgH \times \sin \phi$

Il suffit alors de déterminer la position de S pour trouver le Nord suivant SA.

S est sur le cercle capable de l'angle (h) pour le segment AC, dont le rayon est

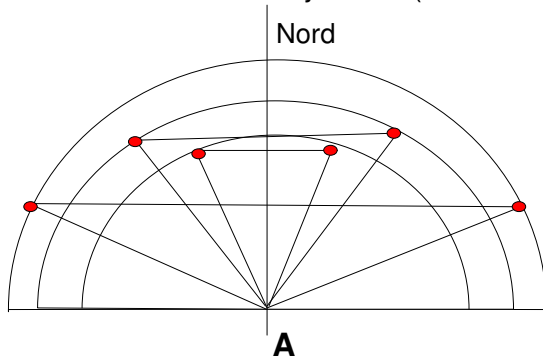
$$\frac{AC}{2 \times \sinh} ; \text{ et sur le cercle de centre A de rayon } = AS = \frac{AB}{\operatorname{tg} \phi}$$

Voir plus loin les cadrans qui n'ont pas besoin de connaître le Nord et ceux qui permettent de le retrouver avec une assez bonne précision.

Ancienne méthode des points d'ombre de Joseph Mollet (1837)

Il faut juste être patient, soigneux et disposer d'une journée ensoleillée.
C'est peut-être la plus sûre.

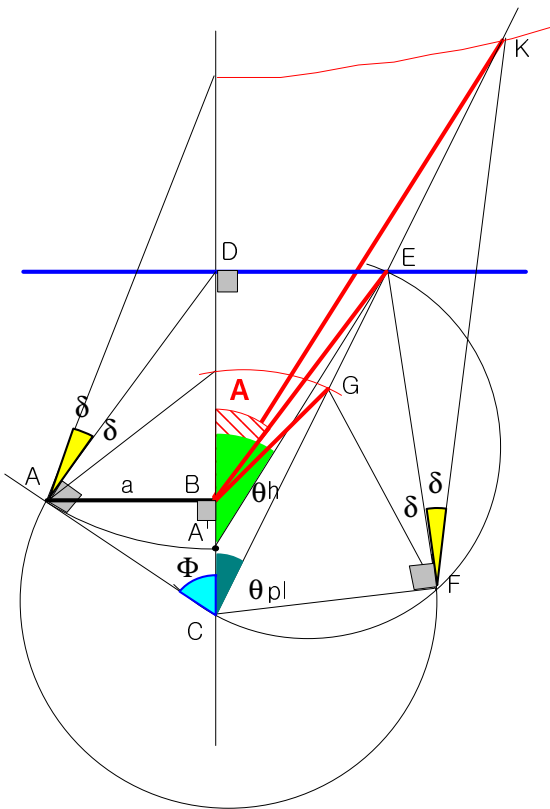
Elle est basée sur le fait que les azimuts et hauteurs du soleil de l'après midi sont symétriques de ceux de la matinée quand on néglige la variation de la déclinaison au cours de la journée (ceci n'est rigoureusement exact qu'aux équinoxes)



Le gnomon vertical AB est placé sur un plan horizontal où sont tracés des cercles concentriques au pied A. Chaque fois que l'extrémité de l'ombre touche un cercle, on marque un point sur ce cercle (c'est le relevé des points d'ombres).

Sauf erreur chaque cercle porte un point du matin et un point de l'après midi. En traçant les médiatrices de ces segments on doit trouver le Nord

Problème de l'ombre d'un mat vertical ou de l'arête d'un mur



Cette question est à considérer pour savoir les limites de lecture sur le cadran d'un mur vertical dévié.

Connaissant tout ce qui précède on peut considérer un style fictif AC passant par le sommet du mat et ramener le problème vers celui d'un cadran horizontal.

La perpendiculaire AD au style détermine un plan équinoxe et une ligne d'intersection perpendiculaire au plan Nord-Sud, sur le sol horizontal. Au moment des équinoxes l'extrémité de l'ombre parcourt cette ligne au cours de la journée

En rabattant DA en DA', un angle horaire θ_h coupe cette ligne équinoxe en définissant un angle θ_{plan} qui est le lieu géométrique des extrémités des ombres pendant toute l'année à l'heure considérée.

A l'aide du cercle de diamètre CE, il est facile de tracer le triangle rectangle CFE, puis les ombres mini et maxi aux solstices.

Par résolutions de triangles, on arrive à calculer les orientations ($\hat{A} = azimuth$), et les longueurs des ombres à toute heure et à toute période de l'année.

En limitant par exemple, son ambition à connaître l'ombre au moment de l'équinoxe, il est possible de

prédire l'heure d'arrivée ou de disparition du soleil sur un mur d'inclinaison donnée.

$$DE = DB \times \tan \hat{A} = AD \times \tan \theta h$$

$$tg\theta h = \frac{DB}{AD} \times tg\hat{A} = \frac{a \times tg\phi}{a} \times \cos\phi \times tg\hat{A} = \sin\phi \times tg\hat{A}$$

Exemple : Sur un mur dévié de 30 degrés

$$tg \theta h = \sin 48,6 \times tg 60 \quad \theta h = 52,4 \text{ deg} = \frac{52,4}{15} \text{ env} \cdot 3,5 \text{ heures}$$

La lecture disparaît vers 15 h30 si orienté vers l'est

La lecture ne commence que vers 8 h30 si orienté vers l'ouest

PARTIE 2 Cadrans équatoriaux

Les cadrans à projections planes conduisent à des graduations convergentes au pied du style. Issues de calculs ou de tracés assez élaborés, elles sont personnalisées à la latitude dont l'angle est présent dans les formules. Les courbes parcourues par l'extrémité du style sont des hyperboles décoratives, en général dessinées par points.

Quand le cadran est déclinant (c'est-à-dire orienté vers l'Est ou l'Ouest) les graduations deviennent très inégales. Ceci peut augmenter la précision dans les heures qui précèdent ou suivent midi (voir la figure qui montre un cadran double, orienté à ± 30 degrés))

Dans les cadrans équatoriaux l'ombre du style est reçue sur une surface de révolution dont l'axe est confondu avec le style. Cet arrangement conduit à des graduations régulièrement réparties. Trois formes de surfaces sont utilisables :

Cylindrique, Sphérique, Conique

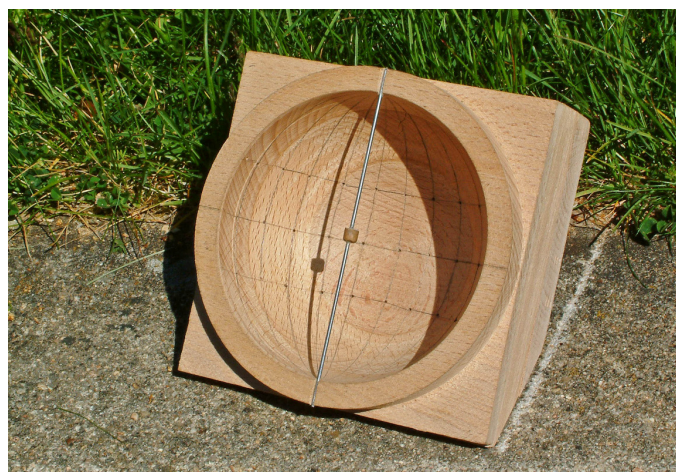
Dans chaque cas les intersections avec les cônes solaires donnent des cercles et des graduations horaires à répartition régulière. Grâce à la régularité de leurs divisions, ces cadrans sont les plus précis et les plus faciles à calculer et à construire.

En général le style est constitué d'une tige diamétrale qui porte un repère en son centre pour montrer le moment de l'année. La figure suivante montre des petit cadrans à projections sphérique, conique et mixte cylindrique et horizontale



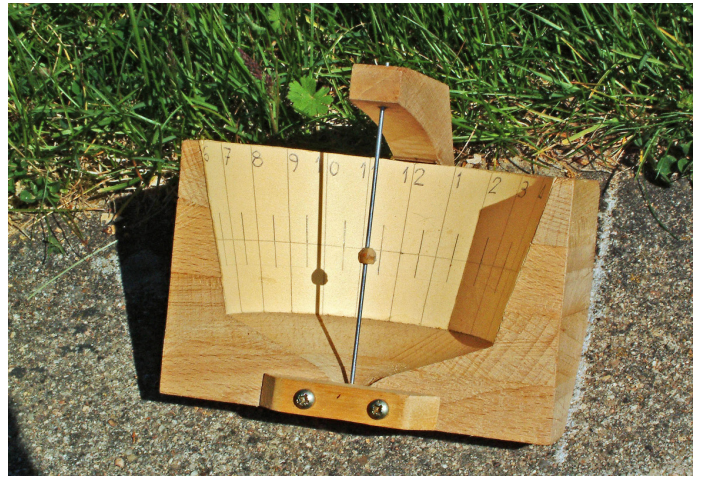
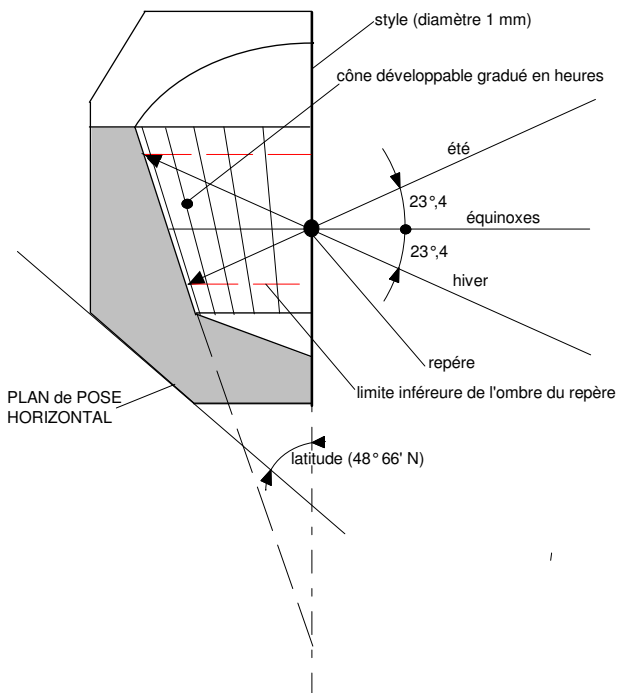
Cadran cylindrique

Les graduations régulières sur le cylindre correspondent aux graduations irrégulières du cadran horizontal



Cadran sphérique

Les 2 sections circulaires correspondent aux élongations du repère central

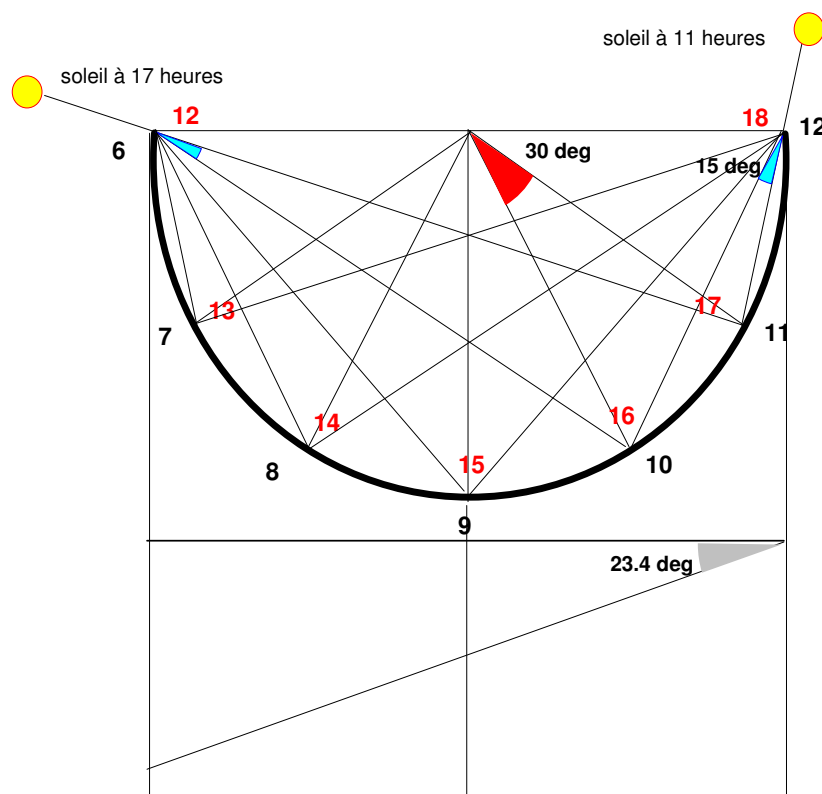


Cadran équatorial à projection conique

Cadran cylindrique sans style

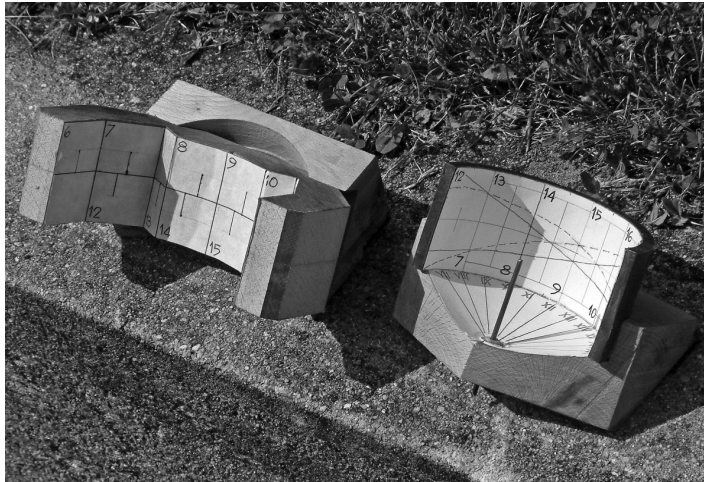
Invention de Pierre FLINOIS, brevetée et primée au concours Lépine de 1962

Dans un demi cylindre dont l'axe est incliné de l'angle de latitude, les arêtes latérales jouent le rôle de style en donnant des ombres parallèles qui font un aller retour sur la surface intérieure du cylindre. A l'angle horaire de 15 deg. correspond un angle au centre de 30 deg.. A midi toute la surface est éclairée, à 9 heures et 15 heures les frontières d'ombres sont sur l'axe de symétrie. Pour que la lecture soit possible à toutes les déclinaisons, il faut que la largeur soit supérieure à $D \times \tan 23.4$. Entre 11 heures et 13 heures la précision est très sensible à la qualité de fabrication





Exemples de cadrans à contours cylindriques anguleux.



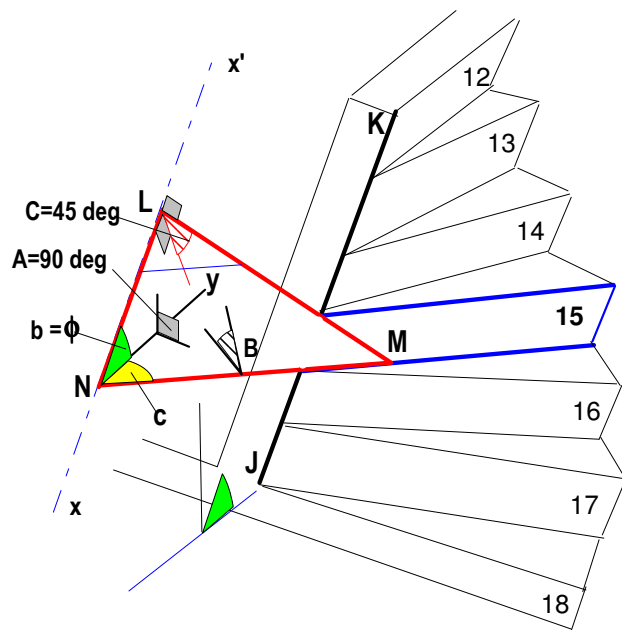
Variante de profil



Sur le modèle ci-contre le disque perpendiculaire à l'angle de latitude possède des cannelures espacées de 15 degrés. Il suffit d'observer la progression de l'ombre sur les flancs des cannelures. L'axe supérieur donne aussi l'heure pendant la période estivale.

Les deux autres cadrans sont de la catégorie à 2 styles formés par les arêtes extérieures de l'ouverture avec l'axe midi comme axe de symétrie. Le dernier est tracé avec des facettes inclinées de 15 degrés et les creux de cannelures se trouvent ainsi sur un cercle de diamètre égal à l'ouverture.

Cadran polaire en escalier



Il s'agit de construire une sorte d'escalier symétrique où chaque hauteur de marche correspond à une heure. Les marches du matin, côté Ouest passent de l'ombre à la lumière et celles de l'après midi du soleil à l'ombre. Ceci n'est possible que si les flancs des hauteurs de marche appartiennent à des plans horaires pivotant autour d'un axe JK parallèle à l'axe du monde.

Ainsi la contremarche marquée 15 heures se confond avec le plan LMN d'un trièdre rectangle en A et de sommet N défini par :

NL sur xx' ligne polaire inclinée de l'angle de latitude : $\phi = b$

Ny horizontale et orientée Nord-Sud

C angle horaire = 45 deg pour 15 heures

Pour construire chaque marche il faut calculer l'angle c de NM qui est parallèle au bord et

l'angle solide B qui est la pente du flanc

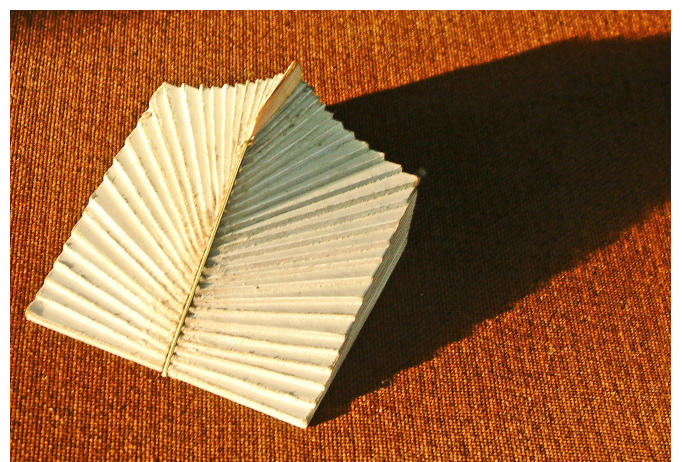
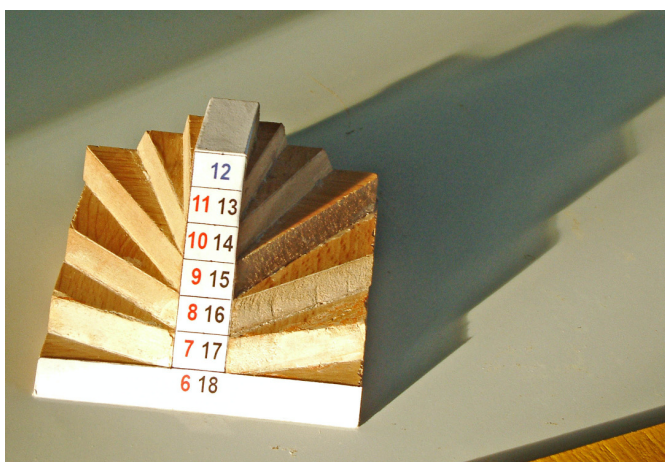
Les formules de résolution du trièdre rectangle donnent :

$$tgc = \sin b \cdot tgC \quad \text{et} \quad \cos \hat{B} = \cos b \cdot \sin \hat{C} \quad \text{et} : tga = \frac{tgb}{\cos C}$$

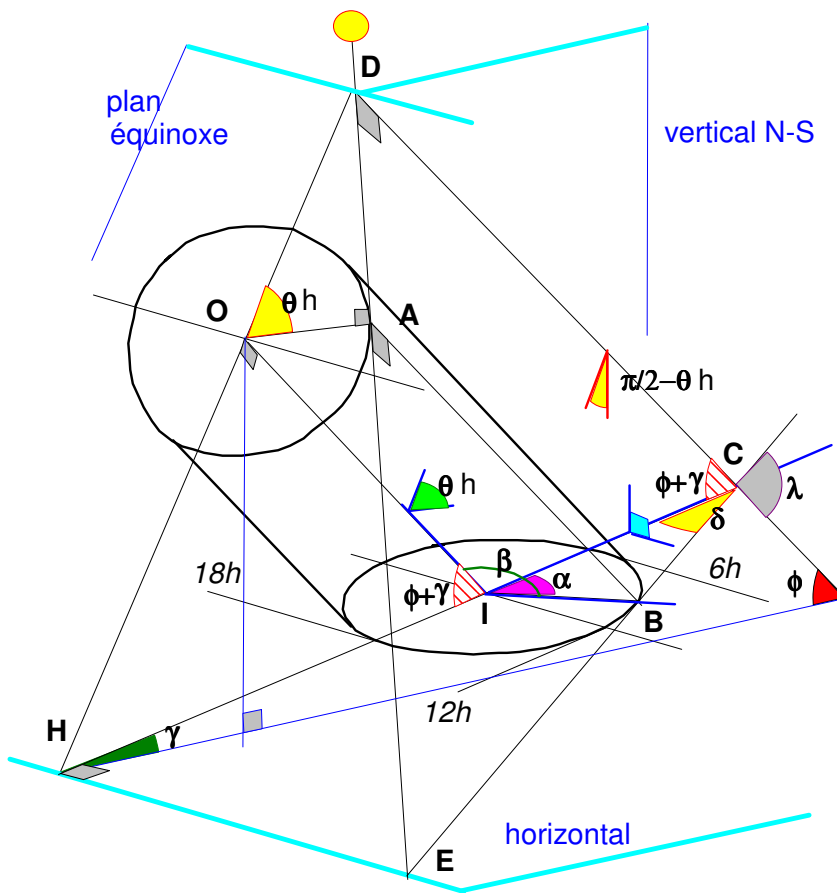
avec l'angle C=angle horaire et angle b = latitude

Les calculs sont plus faciles que la construction.

On peut lire les fractions d'heure sur les parties horizontales des marches, mais on peut aussi augmenter le nombre de marches... jusqu'à l'infini pour obtenir une surface gauche réglée sur laquelle les lignes horaires sont des droites horizontales



Cadran à colonne inclinée



On considère un cylindre dont l'axe situé dans un plan vertical Nord-Sud est incliné de l'angle de latitude par rapport à un plan horizontal.

Il est proposé d'étudier l'ombre projetée sur un plan incliné dont la plus grande pente (γ) appartient au plan vertical. L'objectif étant de calculer les graduations horaires sur ce plan.

Le plan du cercle (O) perpendiculaire à OI est un plan équinoxe et la figure correspond à une heure comprise entre 6 heures et midi.

Le plan horaire contenant le soleil est tangent au cylindre et défini par l'angle (θh). Il coupe le plan vertical suivant DC et la ligne CE représente la trace de l'ombre tangente à l'ellipse que détermine le cylindre sur le plan incliné

Sont donnés :

Rayon du cylindre OA = r

Longueur OI = h

Angles Φ , γ , θh

Il faut calculer les angles α , β , δ et les longueurs AB, IB

Dans le trièdre rectangle CD, CH, CE, poser : $A = \pi/2$, $C = \pi/2 - \theta h$, $b = \Phi + \gamma$

Application du cas V :

$$tga = \frac{tgb}{\cos C} \mapsto tgc = \sin b \times tgC \mapsto \cos B = \cos b \times \sin C$$

D'où : $\delta = c = \arctg(\sin(\phi + \gamma) \times tg(\frac{\pi}{2} - \theta h))$

$$\lambda = a = \arctg \left[\frac{tg(\phi + \gamma)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta h)} \right]$$

Dans le trièdre rectangle IO, IC, IB, utiliser les mêmes formules en posant

$A = \pi/2$, $C = \theta h$, $b = \pi - (\Phi + \gamma)$

D'où : $\beta = a = \arctg \left[\frac{tg(\pi - \phi - \gamma)}{\cos \theta h} \right]$

$$\alpha = c = \arctg[\sin(\pi - \phi - \gamma) \times tg \theta h]$$

Ensuite :

$$AB = OI + OA \times \tan\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = h + r \times \tan\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$IB = \frac{r}{\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}$$

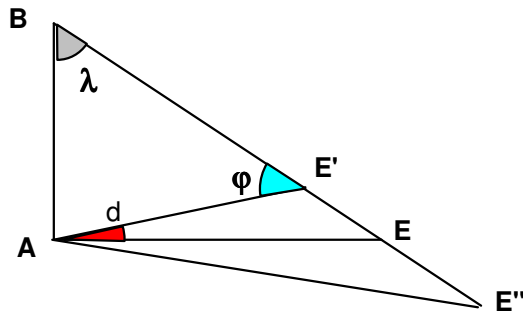
La longueur de l'ombre à l'équinoxe se calcule dans le triangle ABE

rectangle en A : $BE = \frac{AB}{\cos \lambda}$

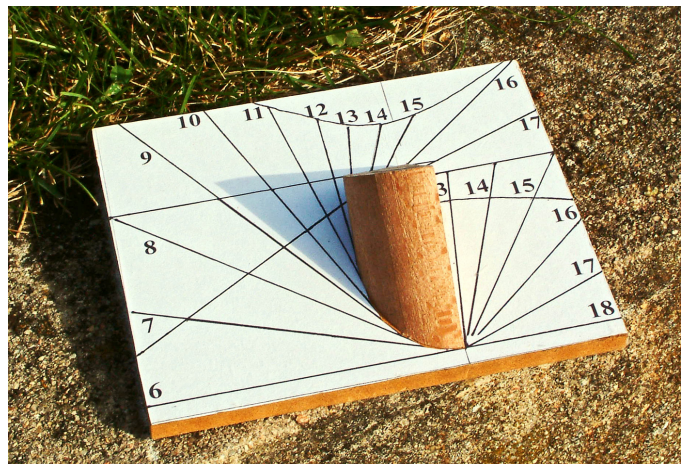
Aux périodes de déclinaisons, calculer

Angle en E' : $\varphi = \frac{\pi}{2} - \lambda + d$

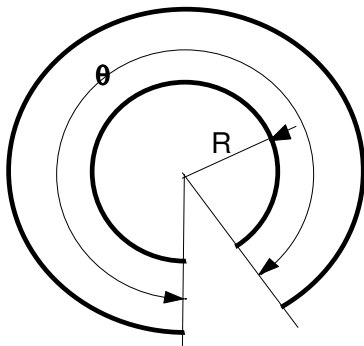
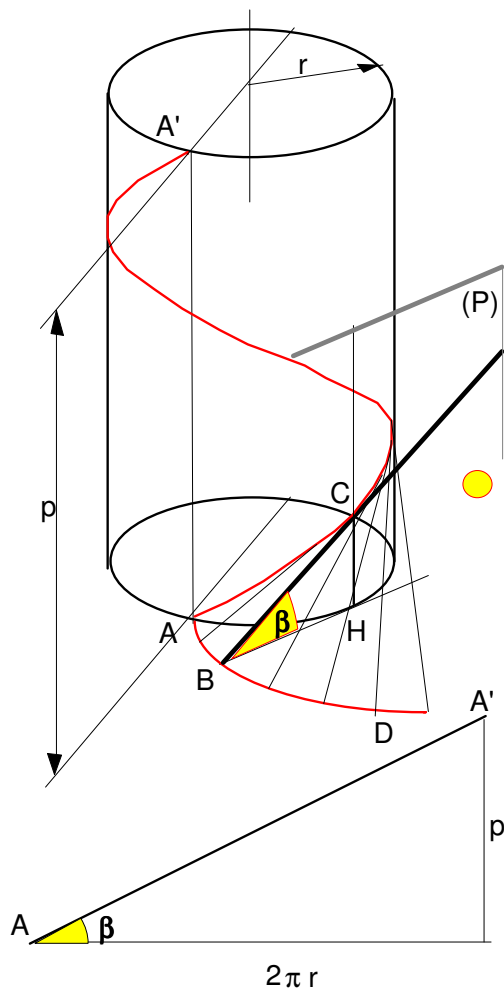
Appliquer : $\frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{BE'}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - d\right)}$



Il y a intérêt pour réduire la surface graphique à incliner légèrement le plan vers le Sud (5 deg.) et à n'utiliser qu'un demi cylindre qui permet d'utiliser son arête Sud comme cadran classique entre 12 et 18 heures qui donne des lignes plus longues et plus lisibles, parallèles aux tangentes correspondantes de l'ellipse.



Utilisation de l'hélicoïde développable



Les lignes horaires se tracent en divisant l'arc θ en 24 parties et en traçant les tangentes (dans le bon sens), avant de former l'hélicoïde par des plis tangents puis collage ou soudure.

Remarque : La courbe ABD, section de l'hélicoïde par un plan perpendiculaire au cylindre, est la développante du cercle de base

L'hélicoïde est une surface réglée construite à partir d'une hélice portée par un cylindre. Sa définition la plus simple est : Surface lieu géométrique de la tangente à une hélice circulaire . Le segment BC, incliné de l'angle β appartient à la surface. L'intersection avec un plan tangent au cylindre suivant la ligne CH est donc une ligne droite du côté CB et une ligne courbe de l'autre côté.

On peut alors imaginer que si le soleil était dans le plan (P), l'ombre du cylindre serait rectiligne

L'axe du cylindre doit être incliné de l'angle de latitude sur le plan horizontal et il semble y avoir une solution avec une hélicoïde à gauche de pente 30 à 35 degrés pour que le soleil projette l'ombre sur la face « creuse » de la surface

La surface est développable sous forme d'une couronne dont le rayon intérieur et l'angle au centre se calculent ci-dessous :

L'hélice se développe en un triangle d'où :

$$AA' = \frac{2 \times \pi \times r}{\cos \beta}$$

Le rayon (R) de la couronne développée doit être égal

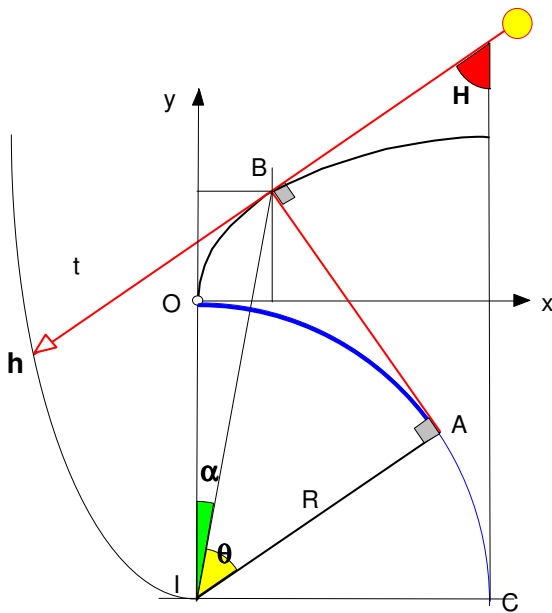
au rayon de courbure de l'hélice : $R = \frac{r}{\cos^2 \beta}$ d'où

$$R \times \theta = AA' \rightarrow \theta = 2 \times \pi \times \cos \beta$$



Cadrans à développante de cercle

Il s'agit d'un cadran de type équatorial où les rayons solaires sont tangents à une surface cylindrique dont la section droite est une développante de cercle. Les génératrices étant parallèles à l'axe du monde, les graduations horaires sur une surface



réglée et parallèle à ce même axe sont des droites parallèles.

Afin d'avoir des graduations d'écartement presque constant, l'ombre du profil en développante est reçue sur une surface cylindrique à profil courbe (par exemple parabolique).

Un tel cadran devrait avoir 2 parties symétriques, mais s'il est portable, on peut le concevoir pour qu'il soit retourné vers midi pour fonctionner sur la seconde partie du jour.

La développante est la courbe décrite par l'extrémité d'un fil qu'on déroule de la surface d'un cylindre en le maintenant bien tendu

La développante du cercle (I) a son origine en O. Un point B est défini par : $AB = \text{arc OA}$

La tangente Bh est perpendiculaire à AB et donc parallèle au rayon IA

Calcul des coordonnées du point B dans le système

$O_x, O_y :$

$$O\hat{A} = R \times (\theta + \alpha) = AB = R \times \operatorname{tg} \theta$$

d'où l'équation de l'involute, fonction fon-

damentale, utilisée dans les calculs de profils d'engrenages :

$$\alpha = inv \cdot \theta = tg \theta - \theta$$

$$IB = \frac{R}{\cos \theta}$$

Les coordonnées de B :

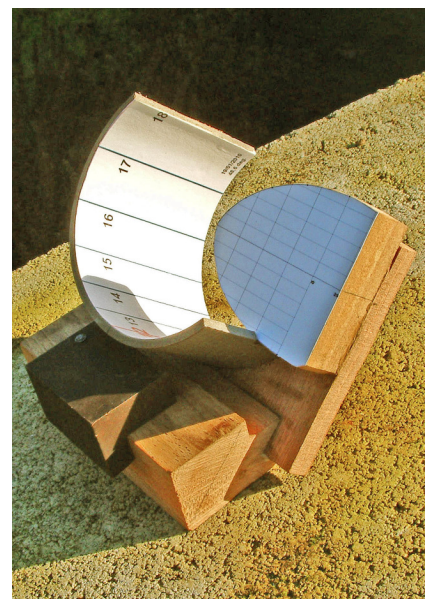
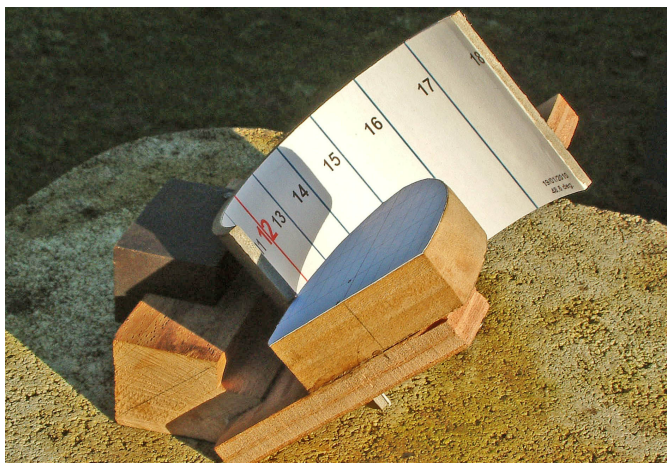
$$xB = IB \times \sin \alpha$$

$$\text{et : } yB = IB \times \cos \alpha - R$$

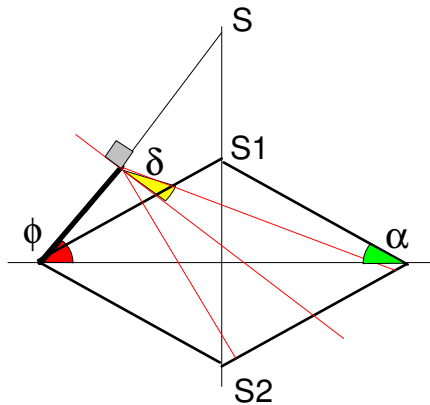
L'angle horaire est : $\hat{H} = \alpha + \theta = \text{tg } \theta$ en radians

Il faut calculer θ pour les angles horaires de 15 en 15 degrés puis les angles α , puis les coordonnées des points B

Pour graduer la partie réceptrice, il est simple d'utiliser un cylindre et suffisant d'opérer par tracé à partir de chaque point B où l'angle de tangence est l'angle horaire.



Cadrans coniques



Pourvu que le style soit parallèle à l'axe du monde, on peut le projeter sur un cône creux ou en relief. Les lignes horaires sont des tronçons d'hyperboles qui convergent au pied du style, la ligne équinoxiale est en général une hyperbole, les lignes de déclinaisons sont des intersections de cônes. On suppose le style implanté au bord du cercle de base, l'axe du cône peut être incliné mais il est considéré vertical dans l'étude suivante

Pour que les ombres d'hiver touchent le pied du style il faut que l'angle α soit

$$\leq (\frac{\pi}{2} - \phi - \delta) = (90 - 48.6 - 23.4) \leq 18 \text{ deg}$$

Le plan horaire d'angle dièdre (H) donne sur le plan horizontal une trace AB d'angle (h) : $tgh = \sin \phi \times tgH$,

et sur le cône l'hyperbole AJB .

Pour tracer cette courbe par points, on considère la section par un plan vertical d'angle β et on calcule les distances JC et KC.

Dans le triangle OAP, on a : $\frac{OP}{\sinh} = \frac{OA}{\sin(\pi - \beta - h)}$

qui donne : $OP = \frac{R \times \sinh}{\sin(\pi - \beta - h)}$ et $OS = \frac{R}{\operatorname{tg} \phi}$, puis

$$tg\gamma = \frac{OP}{OS} = \frac{\sinh \times tg\phi}{\sin(\pi - \beta - h)}$$

En s'intéressant aux triangles CPJ et CPK, les angles en J et K sont :

$$angle \hat{J} = \frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma \quad \text{et :}$$

$$angle\hat{K}=\frac{\pi}{2}-\alpha+\gamma$$

Qui conduisent à :

$$CP = R - OS \times tg \gamma = R \times (1 - \frac{tg \gamma}{tg \phi})$$

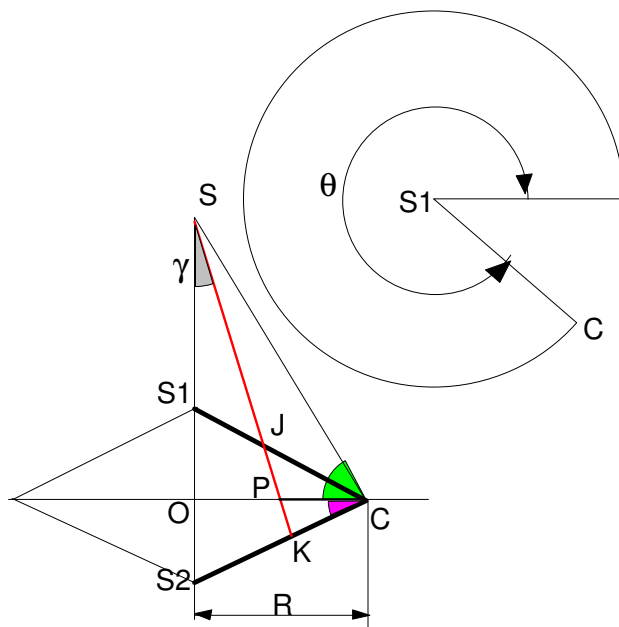
Dans le triangle CPJ : $\frac{CP}{\sin \hat{J}} = \frac{CJ}{\sin(\frac{\pi}{2} + \gamma)}$

d'où CJ

Dans le triangle CPK : $\frac{CP}{\sin \hat{K}} = \frac{CJ}{\sin(\frac{\pi}{2} - \gamma)}$

d'où CK

Comme la courbe est symétrique il suffit de choisir $\beta = 1/6, 1/3, 1/2$ de chaque angle au centre AOB..

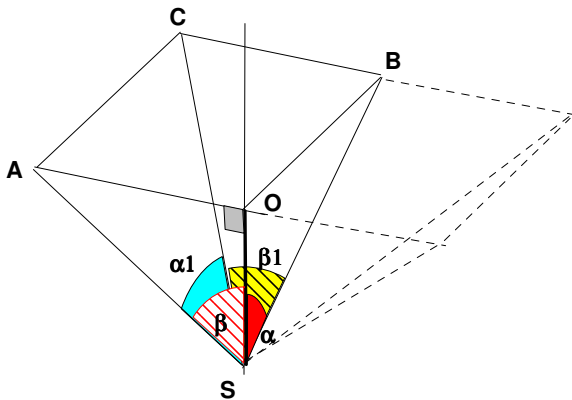


Les courbes sont à tracer sur le développement en tenant compte de la proportionnalité entre les angles au centre de la développée et de la base :

$$\theta \times \frac{R}{\cos \alpha} = 2\pi \times R \Rightarrow \theta = 2\pi \times \cos \alpha$$

Les points sont donc à tracer avec $\beta' = \beta \times \cos \alpha$

Cadran dans une demie pyramide creuse

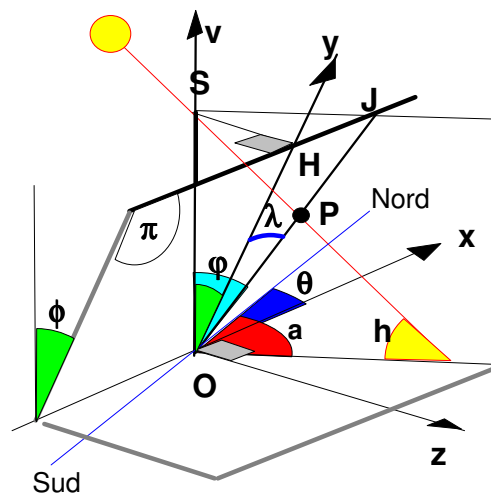


On se propose de réaliser un cadran avec un style droit vertical OS qui se projette sur les flancs d'un demie pyramide creuse. Le plan OSB vertical Nord-Sud est un plan de symétrie. SBC incliné de l'angle α par rapport à la verticale est nommé plan frontal

SAC incliné de l'angle β par rapport à la verticale est le plan latéral..

Pour trouver le lieu des projection du point O sur chaque plan, il paraît plus facile d'utiliser les azimuts et hauteurs solaires.

Pour calculer les angles de faces α_1 et β_1 ,
poser $OS = l$ et écrire :



$$tg\alpha_1 = \frac{AC}{AS} = \frac{OB}{AS} = \frac{l \times tg\alpha}{\frac{l}{\cos\beta}} = tg\alpha \times \cos\beta$$

De même : $tg\beta_1 = tg\beta \times \cos \alpha$

Considérer un plan incliné de l'angle Φ dont la trace horizontale Ox fait un angle θ par rapport à la direction Sud-Nord

($\theta = 0$ pour face orientée à l'Ouest, $\theta = 90$ pour face orientée au Sud)

Le soleil est dans un plan vertical défini par son azimut (a) et sa hauteur (h). Ce plan coupe le plan incliné (π) suivant la droite OJ sur la quelle on cherche à calculer la position du point P ombre du point S. Le problème revient à calculer OP et l'angle λ

Calculs sur le trièdre OS, OH, OJ où sont connus 2 angles entre faces et un angle au sommet. Ce trièdre rectangle correspond au cas :

$$\hat{A} = \frac{\pi}{2} \quad \hat{C} = \frac{\pi}{2} - (a - \theta) \quad b = \phi \quad \text{et les formules sont :}$$

$$tga = \frac{tgb}{\cos C} \quad tgc = \sin b \times tgC \quad \cos B = \cos b \times \sin C$$

En remplaçant :

$$tg \varphi = \frac{tg \phi}{\sin(a - \theta)} \quad \text{angle de l'ombre : } tg \lambda = \frac{\sin \phi}{tg(a - \theta)}$$

La longueur de l'ombre OP se calcule dans le triangle OPS par :

$$\frac{OP}{\sin(\frac{\pi}{2}-h)} = \frac{OS}{\sin(\pi-(\frac{\pi}{2}-h)-\phi)} = \frac{OS}{\cos(\phi-h)}$$

$$OP = OS \frac{\cosh}{\cos(\phi-h)}$$

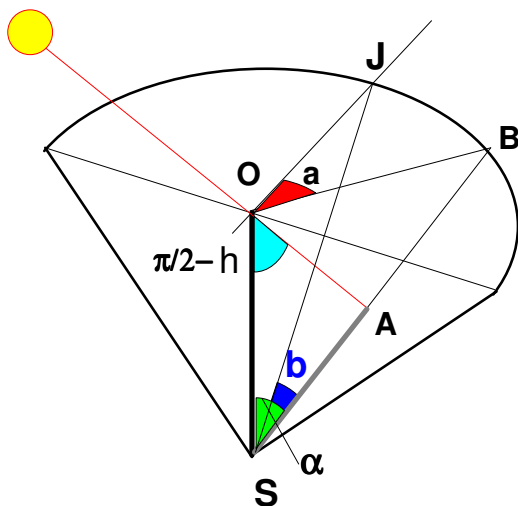
A priori il n'y a pas intérêt à dévier ce genre de cadran, et on profite alors de la symétrie dans le graphique.

Pour les 2 flancs latéraux l'angle θ est = 0 et pour le flanc du fond $\theta = -\frac{\pi}{2}$

On a donc

Cas du flanc latéral	Cas du flanc du fond
$tg \phi = \frac{tg \phi}{\sin a}$	$tg \phi = \frac{tg \phi}{\sin(a + \frac{\pi}{2})} = \frac{tg \phi}{\cos a}$
$tg \lambda = \frac{\sin \phi}{tga}$	$tg \lambda = \frac{\sin \phi}{tg(a + \frac{\pi}{2})} = \sin \phi \times tga$

Dans le même principe, un cadran peut se faire, plus facilement, dans un demi cône



Avec $OS = L$, on a :

$$OB = L \times tg \alpha \quad \text{et} \quad SB = \frac{L}{\cos \alpha}$$

L'angle d'azimut définit un arc JB qui se retrouvera dans la développée du cône avec un angle au centre (b) calculé par :

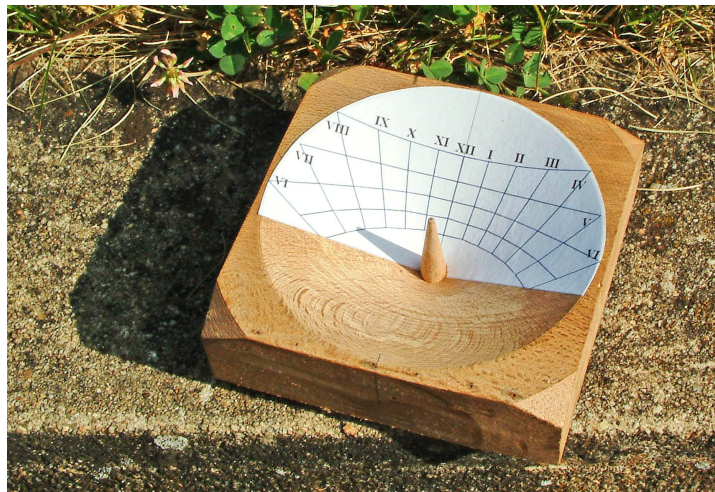
$$L \times tg \alpha \times \hat{a} = \frac{L}{\cos \alpha} \times \hat{b} \rightarrow \hat{b} = \hat{a} \times \sin \alpha$$

La longueur d'ombre SA se calcule dans le triangle OAS par :

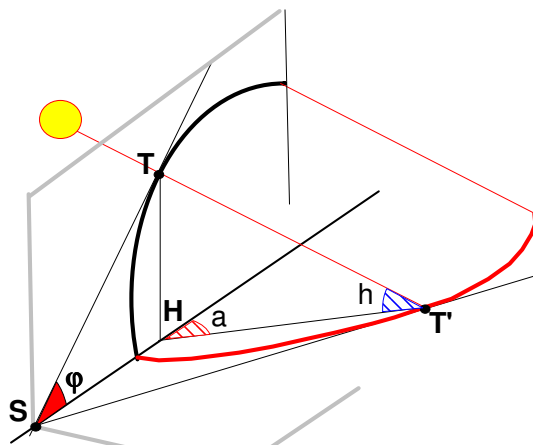
$$\frac{AS}{\cosh} = \frac{OS}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - h)\right]} \quad \text{et,}$$

$$AS = L \frac{\cosh}{\cos(\alpha - h)}$$

Exemple :



Cadran à style circulaire



En considérant une courbe plane, dans un plan Nord-Sud, telle que sa tangente parallèle à l'axe du monde coupe un plan en un point S, on observe que l'ombre de cette courbe reste tangente aux lignes horaires du cadran constitué par la tangente ST et le plan de projection. Pratiquement on ne s'intéresse qu'au cas simple du style constitué par un demi cercle dont la projection sur un plan horizontal est une ellipse.

Connaissant les azimuts et hauteurs à chaque heure et différents moments de l'année, il est facile de calculer dans le système yOx, les coordonnées du point B en fonction de l'angle θ , variable de 0 à π

$$Y_B = OH + HB \cdot \cos a = R \cdot \cos \theta + \frac{AH}{tgh} \cdot \cos a$$

$$Y_B = R \cdot \left(\cos \theta + \frac{\sin \theta \cdot \cos a}{tgh} \right)$$

$$X_B = HB \cdot \sin a = R \cdot \frac{\sin \theta \cdot \sin a}{tgh}$$

La position du point S se calcule par :

$$OS = \frac{R}{\sin \varphi}$$

Les coordonnées des points T' se calculent par

les formules précédentes avec $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$ et

les lignes horaires sont les droites ST' et on vérifie qu'elles sont bien identiques à celles du cadran horizontal.

On peut aussi calculer la position du point M qui est le maximum de Y_B correspondant au point haut de la courbe.

$$Y_B \text{ est de la forme : } Y_B = R \cdot (\cos \theta + m \cdot \sin \theta) \quad \text{avec} \quad m = \frac{\cos a}{tgh}$$

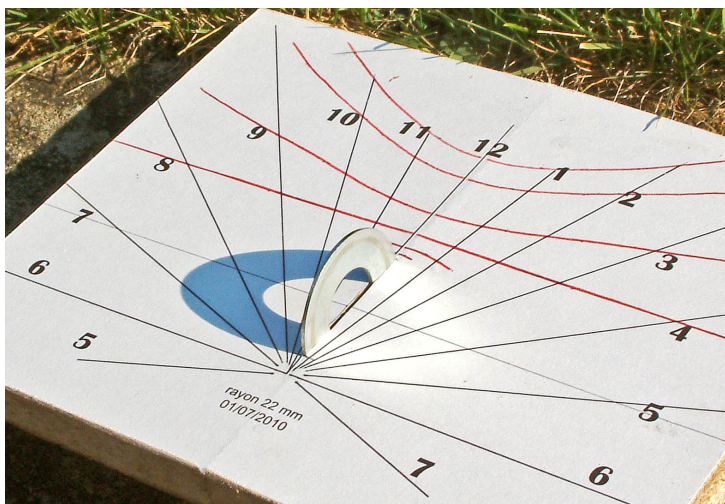
En dérivant par rapport à θ :

$$Y'_B = R \cdot (-\sin \theta + m \cdot \cos \theta)$$

La dérivée s'annule quand :

$$\sin \theta = m \cdot \cos \theta \rightarrow \tan \theta = m = \frac{\cos a}{tgh}$$

On en déduit des valeurs de θ pour calculer par points des courbes hyperboliques entre le solstice d'hiver et les équinoxes.



Cadran sans calcul du type escalier :

Toute face parallèle à un plan horaire peut donner une information de temps en passant de l'ombre à la lumière ou en passant de la lumière à l'ombre.

On sait que ces plans horaires sont parallèles à l'axe du monde et sont indépendants de la déclinaison. L'intersection de 2 de ces plans est donc parallèle à l'axe du monde, c'est-à-dire à une droite dans un plan Nord-Sud inclinée de l'angle de latitude par rapport au plan horizontal.

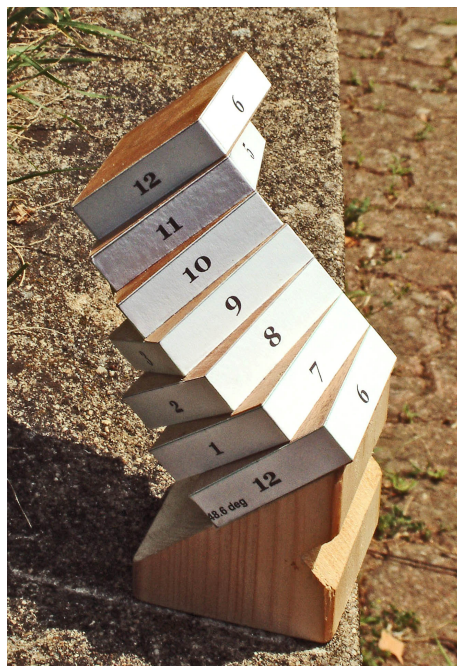
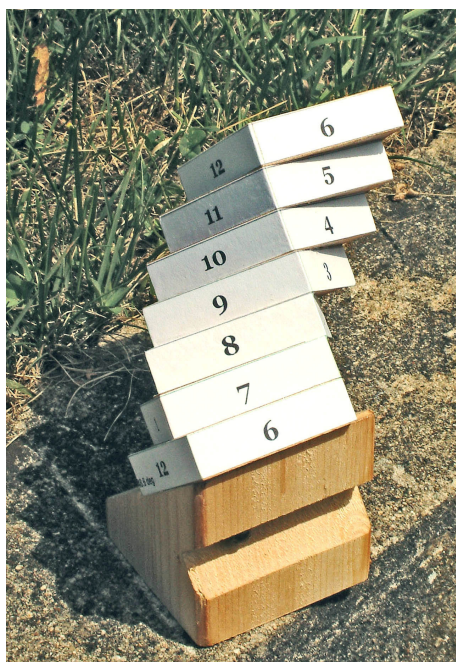
Il n'y a alors pas besoin de calculs mais d'imagination pour constituer un solide possédant suffisamment de faces planes capables d'indiquer les heures entre 6 h. du matin et 6 h. du soir.



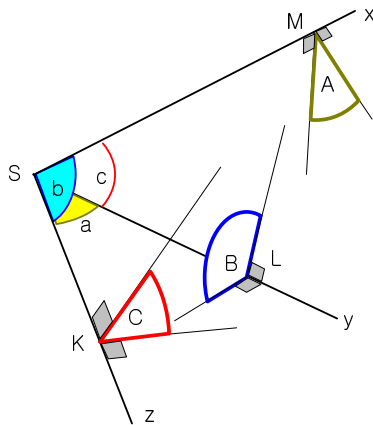
La solution suivante est composée de 7 prismes droits à base carrée qui sont empilés avec chaque fois un décalage angulaire de 15 degrés. Il a paru avantageux de les orienter autour d'une arête commune qui rappelle l'axe du monde.

Les heures matinales passent de l'ombre à la lumière. Les heures d'après midi se lisent à gauche et à droite (à gauche les faces s'éclairent, à droite elles passent à l'ombre).

On pourrait aussi imaginer un axe portant 13 plans qui couvrent 180 degrés, mais en acceptant l'encombrement de longueur.



PARTIE 3 Méthode astronomique, trigonométrie sphérique



Ces calculs découlent de la trigonométrie sphérique dont les bases sont rappelées ci-dessous. Cette trigonométrie s'applique au trièdre en établissant des relations entre les angles au sommet sur les faces et les angles entre les plans du trièdre

Dans un trièdre quelconque de sommet S les angles sur les faces au sommet sont nommés a, b, c . Les angles entre les faces qui se coupent sur l'arête opposée s'appellent A, B, C . Les propriétés qui suivent, sont évidemment indépendantes des distances SK, SM, SL . Quand elles sont égales, le sommet du trièdre peut devenir le centre d'une sphère.

Les angles A, B, C se mesurent alors sur des plans tangents à la sphère aux points K, L, M . Les 3 points forment sur la sphère un triangle baptisé sphérique.

Les formules courantes sont :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

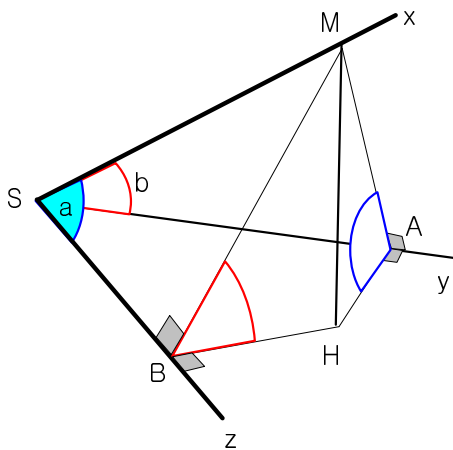
$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$$

$$\cos a \cdot \sin b = \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C + \sin c \cdot \cos A$$

$$\cot a \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos C + \sin C \cdot \cot A$$

Ces formules s'écrivent aussi en appliquant la règle de récurrence circulaire.

Rappel des démonstrations



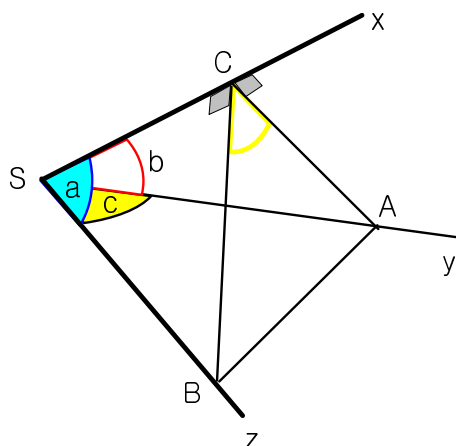
Projeter le point M sur le plan (zSy) , puis le point H sur les côtés Sz et Sy. Les plans MBH et MAH sont perpendiculaires à Sz et Sy et déterminent les angles B et A du trièdre. On peut écrire :

$$MH = MB \times \sin \hat{B} = MS \times \sin a \times \sin \hat{B}$$

$$MH = MA \times \sin \hat{A} = MS \times \sin b \times \sin \hat{A}$$

D'où :

$$\sin a \times \sin \hat{B} = \sin b \times \sin \hat{A} \rightarrow \frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}$$



Par un point C de Sx le plan perpendiculaire à Sx coupe les arêtes Sz et Sy en A et B

On sait que :

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2 \cdot SA \cdot SB \cdot \cos c$$

$$AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2 \cdot CB \cdot CA \cdot \cos \hat{C}$$

$$SA^2 = SC^2 + CA^2$$

En remplaçant

$$SB^2 = SC^2 + CB^2$$

Et en égalant les 2 expressions de AB^2 , il vient : $2 \cdot SC^2 - 2 \cdot SA \cdot SB \cdot \cos c = -2 \cdot CB \cdot CA \cdot \cos \hat{C}$ Et en divisant par $2 \cdot SA \cdot SB$ on arrive à

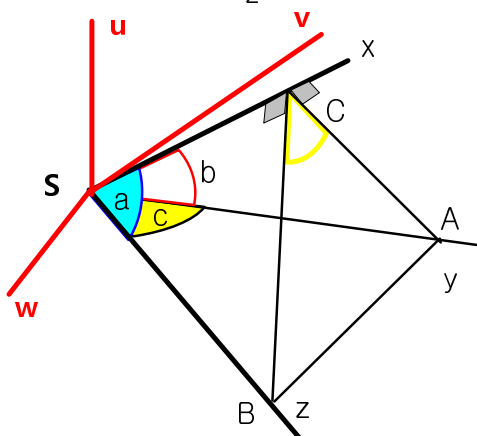
$$\cos c = \frac{SC}{SA} \times \frac{SC}{SB} + \frac{CB}{SB} \times \frac{CA}{SA} \times \cos \hat{C}$$

$$\cos c = \cos b \cdot \cos a + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{C}$$

Et par récurrence circulaire :

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \hat{B}$$



La 3^{ème} formule se démontre en considérant le **trièdre supplémentaire** construit sur le sommet S. Il s'agit du trièdre construit en menant Su perpendiculaire à la face SAB, Sv perpendiculaire à la face SBC et Sw perpendiculaire à la face SAC.

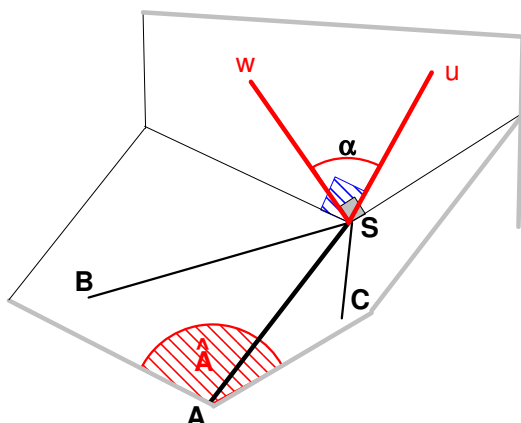
Donc Su est perpendiculaire à SA et SB, de même Sv est perpendiculaire à SB et SC, et Sw perpendiculaire à SA et SC

Par conséquent :

Su et Sv déterminent un plan perpendiculaire à SB

Su et Sw déterminent un plan perpendiculaire à SA

Sv et Sw déterminent un plan perpendiculaire à SC



Considérer l'arête SA et le plan Su, Sw pour calculer l'angle de face α

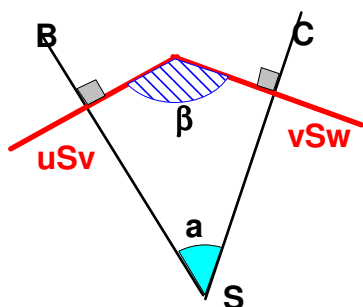
$$\alpha = \hat{uSw} = \hat{A} - 2 \cdot \left(\hat{A} - \frac{\pi}{2} \right) = \pi - \hat{A} \text{ de même :}$$

$$u\hat{S}v = \pi - \hat{B} \quad \text{et} \quad v\hat{S}w = \pi - \hat{C}$$

Le plan (vSw) est perpendiculaire à SC

Le plan (uSv) est perpendiculaire à SB, donc ces 2 plans sont perpendiculaires à la face (BSC)

Et immédiatement on a : $\beta = \pi - a$, qui est l'angle du dièdre d'arête Sv.



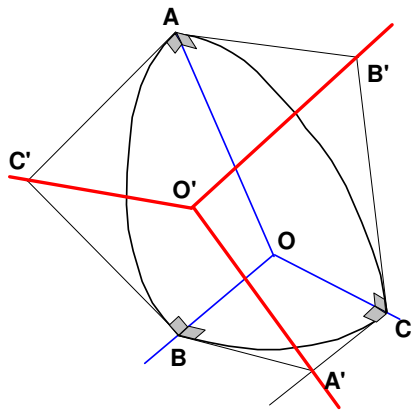
Finalement le **trièdre supplémentaire** a pour angles de faces :

$$(\pi - \hat{A}) \rightarrow (\pi - \hat{B}) \rightarrow (\pi - \hat{C})$$

Et pour angles de dièdres :

$$(\pi - a) \rightarrow (\pi - b) \rightarrow (\pi - c)$$

Il suffit d'appliquer les premières formules en notant que les cosinus $(\pi - \alpha)$ introduisent un signe négatif.



$$\cos(\pi - A) = \cos(\pi - B) \cdot \cos(\pi - C) + \sin(\pi - B) \cdot \sin(\pi - C) \cdot \cos a$$

$$-\cos A = \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$$

Remarque : 3 points A, B, C sur une sphère de centre O définissent le trièdre OA, OB, OC et les 3 plans tangents à la sphère en A, B, C possèdent un point commun O' et leurs 3 intersections O'A', O'B', O'C' constituent le trièdre supplémentaire à celui de centre O

Applications

La meilleure application est la résolution des triangles sphériques (ou simplement des trièdres).

Il suffit de connaître 3 éléments pour déterminer les 3 autres à l'aide de formules assez compliquées Il y a toujours 6 cas de combinaisons des données

Ces formules prennent des formes simplifiées quand il y a un angle droit.

Si c'est un angle dièdre ($A = \frac{\pi}{2}$), le triangle est dit rectangle

Si c'est un angle de face ($a = \frac{\pi}{2}$), le triangle est rectilatère

Notations	a, b, c	côtés (angles de faces)
	A, B, C	angles aux sommets (angles dièdres)
	$2p = a + b + c$	périmètre
	$2E = A + B + C - \pi$	excès sphérique
	R et r	rayons sphériques des cercles circonscrit et inscrit (angles au centre pour des triangles dessinés sur la sphère de rayon unité)

Consulter les 3 pages des formules copiées dans les tables de logarithmes Bouvard et Ratinet copyright 1902, édition 1946

Inclinaison de la ligne jour nuit

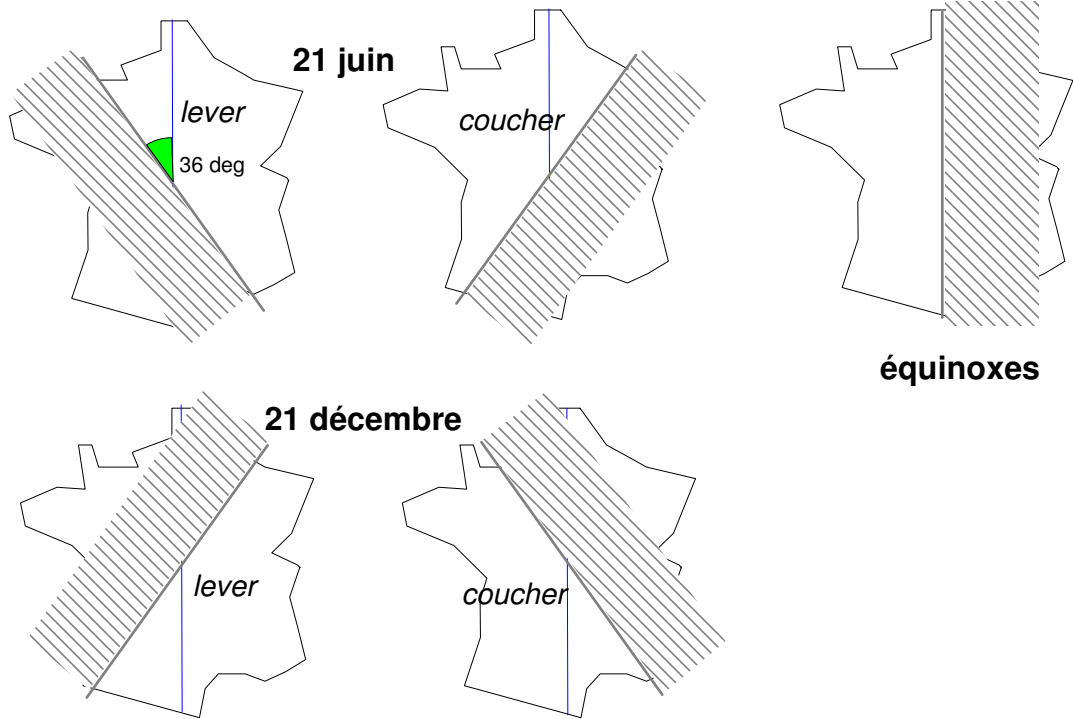
Vue du soleil la terre est une sphère dont une moitié est éclairée et l'autre dans l'ombre. Leur frontière est un grand cercle perpendiculaire au rayon terre soleil. Cependant la terre tourne autour d'un axe incliné de direction constante qui définit les pôles et les méridiens. Donc les méridiens doivent en général couper le grand cercle avec une certaine inclinaison. Cette inclinaison est maximale aux solstices quand le plan de projection de l'axe de la terre sur le plan écliptique contient le soleil.

L'inclinaison est nulle aux équinoxes car le plan de projection de l'axe est perpendiculaire au rayon du soleil, c'est-à-dire comme le grand cercle frontière entre l'ombre et la partie éclairée.

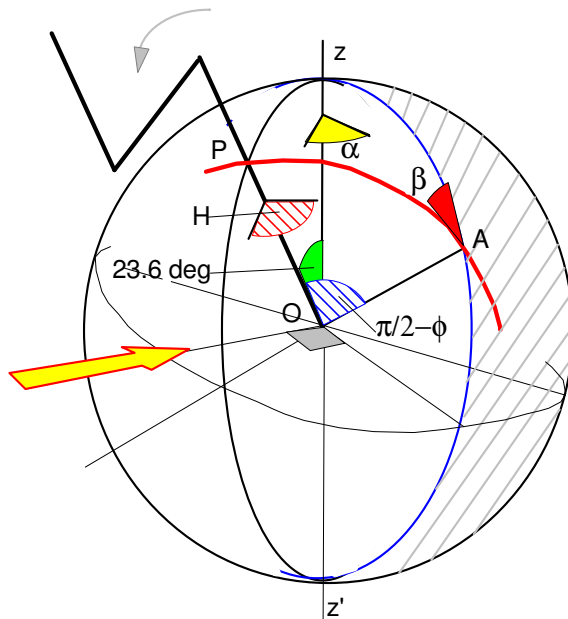
L'inclinaison est maximale les 21 juin et 21 décembre mais les sens sont opposés.

Ce maximum varie avec la latitude. A l'équateur, son maximum est de 23.6 deg. qui est l'inclinaison de l'axe de la terre.

Sur les croquis suivants, on voit l'effet calculé à la latitude de Bourges (47 deg. N) où l'inclinaison maximale atteint 36 deg.



Calcul de l'inclinaison en fonction de la date et de la latitude



Les rayons solaires sont perpendiculaires au plan ($z z' A$) qui fait un angle α avec le plan de l'axe OP de la terre.. Un plan horaire d'angle (H) définit une méridienne PA qui coupe le cercle d'ombre en un point A

On peut écrire les relations nécessaires pour que le point A appartienne à une latitude donnée ϕ puis en déduire l'angle β d'inclinaison.

Les calculs se font sur le trièdre (OP, Oz, OA) où l'on connaît :

L'angle $A = \alpha$

L'angle $a = \pi/2 - \phi$

L'angle $b = \text{angle } POz = 23.6 \text{ deg}$

Cas 5 des triangles sphériques quelconques :

On obtient β par : $\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a}$

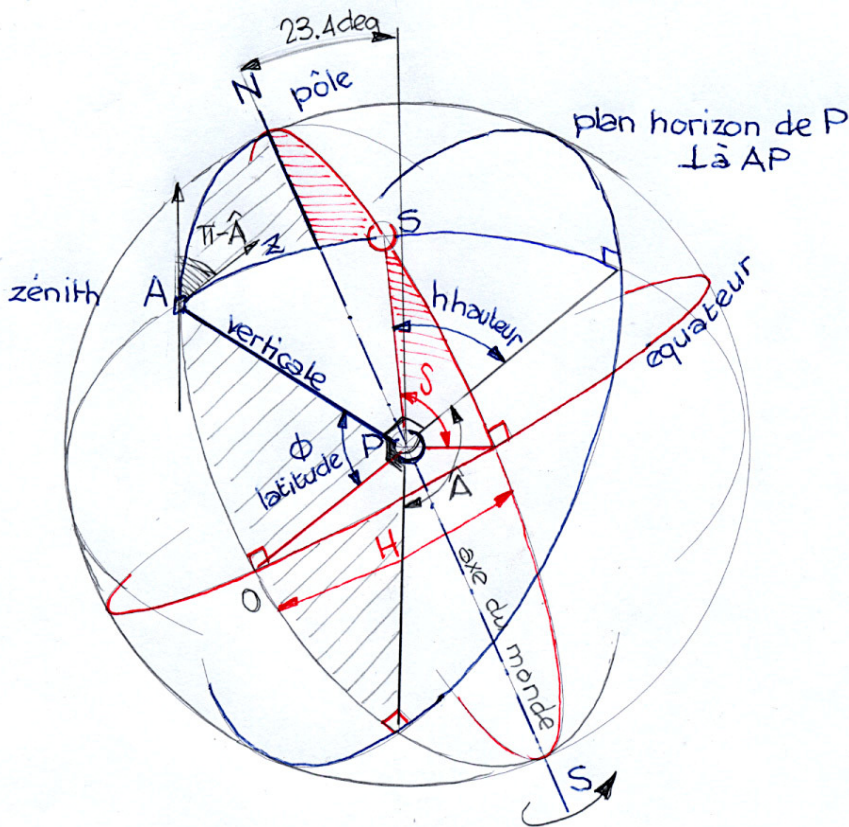
Et l'angle H par son complément :

$$\cot \frac{C}{2} = \frac{\tan \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}}$$

Les calculs sont faits avec $\alpha = 0$ (équinoxe), 30, 60, 90 deg.(solstice)

α deg	0	30	60	90
β deg	0	17.1	30.6	35.9
H deg	0	40.5	81.1	117.5

Coordonnées astronomiques Hauteur et azimut solaire



La figure représente la sphère céleste qui s'étend autour de la terre avec le système de coordonnées équatoriales (c'est-à-dire qui se réfère à l'équateur terrestre et aux longitudes et latitudes)

La ligne des pôles terrestres qui représente à nos yeux l'axe du monde est inclinée de 23.4 degrés sur la normale au plan écliptique. L'équateur est perpendiculaire à cet axe. On considère un point de la terre situé par exemple sur le méridien zéro (Greenwich) et de latitude ϕ .

A la verticale PA correspond un plan perpendiculaire qui est le plan horizon du point P. En S se trouve une étoile sur la sphère céleste (pour

faciliter la compréhension de la figure ce n'est pas le soleil qui est ailleurs ...sur l'écliptique)

Le grand cercle passant par A et par S est perpendiculaire au plan horizon, la position de S dans ce plan est définie par l'angle h appelé hauteur

Le grand cercle passant par le point A et la ligne des pôles est perpendiculaire au plan horizon. L'angle A qu'il forme avec le plan précédent détermine l'azimut de l'étoile S

Le grand cercle passant par S et les pôles permet de définir l'angle horaire H de l'étoile par rapport au méridien de P. Cet angle H se mesure sur l'équateur à raison de 15 degrés par heure. On définit finalement l'angle δ de S par rapport à l'équateur, appelé déclinaison et qui varie au cours du déplacement annuel de la terre sur l'écliptique

Le trièdre de sommet P et d'arêtes PA, PN et PS permet d'écrire :

$$\cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \delta\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \delta\right) \times \cos H$$

$$\frac{\sin z}{\sin H} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}{\sin(\pi - A)}$$

En transformant un peu, on arrive aux 2 formules fondamentales :

:

$$\begin{aligned} \sinh &= \sin \delta \times \sin \phi + \cos \phi \times \cos \delta \times \cos H \\ \sin A &= \frac{\cos \delta \times \sin H}{\cosh} \end{aligned}$$

La formule suivante, indépendante de h, est également citée par des spécialistes :

$$tgA = \frac{\cos \delta \times \sin H}{\sin \phi \times \cos \delta \times \cos H - \cos \phi \times \sin \delta}$$

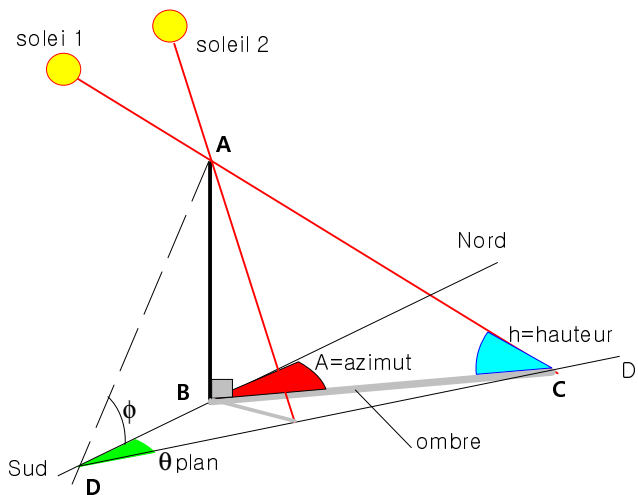
On trouvera plus loin une démonstration de cette formule mise en forme simplifiée

(division par $\cos \delta$)
$$tgA = \frac{\sin H}{\cos \phi \times tg \delta + \sin \phi \times \cos H}$$

Les calculs se font pour une latitude, des déclinaisons choisies et à chaque heure. Les courbes obtenues se prêtent à des régressions du 3^{ème} et 2nd degré

La figure montre que la connaissance des angles de hauteur h et d'azimut A du soleil, est suffisante pour calculer à tout moment l'orientation et la longueur de l'ombre d'un mat vertical

Si du sommet, on abaisse dans le plan Nord-Sud, une ligne inclinée de l'angle de latitude sur le plan horizontal, il apparaît un cadran fictif, polaire horizontal, dont l'angle θ_{plan} correspond à l'angle horaire H. Quelle que soit la date, mais à la même heure, les extrémités des ombres se trouvent sur la ligne DD'



La seconde formule donne la valeur de A à partir de la hauteur issue de la première et en veillant à conserver la même valeur de déclinaison. L'angle A provenant d'un sinus, penser à prendre la valeur 90 deg.+ A dès que 90 degrés sont atteints. (Voir les courbes)

La première formule permet aussi de calculer l'heure de lever ou de coucher du soleil. Sa hauteur à l'horizon étant nulle on obtient :

$$\cos \hat{H} = -tg \delta \times tg \phi$$

Exemple : au moment des solstices

$$\arccos H = -tg 23,4 \times tg 48,6 = 119,39 \text{ deg}$$

$$\arccos H = tg 23,4 \times tg 48,6 = 60,60 \text{ deg}$$

A Paris, la différence est donc d'environ ± 2 heures par rapport à 6 heures

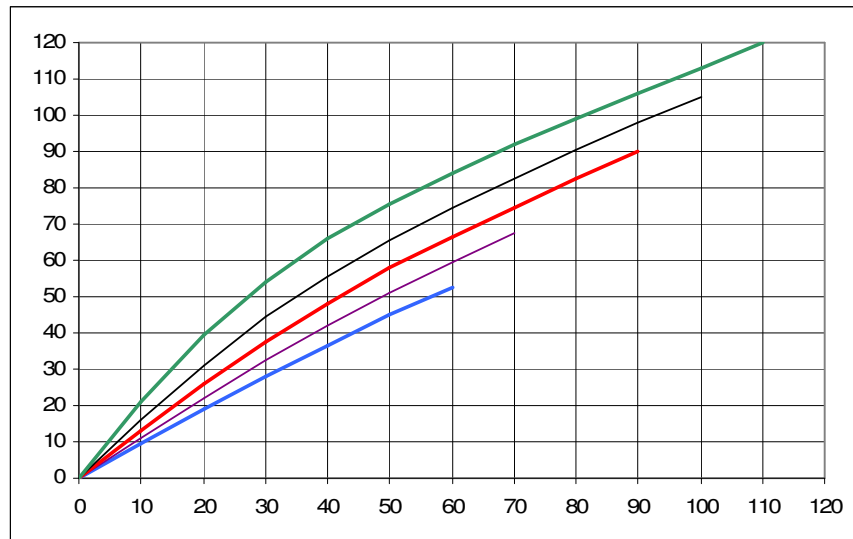
Les courbes suivantes montrent les variations de l'azimut et de la hauteur solaire pour une heure donnée au cours de l'année

L'origine correspond à midi, chaque intervalle des abscisses représente 1 heure, les valeurs ont été calculées pour les déclinaisons de -23.4, -11.5, 0, +11.5, +23.4 degrés.

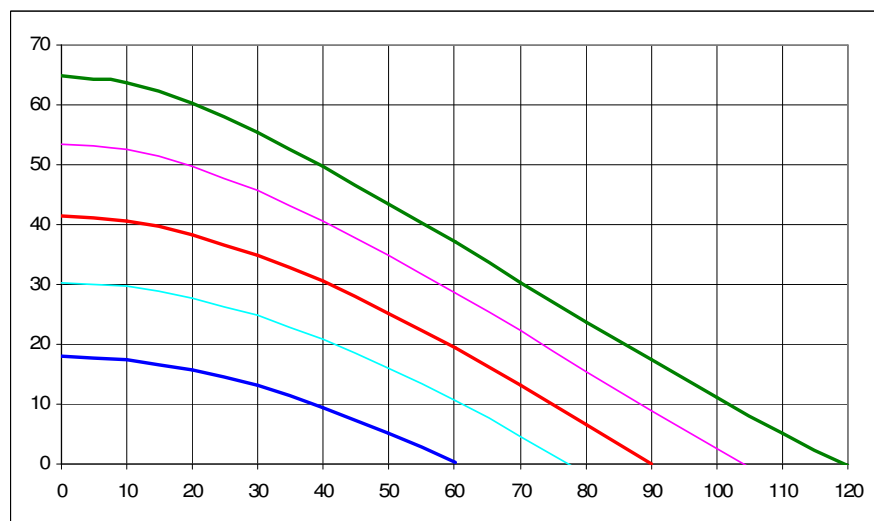
Les angles négatifs signifient que le soleil est passé en dessous de l'horizon, c'est-à-dire vers 16 heures au jour le plus court, exactement à 18 à l'équinoxe et vers 20 heures au jour le plus long

Angles d'azimuts (A) en fonction de l'angle horaire (H), (1 heure = 15 degrés)

La courbe supérieure verte est relative au solstice d'été, la médiane rouge est l'équinoxe et l'inférieure bleue est le solstice d'hiver. Calculées à la latitude de 48.6, (proche sud Paris)



Angles de hauteur solaire (h)

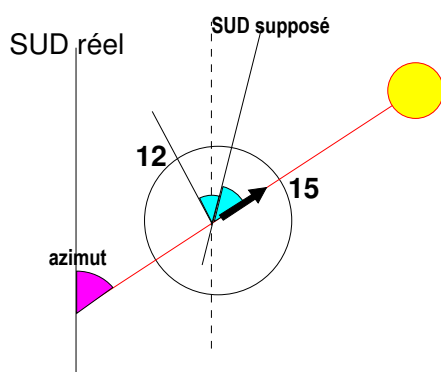


Il est possible d'utiliser l'angle de hauteur pour créer un cadran solaire. L'application principale est le cadran de berger (étudié plus loin)

Le tableau suivant montre, avec une bonne approximation, les azimuts et hauteurs au 21^{ème} jour de chaque mois à la latitude 48.6 degrés

Déclinaisons degrés	-23.45	-20	-11	0	12	20	23.45
dates	21/12	21/01	21/02	21/03	21/04	20/05	21/06
dates	21/12	21/11	21/10	21/09	21/08	21/07	21/06
HAUTEURS degrés							
midi	17.95	21.4	30.4	41.4	53.4	61.4	64.9
11 et 13 h.	16.7	20	28.9	39.7	51.3	59	62.2
10 et 14 h.	12.1	16.4	24.8	34.9	45.7	52.6	55.5
9 et 15 h.	7.5	10.5	18.4	27.9	37.8	44.1	46.7
8 et 16 h.	0.3	3.1	10.5	19.3	28.6	34.6	37
7 et 17 h.			1.4	9.9	18.9	24.7	27.1
6 et 18 h.				0	9	14.9	17.4
5 et 19 h.						5.5	8.1
AZIMUTS degrés							
midi	0	0	0	0	0	0	0
11 et 13 h.	14.4	15	16.9	19.7	23.9	28.1	30.6
10 et 14 h.	28.1	29.3	32.7	37.6	44.5	50.7	54
9 et 15 h.	40.9	42.5	47	53.1	61.1	67.7	71
8 et 16 h.	52.6	54.6	59.8	66.6	74.8	81.2	84.2
7 et 17 h.		65.8	71.5	78.6	86.8	87.2	95.5
6 et 18 h.				90	98	103.5	106
5 et 19 h.					109.1	114.2	116.5

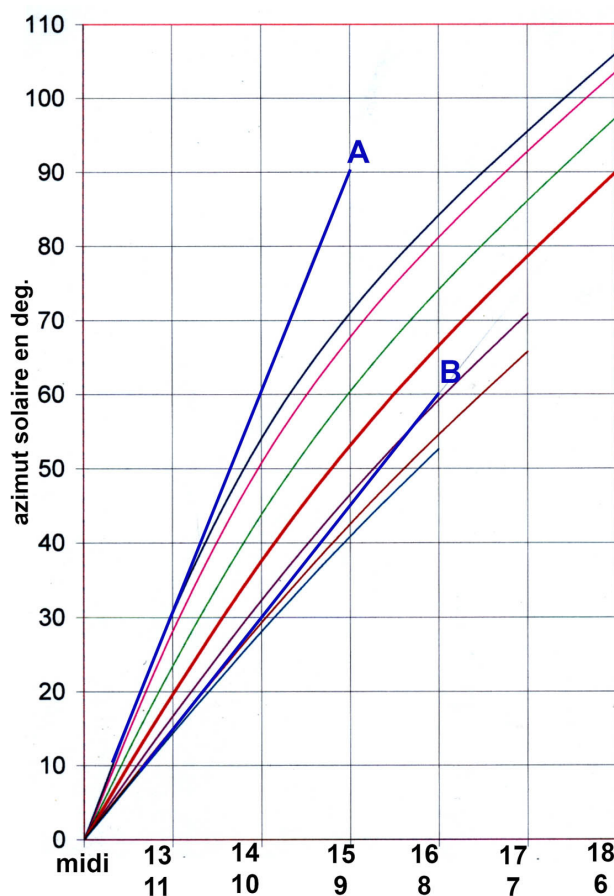
Peut-on trouver le Sud à l'aide d'une montre ?



Il y a une méthode simpliste et assez répandue qui pourrait faire égarer bien des aventuriers.

Elle dit : Sur une montre réglée sur le temps universel de Greenwich, orientez la petite aiguille sur le soleil et la bissectrice de son angle avec le chiffre de 12 heures doit indiquer le Sud.

Ceci ne peut être exact car la rotation de l'aiguille de montre est régulière alors que l'azimut du soleil est variable au cours de la journée et de l'année.



Le graphique montre l'évolution de l'azimut aux 6 périodes de l'année qui correspondent au tableau précédent.

La droite OA représente la rotation de l'aiguille de montre (90 degrés entre 9 et 12 heures et entre 12 et 15 heures).

La droite OB représente la rotation de la bissectrice. (45 deg. en 3 heures)

On voit qu'elle reste proche des 3 courbes qui couvrent novembre, décembre, janvier, février et que par conséquent l'approximation est assez bonne en cette période où malheureusement l'ensoleillement est médiocre.

Mais si on applique cette méthode à 15 heures au solstice d'été, le Sud est à 70 deg du soleil, et l'aiguille de montre qui est à 90 degrés conduit à penser que le Sud serait à 45 degrés du soleil. L'erreur atteint alors 25 deg.

A défaut de boussole, il faudrait avoir les courbes ci-contre, la date, l'heure, et un rapporteur d'angle....

En calculant l'erreur, on voit que celle-ci peut être ramenée à environ + ou - 10 degrés si on se décale, **vers le chiffre 12** de 2/3 de l'angle compris entre la petite aiguille et le nombre 12

Détermination de l'ombre d'un mat vertical sur un plan horizontal

Le prochain tableau de calculs permet de prévoir l'ombre portée par l'arête verticale d'un bâtiment à différentes heures de la journée et de l'année.

On en déduit par exemple l'ombre portée par une haie, un mur, une maison dont on connaît l'orientation et les dimensions

Les résultats sont :

L'angle (H) de hauteur en deg.

L'angle d'azimut en deg.

Les coordonnées de l'extrémité de l'ombre quand l'origine est prise au pied de l'arête avec l'axe des y orienté sur le Nord. (Les x sont négatifs le matin et positifs après midi)

La longueur de l'ombre pour un mat de hauteur 10

latitude deg	48,6	0,8482									
dates		23-déc.	31- janv.	28- févr.	21 ma	30- avr.	21-juin	31- juil.	22- sept.	31-oct.	
numéro du jour		356	31	59	80	120	171	212	265	304	
déclinaison du jour		-23,4	-17,3	-7,9	0,3	14,8	23,4	18,2	0,3	-14,1	
heures	H deg										
8 ou 16	60	0,3	5,3	13,0	19,5	30,8	37,0	33,3	19,5	7,9	
9 ou 15	45	7,5	12,9	21,1	28,1	40,1	46,7	42,8	28,1	15,7	
10 ou 14	30	13,1	18,8	27,6	35,2	48,2	55,5	51,1	35,2	21,8	
11 ou13	15	16,7	22,7	32,0	40,0	54,0	62,2	57,3	40,0	25,9	
12	0	18,0	24,1	33,5	41,7	56,2	64,8	59,6	41,7	27,3	
8 ou 16	60	52,6	56,1	61,7	66,8	77,0	84,2	79,7	66,8	58,0	
9 ou 15	45	40,9	41,7	44,1	47,4	58,0	71,0	62,1	47,4	42,4	
10 ou 14	30	28,1	29,0	31,2	34,2	43,5	54,0	47,0	34,1	29,6	
11 ou13	15	14,4	14,9	16,3	18,1	23,8	30,6	26,1	18,0	15,3	
12	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
hauteur du mat	10										
x8			89,9	38,3	25,9	16,4	13,2	15,0	25,9	61,1	
x9		49,7	29,1	18,0	13,8	10,1	8,9	9,6	13,8	24,0	
x10		20,2	14,2	9,9	8,0	6,2	5,6	5,9	8,0	12,3	
x11		8,3	6,2	4,5	3,7	2,9	2,7	2,8	3,7	5,4	
x12		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
y8				20,6	11,1	3,8	1,3	2,7	11,1	38,2	
y9		57,4	32,7	18,6	12,7	6,3	3,1	5,1	12,7	26,3	
y10		37,8	25,6	16,3	11,7	6,5	4,0	5,5	11,7	21,7	
y11		32,3	23,1	15,4	11,3	6,6	4,5	5,8	11,3	19,9	
y12		30,8	22,4	15,1	11,2	6,7	4,7	5,9	11,2	19,4	
L ombre à 8 h.				43,5	28,2	16,8	13,3	15,2	28,2	72,1	
L9		75,9	43,8	25,9	18,7	11,9	9,4	10,8	18,7	35,6	
L10		42,9	29,3	19,1	14,2	8,9	6,9	8,1	14,2	24,9	
L11		33,3	23,9	16,0	11,9	7,3	5,3	6,4	11,9	20,6	
L12		30,8	22,4	15,1	11,2	6,7	4,7	5,9	11,2	19,4	

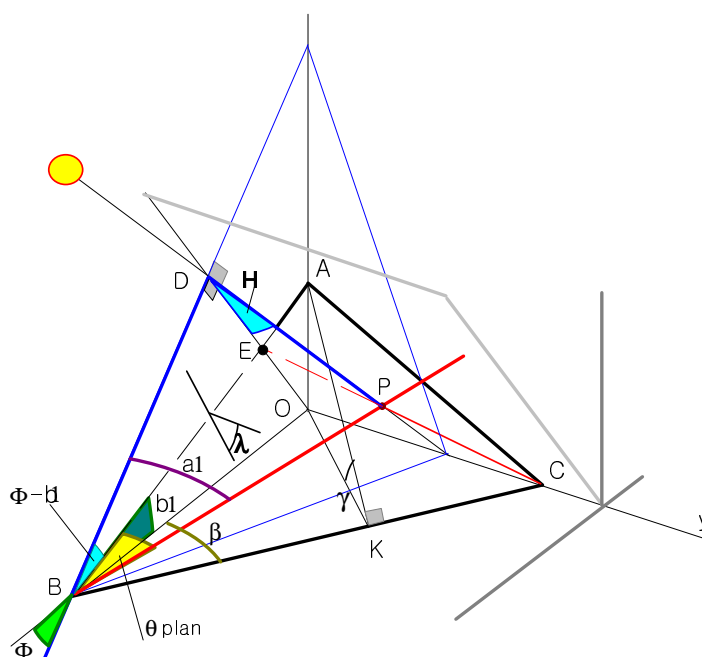
Méthode générale de calcul des cadrans par la trigonométrie sphérique

Cette méthode, qui peut paraître assez abstraite, est la plus rationnelle et la plus précise. Il suffit de faire confiance aux formules de trigonométrie sphérique et on peut vérifier qu'elle présente des possibilités d'extension générale

Elle s'applique au cadran polaire à projection sur un plan quelconque.

On utilise la figure d'un cadran pseudo horizontal dévié vers l'Est pour étudier les équations.

Mais il faudra examiner les cas d'orientation vers l'Ouest et ceux où une ligne parallèle à l'axe du monde sort du plan vers le Sud, c'est-à-dire les cadrans verticaux et pseudo verticaux).



BD est le style, dans le plan vertical Nord-Sud, incliné de l'angle de latitude (Φ) sur le plan horizontal. Le plan de projection ABC est défini par sa pente (γ) sur le plan horizontal et sa trace (β) par rapport à la direction **Sud-Nord**

La longueur du style est choisie pour que le plan équinoxe, qui lui est perpendiculaire, passe par l'axe Oy. Un plan horaire défini par l'angle **(H)** coupe le plan ABC suivant la droite BP

Pour graduer le cadran il faut calculer l'angle ABP (θ plan) et pour calculer les longueurs d'ombres, il faut calculer l'angle (α_1) du triangle rectangle BDP

Les calculs se font sur le trièdre de sommet B et d'arêtes BD, BA, BP avec les correspondances de notations suivantes :

a=a1	A=π-λ
b=θ plan	B=H
c=Φ-b1	C= non concerné

Les inconnues sont les angles a et b donnés par les formules suivantes :

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2} \times \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} ; \quad \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{A-B}{2} \times \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}$$

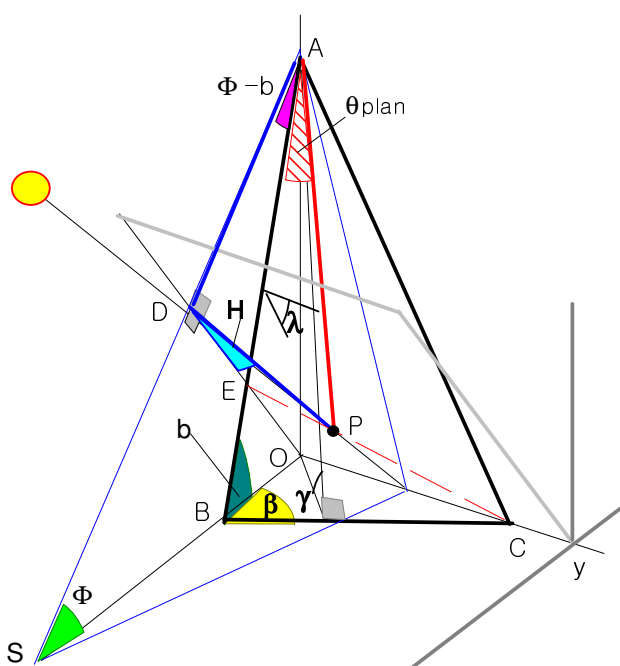
a= angle en B de ABC	$A=\pi/2$
$b=\beta$	$B=\lambda$
$c=b1$	$C=\gamma$

$$tga = \frac{tgb}{\cos C} ; \quad tgc = \sin b \times tgC ; \quad \cos B = \cos b \times \sin C \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\text{Angle en B sur ABC} = \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \gamma}\right)$$

$$\lambda = \arccos(\cos \beta \times \sin \gamma)$$

$$\text{Angle } b1 = \arctg(\sin \beta \times \operatorname{tg} \gamma)$$



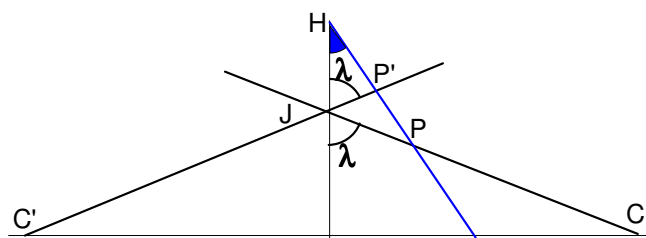
L'angle θ plan se calcule par le trièdre de sommet A AD, AE, AP où sont connus l'angle horaire H, l'angle de dièdre $\pi - \lambda$

C'est-à-dire des valeurs exprimées comme précédemment à partir des paramètres de définition du plan

Donc les formules précédentes restent valables quelle que soit la pente du plan.

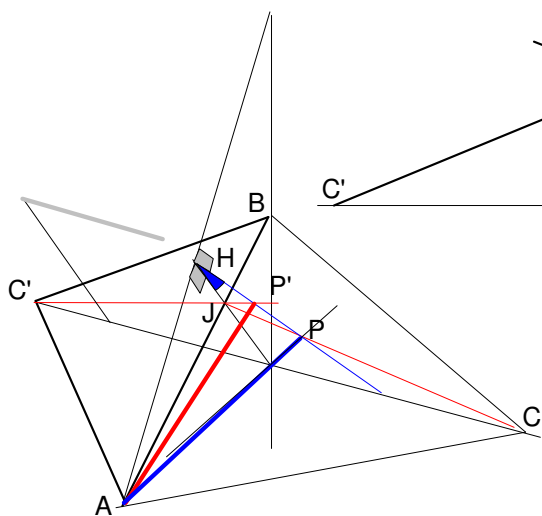
Mais il semble ne pas en être de même pour l'orientation.

En observant le cas d'un cadran symétrique orienté vers l'Ouest, on voit que la différence viendrait de l'angle dièdre (A) de l'arête AJ qui vaut λ pour calculer l'ombre AP' sur un plan orienté Ouest et $(\pi - \lambda)$ pour l'ombre AP sur un plan orienté à l'Est.



Néanmoins on arrive à un calcul assez simple par tableur XL qui couvre les 2 cas à condition d'introduire une orientation X deg. (≤ 90) pour un cadran vers l'Est et $180 - X$ pour celui vers l'Ouest

De toutes façons, chaque fois qu'il y a une solution graphique, on a intérêt à vérifier l'identité des résultats.



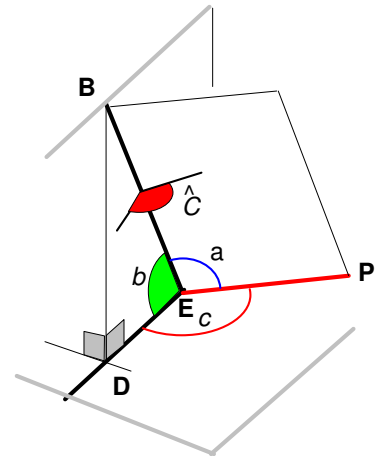
Calcul de l'angle de la droite équinox

Considérer le trièdre rectangle de sommet E et d'arêtes EB, EP, ED où on recherche l'angle BEP en connaissant :

$$\hat{C} = \pi - \lambda \quad \hat{b} = \frac{\pi}{2} - (\phi - \hat{b}_1)$$

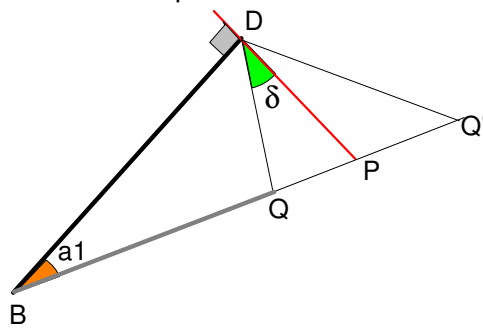
En appliquant l'une des formules précédentes on a :

$$\operatorname{tga} = \frac{\operatorname{tgb}}{\cos C} = \frac{-1}{\operatorname{tg}(\phi - b_1) \cdot \cos \lambda}$$



Calcul des longueurs d'ombres :

La longueur d'ombre BQ est proportionnelle à la longueur BD du style et dépend de la déclinaison. Il paraît plus facile de calculer son extrémité Q par rapport à la ligne équinox



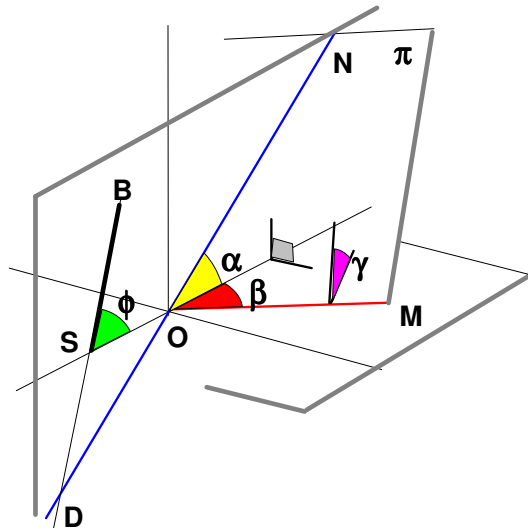
Considérer le triangle rectangle PDB où sont connus BD et l'angle a1

$$PD = BD \cdot \operatorname{tga}1$$

$$\frac{PQ}{\sin \delta} = \frac{PD}{\sin(\frac{\pi}{2} - a1 \pm \delta)} = \frac{BD \cdot \operatorname{tga}1}{\cos(a1 \pm \delta)}$$

$$PQ = BD \frac{\operatorname{tga}1 \cdot \sin \delta}{\cos(a1 \pm \delta)}$$

Cas de cadrans où le pied du style est hors figure :



Les angles se conservent et se calculent avec un style de longueur quelconque.

Le seul problème est de déterminer le départ des lignes horaires sur la ligne OM intersection du plan de pose et du plan (π) de cadran. En général le plan de pose est horizontal et il suffit de tracer un cadran horizontal sur le sol pour trouver les points d'intersection avec la ligne OM.

Le calcul des longueurs d'ombres oblige à connaître le point de rencontre du style SB avec le plan (π)

Le plan est défini par l'orientation (β) et sa pente (γ)

Dans le trièdre rectangle de sommet O OM, ON, Oy on peut calculer :

L'angle d'intersection avec le vertical Nord-Sud :

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

L'angle de face MON :

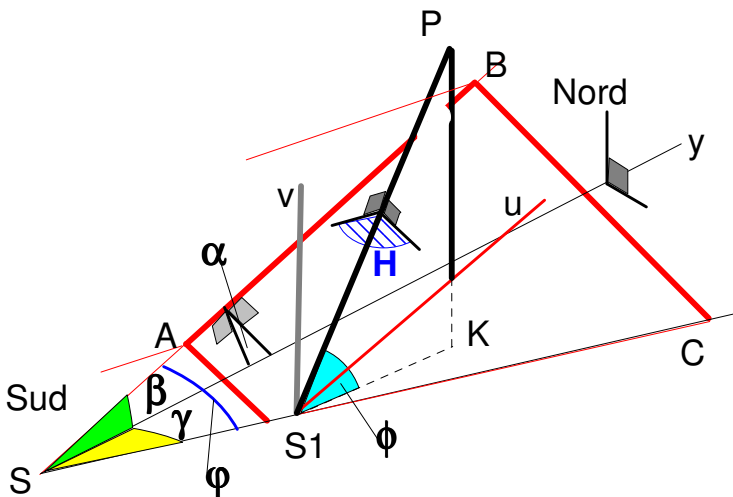
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \lambda}$$

Selon que l'angle (α) est inférieur, supérieur ou égal à (ϕ), le cadran est pseudo horizontal, pseudo vertical ou polaire. Les lignes horaires convergent sur le point D ou sont parallèles.

$$angleD = \phi - \alpha$$

$$\frac{OS}{\sin(\phi - \alpha)} = \frac{SD}{\sin \alpha} \rightarrow \rightarrow SD = d \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\phi - \alpha)}$$

Application au cadran sur un toit à 2 pentes



Par résolution du trièdre rectangle SB,
Sy, SC on obtient

$$tg\gamma = \sin\beta \cdot tg\alpha \text{ et } tg\varphi = \frac{tg\beta}{\cos\alpha}$$

Le plan S1PK du cadran donne sur le toit une intersection S1u parallèle à AB, un angle horaire (H) produit l'ombre S1v de l'arête S1P.

Il reste à résoudre le trièdre quelconque $S1u$, $S1P$, $S1v$ dont on connaît :c, A, B avec

$$c = \phi - \beta$$

$$\hat{A} = \hat{H}$$

$$\hat{B} = \alpha$$

L'angle d'ombre ($u \ S1 \ v$) correspondant à (a) et l'angle ($P \ S1 \ v$) correspondant à (b) se calculent par les formules précédentes.,

On arrive à des solutions assez intéressantes avec $\beta > 15$ deg. et $\alpha = 45$

à 50 deg. La surface graduée couvre toutes les longueurs d'ombres tout en restant de faibles dimensions. Les graduations horaires sont presque régulières. L'inconvénient est qu'il faut un système symétrique pour donner les heures d'après-midi. La figure montre une réalisation où $\beta = 20$ deg. et $\alpha = 45$ deg.

Remarque :

Si du point P on abaisse une perpendiculaire à la surface du toit, on résout le problème de l'ombre d'un mat planté perpendiculaire à une surface plane inclinée. Voir ce sujet traité par changement de coordonnées. (traité en partie 6)

Application au triple cadran

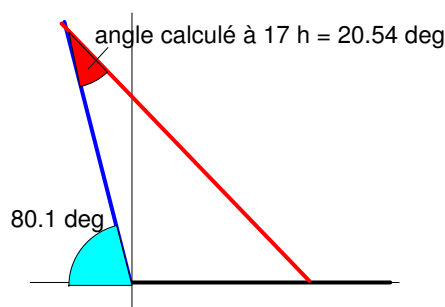
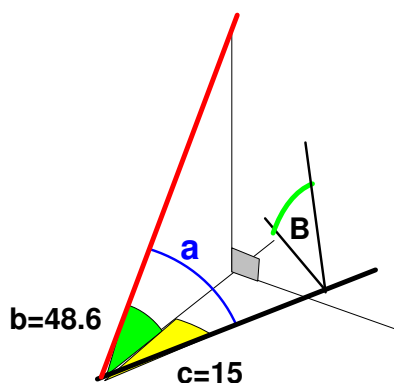
C'est un cadran polaire à projections sur 3 plans d'inclinaisons diverses et un plan support horizontal qui porte aussi un graphique horaire.

Les lignes sont calculées pour indiquer l'heure universelle d'hiver vers le Sud de Paris.

La base du cadran gauche est inclinée de 15 degrés par rapport à la direction Sud-Nord. Sa pente est choisie pour que le plan soit parallèle à l'axe du monde afin d'avoir des lignes horaires parallèles entre elles.

Le cadran central a sa base inclinée de 75 deg. et penche de 15 deg. vers le Sud (angle de pente utilisé aux calculs = 105 deg.).

Le cadran de droite est tourné vers l'Ouest. Son angle de base utilisé aux calculs est 117 deg. (27 deg. par rapport à Est-Ouest). L'inclinaison est de 70 deg.



La détermination du cadran au sol peut se faire par simples tracés. Comme le cadran du fond est en contact avec le style, il suffit de tracer les lignes qui rencontrent celles du cadran horizontal.

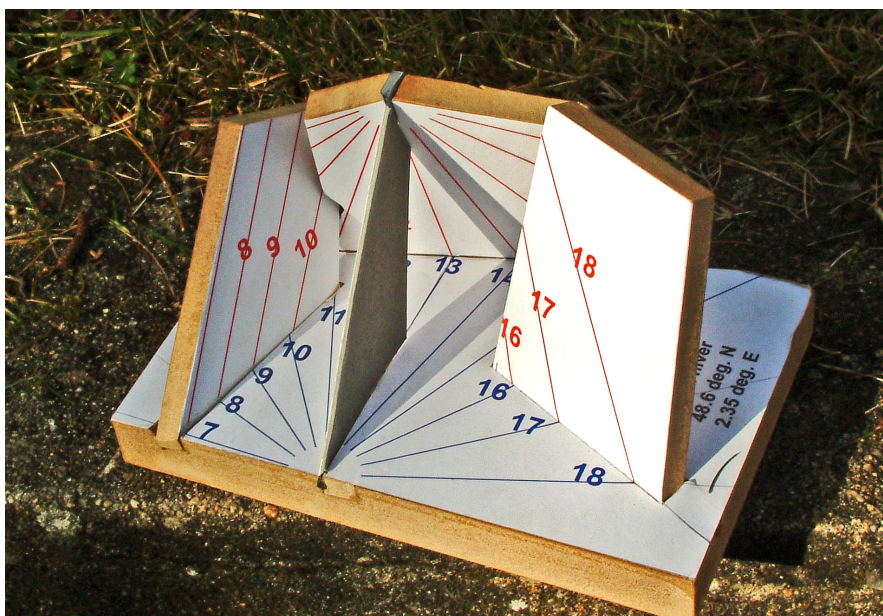
L'inclinaison du cadran gauche est calculée dans un trièdre rectangle

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c = \cos 48.6 \cdot \cos 15 = \cos 50.3$$

$$\cot B = \sin c \cdot \cot b = \frac{\sin 15}{\tan 48.6} = 0.228$$

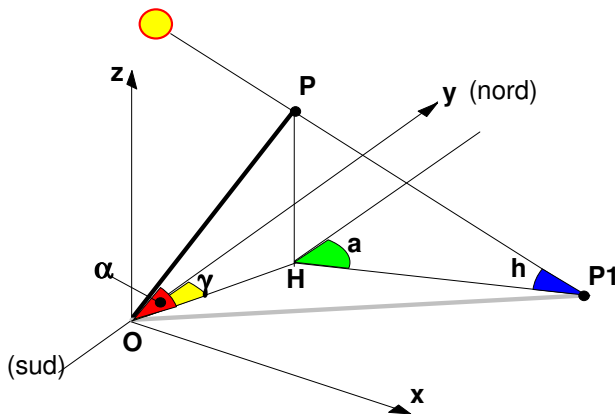
$$\arctg \frac{1}{0.228} = 77.14$$

Les lignes horaires partent du contact avec celles du cadran horizontal et sont inclinées de l'angle (a) = 50.3 deg.



Pour le cadran de droite, on connaît les départs du sol et les angles sont calculés par rapport à la trace d'un plan vertical Nord-Sud sur le plan considéré. Il faut tenir compte de l'angle de 80.1 deg. pour tracer

Tolérances de construction et de calage. Effets sur les indications



Quelle est la sensibilité des cadrans solaires aux défauts de précision d'exécution ?

Les défauts les plus probables portent sur la connaissance de la référence Nord-Sud, la position du plan vertical qui contient le style et dans ce plan son angularité par rapport à un plan horizontal.

Cela conduit d'abord à étudier l'ombre d'un segment de droite sur le plan horizontal.

Considérons un segment OP de longueur (L) dont le point O est pris comme origine d'un trièdre de référence d'axe Oy confondu avec la direction Sud-Nord.

La projection de OP sur le plan x, O, y fait un angle (γ) avec Oy et (α) est l'angle de OP par rapport au plan x, O, y

A l'heure (H) et sous une déclinaison (δ), un rayon solaire passant par P rencontre le plan horizontal en P1.

OP1 est l'ombre dont on cherche l'angle par rapport à Oy et accessoirement la longueur

$$x1 = L \cos \alpha \cos \gamma$$

Les coordonnées de P : $y1 = L \cos \alpha \sin \gamma$

$$z1 = L \sin \alpha$$

Connaissant H = angle horaire et δ = déclinaison, on a vu le calcul des angles :
a = azimut du soleil, h = hauteur du soleil par :

$$\sinh = \sin \delta \times \sin \phi + \cos \phi \times \cos \delta \times \cos H \quad \text{et} \quad \sin A = \frac{\cos \delta \times \sin H}{\cosh}$$

Les coordonnées de P1

$$\begin{aligned} x2 &= x1 + \frac{PH}{tgh} \times \sin a = x1 + z1 \times \frac{\sin a}{tgh} \\ y2 &= y1 + z1 \times \frac{\cos a}{tgh} \\ z2 &= 0 \end{aligned}$$

L'angle de l'ombre par rapport à Oy est alors : $angle_{ombre} = \arctg \frac{x2}{y2}$

et la longueur : $long_{ombre} = \sqrt{x2^2 + y2^2}$

Les calculs numériques montrent que les erreurs sur l'angle du style et son orientation doivent être inférieures à 2 degrés. L'erreur d'inclinaison du style induit un écart plus important que l'erreur de calage sur la direction Nord-Sud.

Quand l'angle, qui devrait être égal à la latitude est plus petit, le cadran horizontal avance et, retarde quand l'angle est plus grand. Cet écart est aussi plus grand en été qu'en hiver.

Les défauts géométriques du style relèvent des moyens de production mis en œuvre. Le calage sur la direction Nord-Sud est plus délicat.

Les moyens de déterminer la direction du Nord, avec plus ou moins de précision, sont décrits en partie 1.

mettre qu'il est encore valable avec 1 degré d'écart. C'est-à-dire $\frac{40000}{360} = \pm 111 km$

Cotations du style dans un cadran pseudo vertical

En général les cadrans sont construits sur des murs verticaux ou presque, qui ont toujours un écart d'orientation par rapport à la direction Est-Ouest.. Le style incliné de l'angle de latitude (ϕ) dans le plan vertical Nord-Sud doit être défini par rapport au plan du mur à partir d'une horizontale issue de son sommet A. Le calcul des

angles nécessaires est traité dans le cas général du mur de pente (γ) dont la trace sur le plan horizontal fait un angle (β) avec une droite **Est-Ouest**.

Le style AP appartient au vertical Nord-Sud qui coupe le mur suivant la droite AB. L'objectif est de calculer les angles du trièdre (AC, AP, AB)

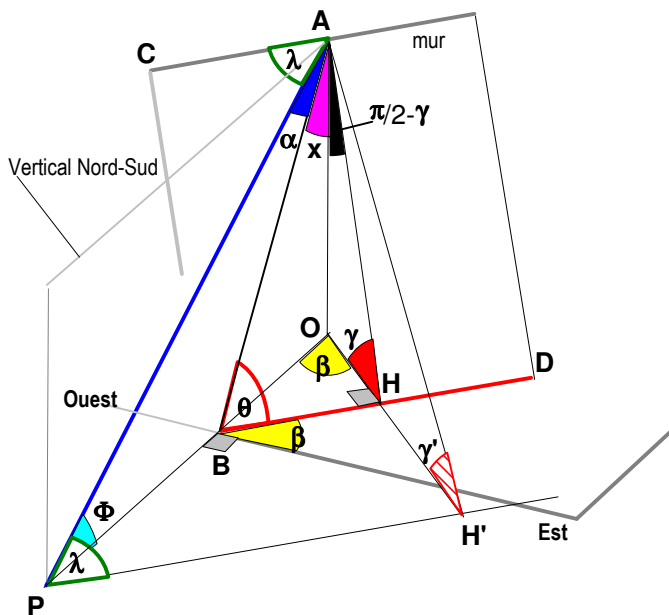
AC, BD, PH' sont parallèles et perpendiculaires au plan AOH et on écrit :

$$AO = OH \times \tan \gamma \qquad OB = \frac{OH}{\cos \beta}$$

$$tgx = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\cos \beta \times tg \gamma}$$

D'où x , puis :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi - x$$



$$OA = OP \times \tan \phi \qquad OH' = OP \times \cos \beta$$

$$tg \gamma' = \frac{OA}{OH'} = \frac{tg \phi}{\cos \beta}$$

Donc l'angle HAH' qui est l'angle entre le mur et le plan défini par le style et la droite AC horizontale du mur a pour valeur (triangle AHH') :

$$\boxed{H\hat{A}H' = \gamma - \gamma'}$$

$$AP = \frac{OA}{\sin \phi}$$

$$PH' = OP \times \sin \beta = OA \times \frac{\sin \beta}{\tan \phi}$$

$$\cos \lambda = \frac{PH'}{AP} = \frac{\sin \beta \times \sin \phi}{\operatorname{tg} \phi} = \sin \beta \times \cos \phi$$

De même :

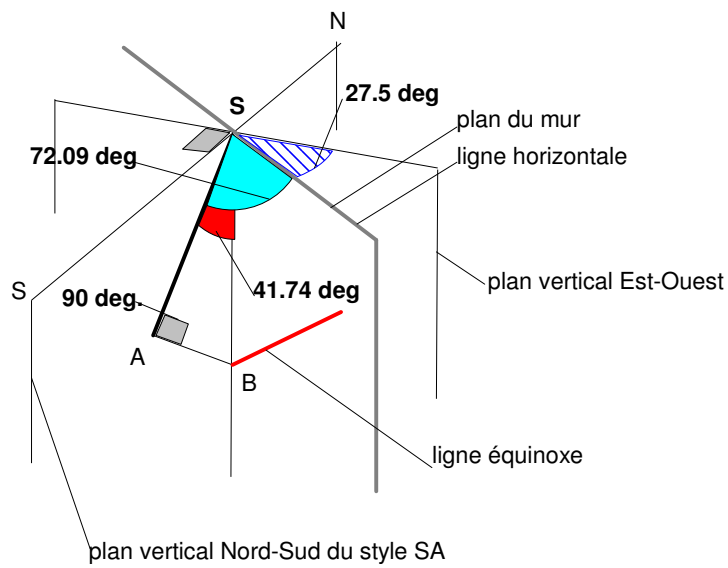
$$\cos \theta = \frac{BH}{AB} = \sin \beta \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin \beta \times \sin x$$

Les 3 valeurs encadrées permettent la cotation et la vérification géométrique du style et de son support éventuel.

Quand le mur est orienté vers l'ouest les valeurs sont identiques, mais le trièdre est symétrique par rapport au plan Nord-Sud contenant le style

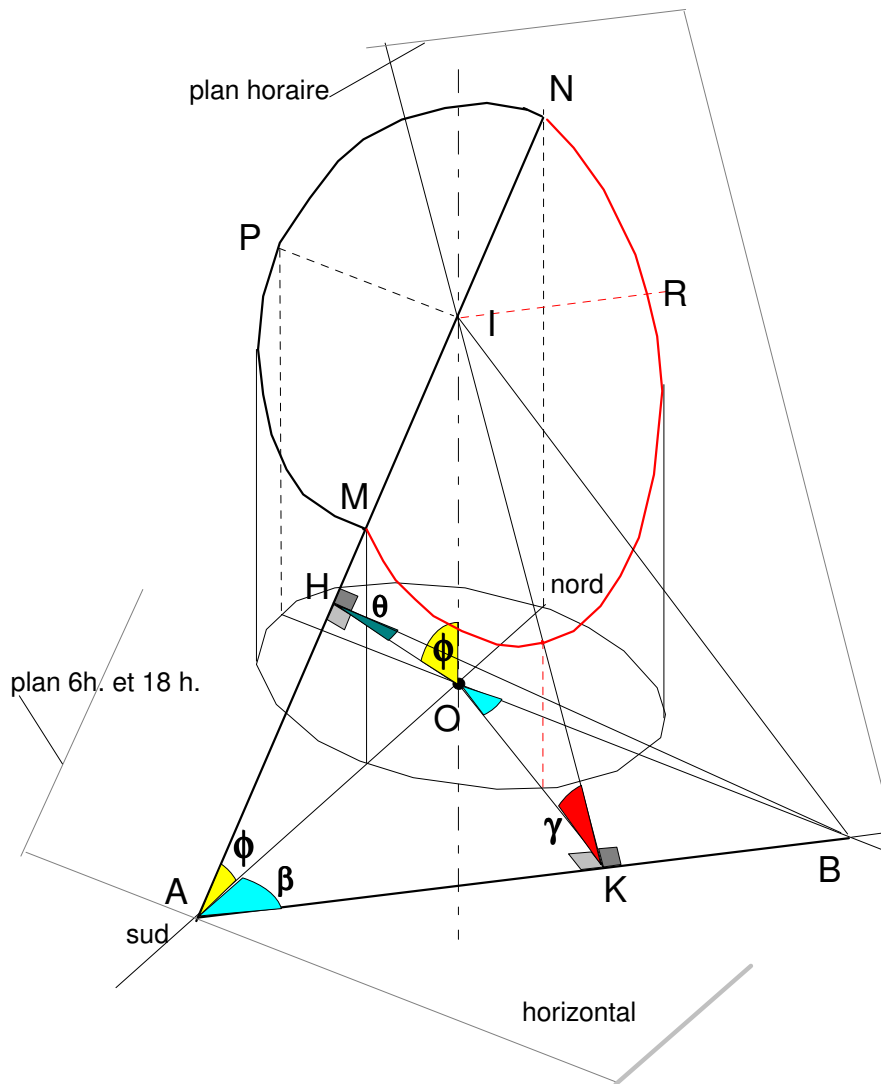
Le mur vertical est considéré comme cas particulier avec $\gamma = 90$ degrés

Exemple de cotation et contrôle d'un cadran vertical



La figure concerne un cadran sur mur vertical orienté vers l'Ouest de 27.5 deg. en un lieu de latitude 48.26 deg. Nord. Les contrôles doivent porter sur les angles de 72.09 et 41.74. La longueur du style doit être telle que la perpendiculaire AB rencontre la ligne équinoxe du graphique

PARTIE 4a Cadran solaire à fil dans un cylindre



De l'idée précédente qui conduit à s'intéresser aux sections elliptiques d'un cylindre, on arrive à l'étude d'un cadran à fil tendu (MN) dans un cylindre vertical, coupé par un plan incliné de l'angle de latitude sur le plan horizontal qui détermine la coupe elliptique MNP.

A 6 h. et à 18 h. l'intérieur du cylindre est donc entièrement dans l'ombre.

A l'heure correspondante à l'angle θ , le plan pivote autour de MN et coupe un plan horizontal suivant la droite AB qui fait un angle β avec la ligne sud-nord AO.

Ce plan horaire est incliné de l'angle γ sur le plan horizontal et détermine une ellipse MNR sur le cylindre qui est la trace de l'ombre du fil MN à l'intérieur du cylindre.

Le problème revient alors à calculer les traces des ellipses sur la développée du cylindre

A partir des angles donnés Φ et θ , on calcule β et γ

$$OH = OI \times \cos \phi$$

$$OB = OH \times \tan \theta = OI \times \cos \phi \times \tan \theta$$

$$OA = \frac{OI}{\tan \phi} \Rightarrow \Rightarrow \tan \beta = \frac{OB}{OA} = \sin \phi \times \tan \theta$$

$$OK = OA \times \sin \beta = OI \frac{\sin \beta}{\tan \phi} \Rightarrow \Rightarrow \tan \gamma = \frac{OI}{OK} = \frac{\tan \phi}{\sin \beta}$$

Comme il y a symétrie entre les heures du matin et du soir, les calculs sont à mener en faisant varier θ de 15 en 15 degrés pour couvrir de 18 h. à 12 h..

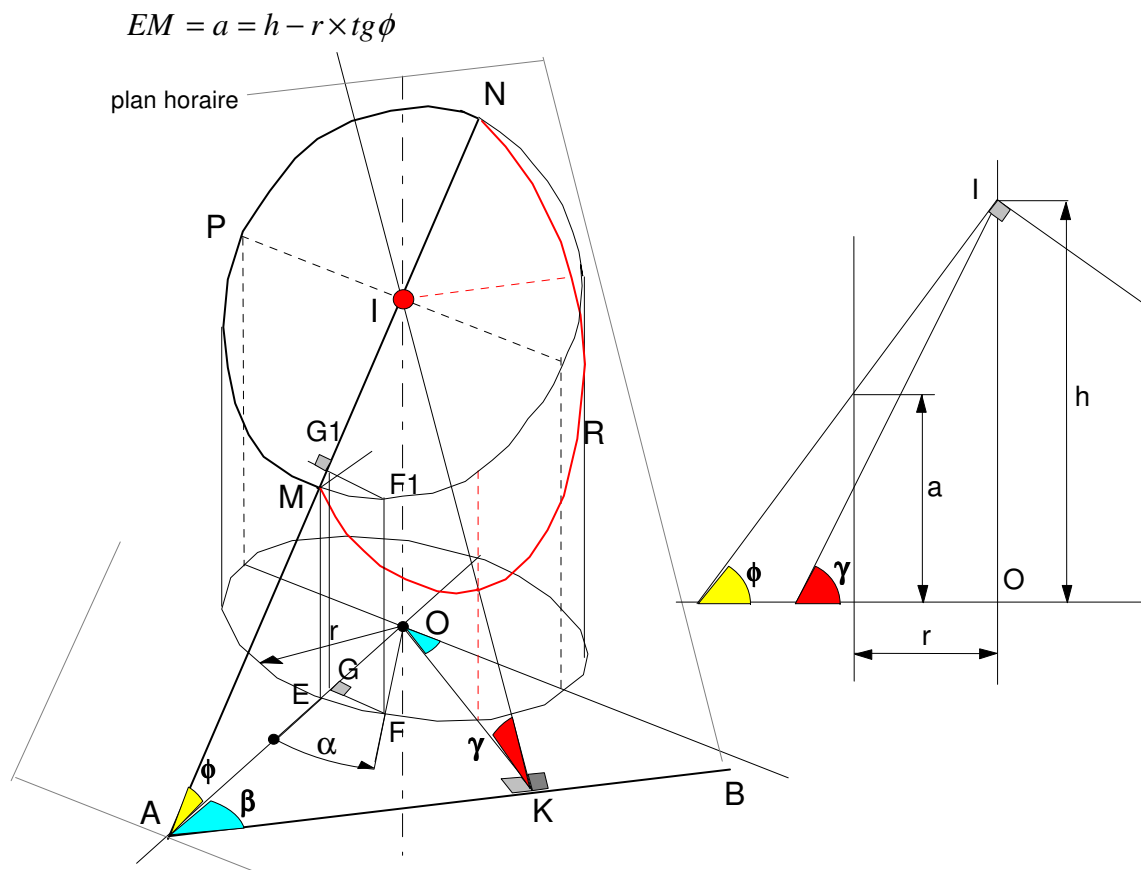
Calcul des développées des ellipses

Il faut calculer la cote FF1 en fonction de α entre 0 et 180 deg. pour obtenir la moitié de la développée

FF1 se projette en GG1 sur le plan vertical AOI et on calcule :

$$EG = r \times (1 - \cos \alpha)$$

$$FF1 = GG1 = EM + EG \times \tan \phi = EM + r \times (1 - \cos \alpha) \times \tan \phi$$



plan qui a tourné de l'angle β et dont l'inclinaison est devenue γ . L'équation de développée devient :

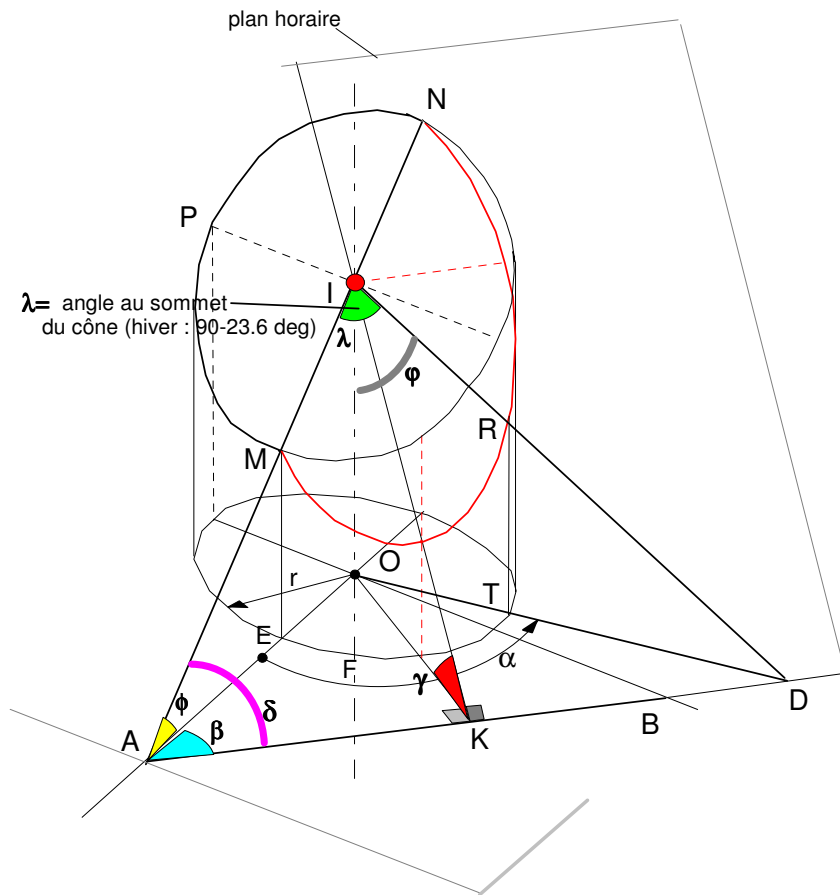
$$y_{\gamma} = h - r \times \cos(\alpha - (\frac{\pi}{2} - \beta)) \times \tan \gamma$$

Si le fil MN possède un repère sur son point I ; on obtiendra également la développée de la ligne équinoxiale qui se définit par la section d'un plan perpendiculaire à MN en I

$$y_{\text{équinoxiale}} = h - r \times (\cos(\alpha - \pi)) \times \tan(\frac{\pi}{2} - \phi)$$

Calculs des positions de déclinaisons maximales (+/- 23.6 deg.)

Il s'agit de calculer sur la développée du cylindre l'intersection d'un cône de sommet I, d'axe MN et dont l'angle au sommet varie de 90-23.6 à 90+23.6 deg.



Le plan horaire coupe le cône suivant la droite ID définie par l'angle au sommet du cône. Celle-ci rencontre l'ellipse au point R, et il s'agit de calculer l'angle α qui correspond à sa projection OD sur le plan horizontal
 Dans le triangle IAD, on connaît :

$$IA = \frac{OI}{\sin \phi} \quad IK = \frac{OI}{\sin \gamma} \quad \text{et alors l'angle } \delta \text{ par son sinus}$$

$$\sin \delta = \frac{IK}{IA} = \frac{\sin \phi}{\sin \gamma}$$

Dans le triangle IAD l'angle D se calcule par : $D = \pi - \lambda - \delta$

$$\text{Puis } \frac{ID}{\sin \delta} = \frac{IA}{\sin(\pi - \lambda - \delta)} \rightarrow ID = \frac{OI}{\sin \gamma \times \sin(\pi - \lambda - \delta)}$$

$$\text{Et : } \cos \phi = \frac{OI}{ID} = \sin \gamma \times \sin(\pi - \lambda - \delta)$$

Par trigonométrie sphérique dans le trièdre IA, ID, IO :

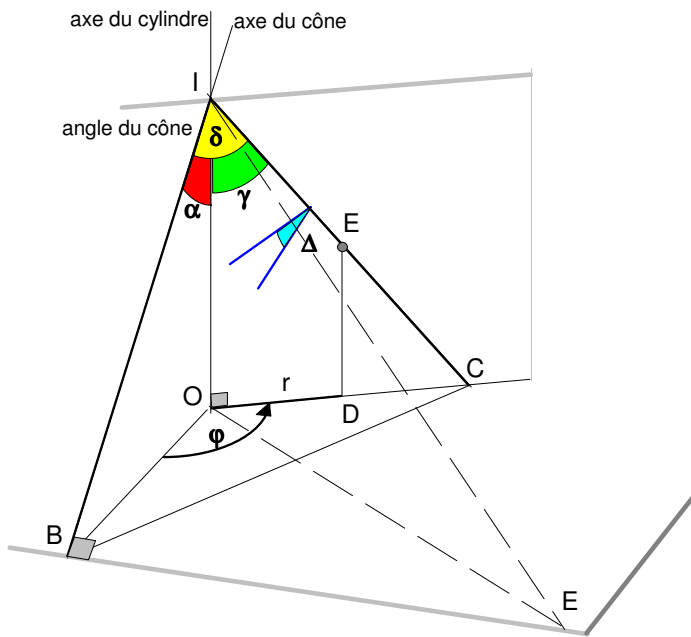
$$\frac{\sin \lambda}{\sin \alpha} = \frac{\sin \phi}{\sin(\text{angle horaire})} \rightarrow \sin \alpha = \sin(\text{angle horaire}) \times \frac{\sin \lambda}{\sin \phi} \pm (2k+1)\pi$$

$$\text{Et finalement : } TR = OI - \frac{r}{\tan \phi}$$

Intersection d'un cône et d'un cylindre à axes concourants

C'est une autre façon de trouver les limites de l'ombre du repère central (I) aux solstices.

α est l'angle entre l'axe du cône et celui du cylindre (dont l'axe est vertical)
 δ est l'angle au sommet du cône (entre axe et génératrice)
 φ est l'angle de rotation d'un plan vertical qui découpe cône et cylindre
 r est le rayon du cylindre



Connaissant les angles δ , α , φ , il faut calculer l'angle γ

Par trigonométrie sphérique dans le trièdre IB, IO, IC on calcule l'angle

$$\Delta \text{ par : } \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} = \frac{\sin \alpha}{\sin \Delta}$$

La résolution du triangle sphérique de sommet I (cas n° VI, Bouvard & Ratinet) donne :

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta - \alpha}{2} \times \sin \frac{\varphi + \Delta}{2}}{\sin \frac{\varphi - \Delta}{2}}$$

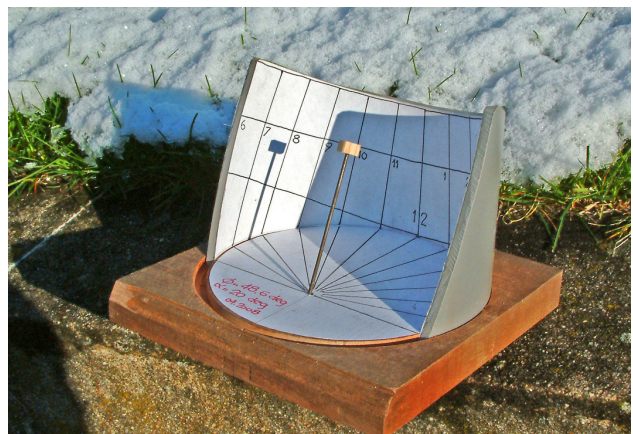
D'où : $\pm \gamma + k\pi$

$$\text{Et : } DE = OI - \frac{r}{\operatorname{tg} \gamma}$$

L'angle φ doit partir d'une valeur minimale correspondant à 18 heures quand BE est perpendiculaire à OB. A ce moment :

$$BE = BI \times \operatorname{tg} \delta = \frac{OI}{\cos \alpha} \times \operatorname{tg} \delta,$$

$$\text{et } \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{BE}{BO} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \alpha}$$



Cadran analemmatique

Ainsi nommé parce qu'il résulte de la théorie des analemmes dont l'ambition, grâce à des projections orthographiques, est de représenter la sphère céleste sur un plan.

Il utilise donc un style droit vertical, de longueur quelconque. Comme il est connu qu'à une heure déterminée son ombre sur le sol change d'orientation au cours de l'année, une solution originale a été trouvée au XVI^{ème} siècle.

Elle consiste à déplacer le style sur une partie de la ligne nord-sud pour qu'à une heure déterminée son ombre passe toujours par un même point. Il suffit ensuite de trouver le lieu géométrique de ces points pour les heures de 4 à 12 (les heures de 12 à 20 ayant des positions symétriques).

Il faut donc donner au style une position précise qui dépend du moment de l'observation en cours d'année. Ceci n'étant guère facile, ces cadrans sont toujours inscrits sur le sol pour avoir une dimension suffisante et en général, c'est l'observateur qui sert de style en se tenant à l'endroit indiqué suivant la date du jour.

Théorie :

On considère un cercle horaire de rayon (R) dans le plan équinoxial qu'on projette sur un plan horizontal. La figure obtenue est une ellipse de grand axe $2R$ et de petit axe $2R \times \sin \phi$ avec ϕ = angle de latitude.

Quand le soleil est dans le plan équinoxial, à l'angle horaire θ correspond le rayon IP qui se projette suivant OP' et on calcule les coordonnées du point P' :

$$y = ON' = IN \times \sin \phi = IP \times \cos \theta \times \sin \phi = R \times \cos \theta \times \sin \phi$$
$$x = P'N' = PN = R \times \sin \theta$$

IL est donc facile de tracer l'ellipse et de la graduer (1 heure=15 degrés)

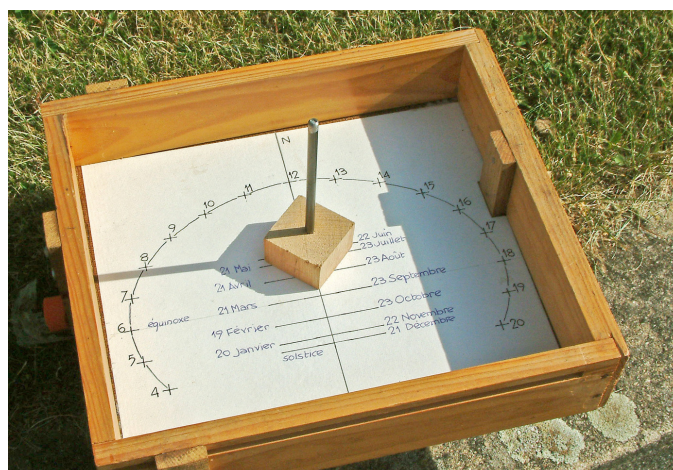
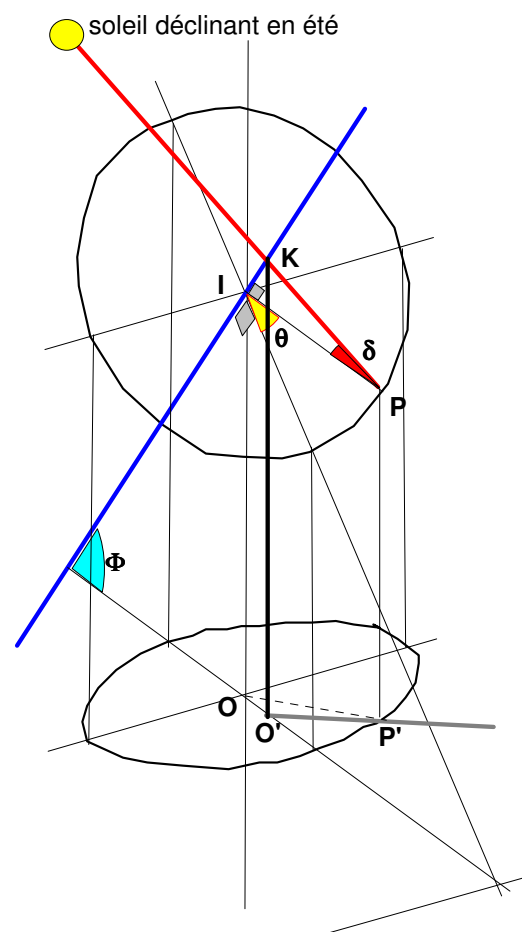
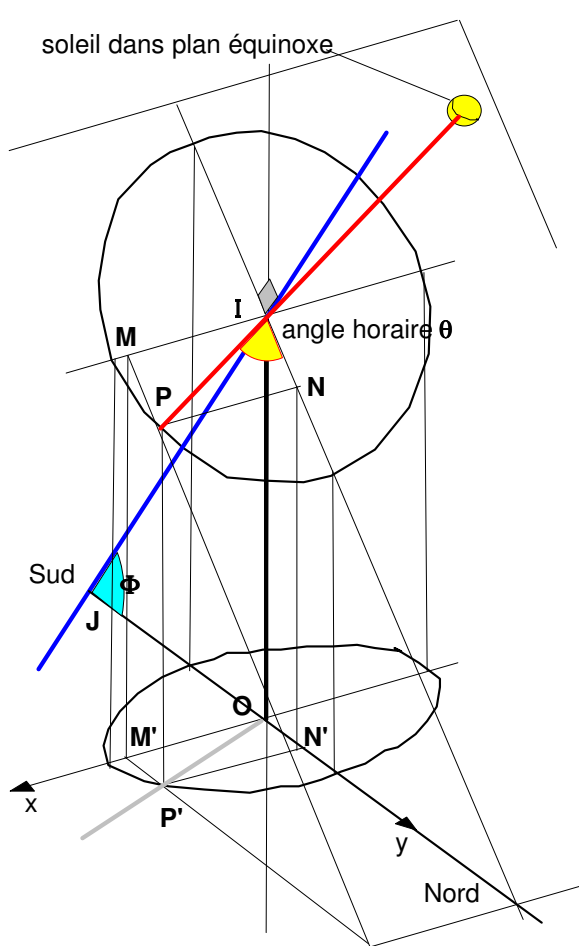
A l'équinoxe le style IO est placé au centre de l'ellipse et lorsque le soleil a une déclinaison δ le style doit être placé en O'

Pour calculer OO' on considère le rayon PK du soleil dans le plan de l'angle horaire θ avec une déclinaison d'angle δ

Le point K se projette en O' et on calcule le déplacement OO' correspondant à la déclinaison δ connue chaque jour de l'année avec des maxima de ± 23.4 degrés aux solstices.

$$OO' = IK \times \cos \phi = IP \times \tan \delta \times \cos \phi = R \times \cos \phi \times \tan \delta$$

En été O' est côté nord et en hiver symétriquement côté sud. Le segment OO' est gradué en dates.

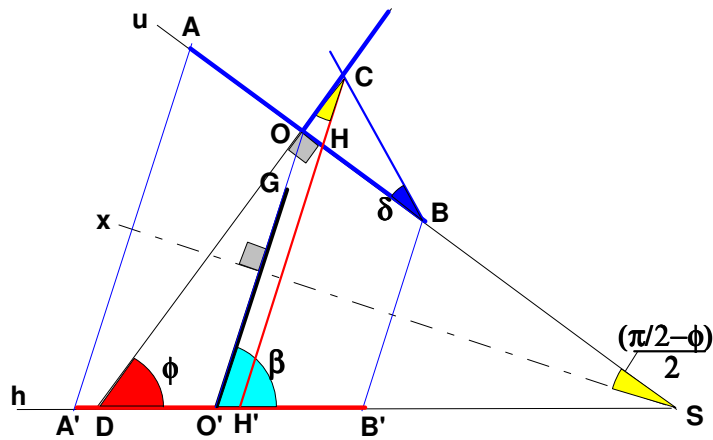


Cadran analemme généralisé. Cas particulier du cadran circulaire

Ce type de cadran a pour principe la projection d'un cercle horaire, dessiné dans le plan équinox, suivant une direction linéaire contenue dans le plan vertical Nord-Sud. La projection peut se faire sur un plan quelconque pourvu qu'il soit perpendiculaire à ce plan vertical Nord-Sud. On obtient en général une ellipse dont le centre correspond à celui du cercle horaire. Si on place au centre de l'ellipse un gnomon parallèle à la direction de projection son ombre passe par le point correspondant à l'angle horaire considéré. Pour que cette propriété se conserve à

toutes les déclinaisons il faut déplacer à chaque fois le pied du gnomon sur la ligne Nord-Sud du cadran.

Considérons maintenant le dièdre constitué par le plan équinoxe et le plan de projection. Si on choisit une direction de projection perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre, le cercle horaire se projettera suivant un cercle identique.



La figure correspond aux tracés dans le plan vertical dans le cas particulier où la projection se fait sur le plan horizontal.

Sh est la trace de ce plan horizontal, Su celle du plan équinoxe, Sx celle du bissecteur qui est un axe de symétrie de la figure.

DO incliné de l'angle de latitude permet de calculer l'angle en S

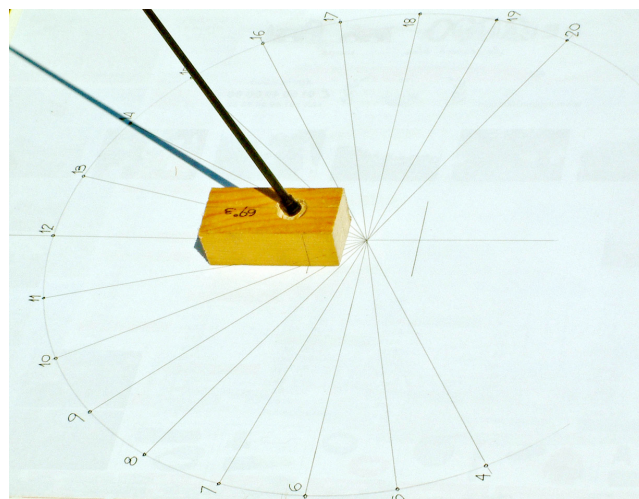
$$AngleS = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$

L'angle β de projection et d'inclinaison du gnomon est : $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} = \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}$

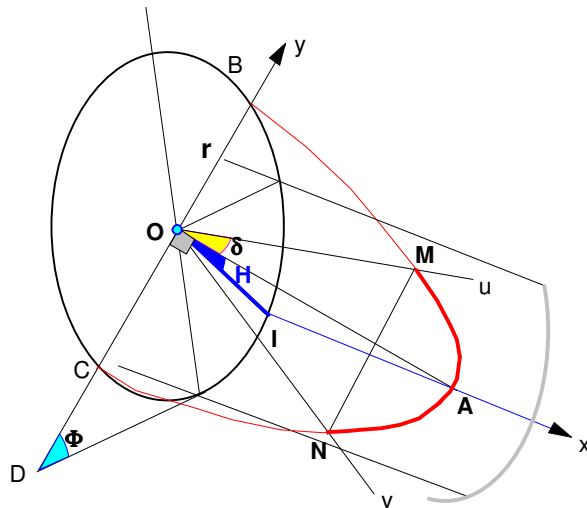
Quand la déclinaison devient δ il faut avancer le pied du gnomon de O' en H'' et on calcule :

$$O'H' = OH = OC \times \tan \delta = R \times \tan \delta \times \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)$$

Ce cadran est facile à graduer avec précision mais le réglage et le guidage du style restent un inconvénient sérieux



Cadran dans un cylindre horizontal



On peut imaginer une solution très simple avec une portion de cylindre horizontal Est-Ouest.

Dans un plan vertical Nord-Sud le cercle de rayon (r) porte un diamètre BC incliné de l'angle de latitude par rapport à l'horizontale. Le rayon OI perpendiculaire à BC correspond au plan équinoxe. Le plan horaire défini par l'angle (H) pivote autour de BC et détermine une section elliptique BCA sur le cylindre.. En utilisant comme style le barreau IO , l'extrémité de son ombre décrit des portions d'ellipses dont la partie utile est définie par les angles δ de déclinaisons (qui génèrent des cônes opposés d'axe BC)

L'ellipse est entièrement définie dans le plan horaire et il suffit de calculer le développé de sa branche MAN sur la surface du cylindre.

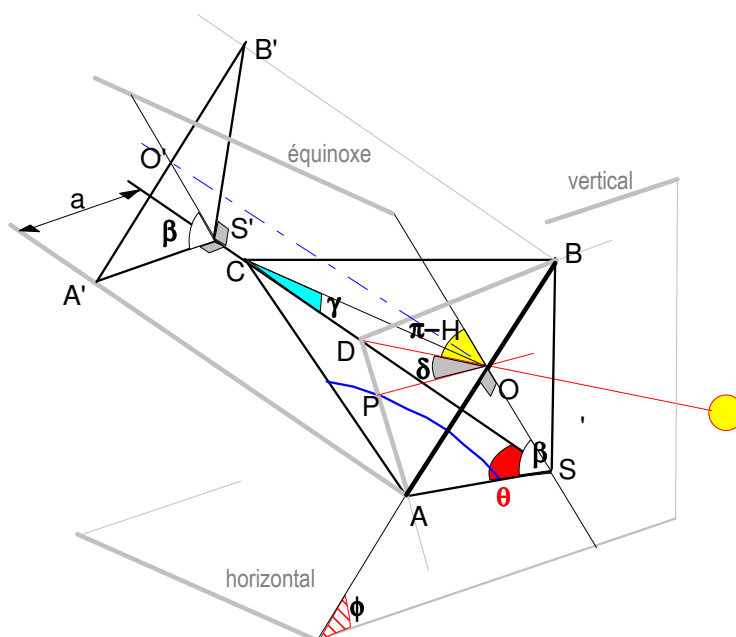
Pour éviter l'encombrement latéral d'un tel cadran, on peut incliner le cylindre en gardant son axe dans le plan perpendiculaire à BC et finalement envisager une surface torique dont la section par un plan parallèle à son axe peut s'étudier assez facilement.

Cependant le tore n'étant pas développable il faudrait utiliser des gabarits pour tracer les lignes horaires

Cependant le tore n'étant pas développable il faudrait utiliser des gabarits pour tracer les lignes horaires. On se trouve alors naturellement conduit au cadran en V , plus simple à calculer, tracer et réaliser

On utilise une sorte de cornière à ailes symétriques de section droite $A'B'S'$ dont le plan de symétrie est confondu avec un plan équinoxe, donc perpendiculaire au style AB , incliné de l'angle de latitude sur le plan horizontal.

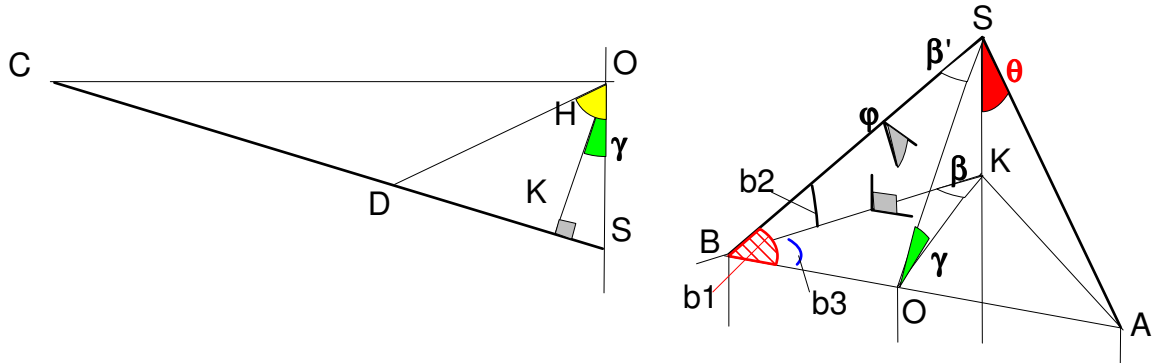
L'arête SS' de ce dièdre est inclinée d'un angle (γ) par rapport à l'horizontale. La figure montre un côté Ouest avec le soleil dans le plan équinoxe. Le côté Est est identique et symétrique par rapport au plan vertical Nord-Sud.



Les plans horaires pivotent autour de AB en donnant l'ombre ADB .

A 6 heures celle-ci atteint ABC qui représente ainsi la partie utile du cadran. Dans chaque plan horaire la déclinaison (δ) définit le point P qui correspond au point central du style et dont le lieu géométrique représente la limite des graduations à répéter sur les faces des dièdres.

Calcul de β' : Résolution du trièdre rectangle de sommet B ;



$$\text{On a } \operatorname{tg} b_1 = \frac{\operatorname{tg} b_3}{\cos \gamma} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta \times \cos \gamma} \quad \beta' = \frac{\pi}{2} - b_1$$

$$\text{Calcul de } \theta : \operatorname{tg} b_2 = \sin b_3 \times \operatorname{tg} \gamma = \cos \beta \times \operatorname{tg} \gamma \quad \theta = \frac{\pi}{2} - b_2$$

$$\text{Calcul de } \varphi : \cos \varphi = \cos b_3 \times \sin \gamma$$

$$\text{Calcul de AS : } AS = \frac{a}{\sin \theta}$$

Calculs de OS, OC et CS:

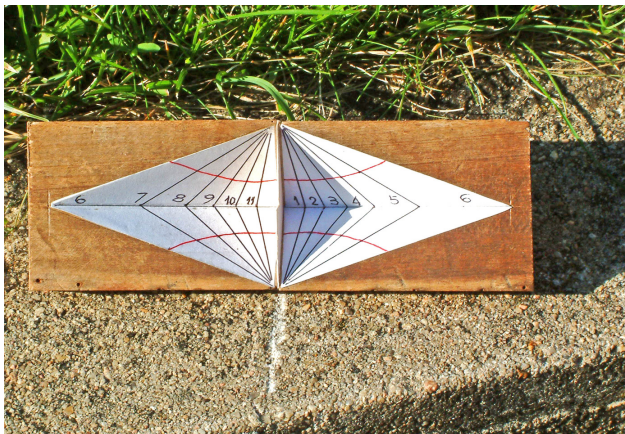
$$OS = \frac{OK}{\cos \gamma} = a \times \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \rightarrow OC = a \times \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} \rightarrow CS = \frac{OC}{\cos \gamma}$$

$$\text{Calcul de OD : } \frac{OD}{\sin(\frac{\pi}{2} - \gamma)} = \frac{OS}{\sin(\frac{\pi}{2} - H + \gamma)} \rightarrow OD = \frac{OS \times \cos \gamma}{\cos(H - \gamma)}$$

$$\text{Calcul de SD : } \frac{SD}{\sin H} = \frac{OS}{\sin(\frac{\pi}{2} - H + \gamma)} \rightarrow SD = \frac{OS \times \sin H}{\cos(H - \gamma)}$$

Le triangle CSA est défini par CS, AS et l'angle θ et la ligne horaire AD correspondante à H se trace par la longueur SD.

Le triangle ADO est rectangle en O, l'angle en D est connu par :



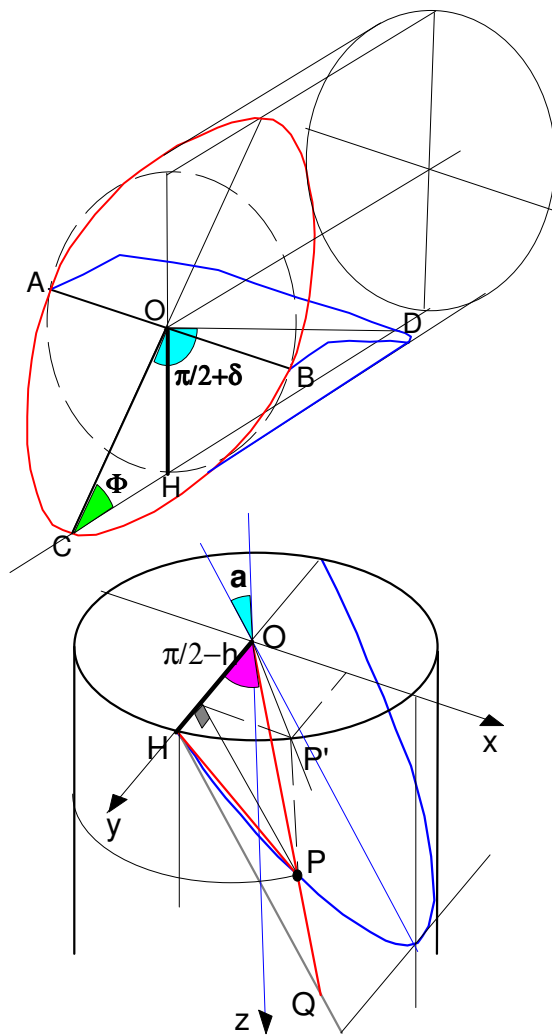
$$\operatorname{tg} D = \frac{OA}{OD} = \frac{a \times \sin \beta}{a \times \cos \beta} \times \cos(H - \gamma) = \operatorname{tg} \beta \times \cos(H - \gamma)$$

qui permet de calculer DP par

$$\frac{DP}{\sin \delta} = \frac{OD}{\sin(\pi - \hat{D} - \delta)} \text{ pour situer le point P}$$

Exemple de solution : $\beta = 45 \text{ deg.}$ (V à 90 deg.)
et $\gamma = 22 \text{ deg.}$

Cadran dans un cylindre horizontal orienté Nord-Sud



Dans un cylindre d'axe horizontal et orienté Nord-Sud, on considère un diamètre AB dont le centre O est relié par un style ou un fil à un point C tel que l'angle en C soit égal à l'angle de latitude.

La rotation du plan horaire autour de OC coupe le cylindre selon des ellipses qui sont les ombres de OC indicatrices de l'heure.

La longueur d'ombre maximale correspond à la déclinaison d'hiver qui définit le point D par

$$\text{l'angle } COD = \frac{\pi}{2} + 23.4$$

La partie utile graduée du cylindre est donc limitée par le plan ABD et par le plan ABC

En observant la silhouette entière du cylindre, on observe la similitude avec la figure du cadran à fil dans un cylindre vertical (voir première page de cette partie). On peut donc reprendre la même méthode de calculs en remplaçant l'angle

de latitude par son complément $\frac{\pi}{2} - \phi$

Le problème peut aussi se traiter par les azimuts et hauteurs solaires. Dans la figure ci-contre OH est vertical, P est l'ombre du point O sous un rayon solaire d'azimut (a) et de hauteur (h). L'objectif est de déterminer les coordonnées du point P sur la développée du cylindre.

Avec le trièdre de référence Ox, Oy, Oz, on sait que tout point du cylindre est lié par la relation :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Tout point du plan incliné de l'angle (a) donne :

$$x = z \times \operatorname{tga}$$

Tout point de la droite OP donne : $\frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \operatorname{tgh}$

$$\text{D'où : } y^2 = (x^2 + z^2) \times \operatorname{tgh}^2 = z^2 \times (1 + \operatorname{tga}^2) \times \operatorname{tgh}^2$$

$$\text{En remplaçant : } z^2 \times \operatorname{tga}^2 + z^2 \times (1 + \operatorname{tga}^2) \times \operatorname{tgh}^2$$

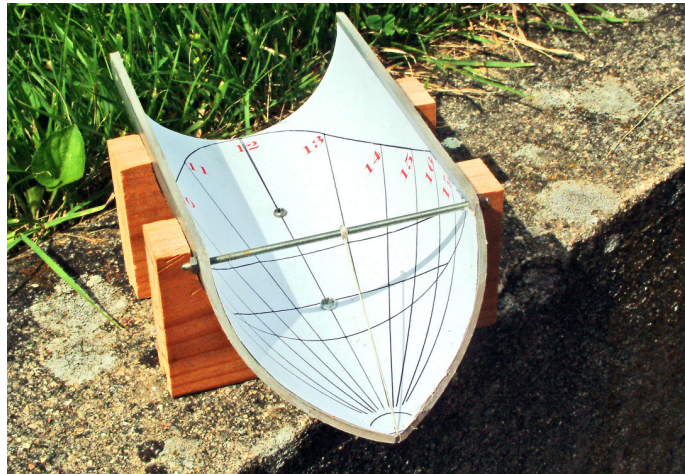
$$\text{Finalement } z = \frac{R}{\sqrt{\operatorname{tga}^2 + (1 + \operatorname{tga}^2) \times \operatorname{tgh}^2}}$$

Qui permet d'avoir :

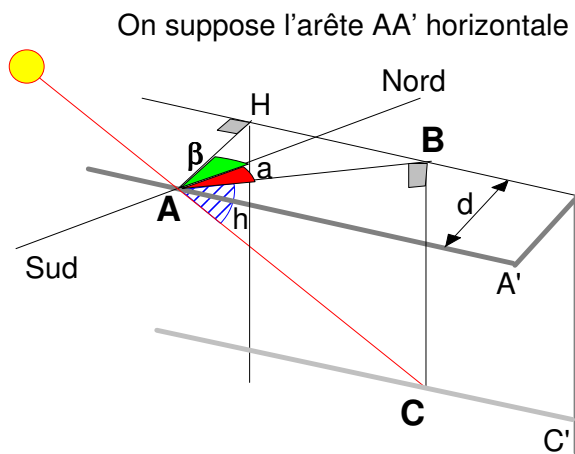
$$x = z \times \operatorname{tga} \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

L'ellipse se trace par points sur la développée du cylindre avec :

$$PP' = z, \quad \text{et l'arc } HP' \quad \operatorname{arc} HP' = R \times \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$



Hauteur d'ombre portée par un encorbellement sur un mur vertical

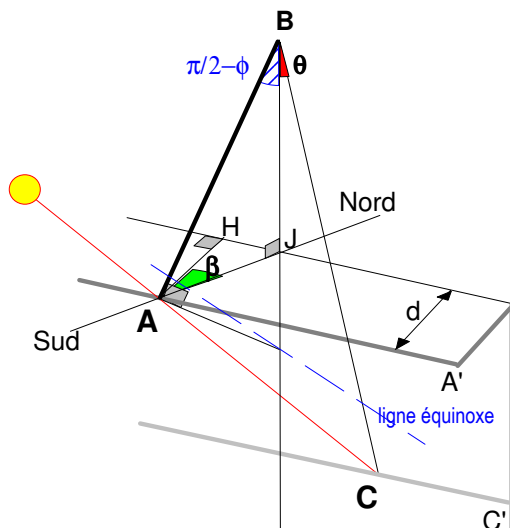


On suppose l'arête AA' horizontale et parallèle au mur dont elle est distante de (d)

L'orientation du mur par rapport à un plan Nord-Sud est définie par 'angle β .

Si on sait calculer les hauteurs et azimuth du soleil il est facile d'obtenir la valeur de BC qui représente la limite de l'ombre portée.

$$BC = AB \times tgh = \frac{d \times tgh}{\cos(a \pm \beta)}$$



Si on sait tracer le graphique d'un cadran vertical sur un mur d'orientation β avec un style de longueur (l), il suffit de calculer un coefficient de proportionnalité pour déduire la position de n'importe quel point C réel

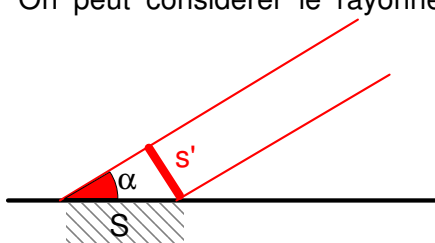
$$AB = \frac{AJ}{\sin(\frac{\pi}{2} - \phi)} = \frac{d}{\cos \phi \times \cos \beta}$$

Coefficient de transformation :

$$k = \frac{AB}{l} = \frac{d}{l} \times \frac{1}{\cos \phi \times \cos \beta}$$

PARTIE 4b Densité de flux sur une surface plane ensoleillée

On peut considérer le rayonnement solaire comme un faisceau homogène de rayons parallèles. En faisant abstraction de la nébulosité et de l'épaisseur variable de l'atmosphère traversée, son efficacité par unité de surface est alors affectée d'un coefficient égal au sinus de l'angle d'incidence.

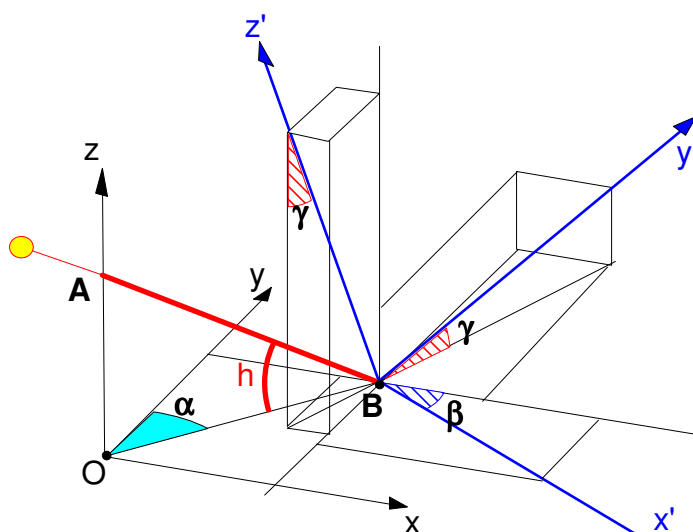


$$s' = S \times \sin \alpha$$

L'étude théorique suivante présente un certain intérêt pour apprécier l'énergie solaire reçue par un mur ou une toiture.

On se donne la situation où le soleil est observé d'un point B avec un azimut (α) par rapport à la ligne Nord-Sud et un angle de hauteur (h) et le trièdre de coordonnées (O, x, y, z) est gradué pour que la longueur du segment AB soit égale à l'unité.

Le plan soumis au rayonnement est défini par l'angle (β) de sa trace Bx' sur le plan horizontal (x, O, y) et par l'angle de pente (γ) par rapport à ce même plan.



Pour atteindre l'angle d'incidence du rayon AB sur ce plan on considère le trièdre (B, x', y', z') et il suffit de calculer par un changement de coordonnées la projection du vecteur unitaire BA sur l'axe Bz' de ce nouveau système.

Les coordonnées du point A dans le trièdre (O, x, y, z) sont l, m, n (cosinus directeurs de AB vecteur

unitaire)

Sur Ox : $l = OB \times \sin \alpha = AB \times \cosh \times \sin \alpha = \sin \alpha \times \cosh$

Sur Oy : $m = \cos \alpha \times \cosh$

Sur Oz : $n = \sinh$

Dans le même système, les coordonnées du point B sont :

$$x_B = \sin \alpha \times \cosh, \quad y_B = \cos \alpha \times \cosh, \quad z_B = 0$$

On calcule ensuite les cosinus directeurs des nouveaux axes Bx', By', Bz' dans le système (O, x, y, z)

	Ox ($\alpha, \alpha', \alpha''$)	Oy (β, β', β'')	Oz ($\gamma, \gamma', \gamma''$)
Bx'	$\cos \beta$	$-\sin \beta$	0
By'	$\cos \gamma \times \sin \beta$	$\cos \gamma \times \cos \beta$	$\sin \gamma$
Bz'	$-\sin \gamma \times \sin \beta$	$-\sin \gamma \times \cos \beta$	$\cos \gamma$

Il reste à appliquer la formule qui donne les coordonnées nouvelles en fonction des coordonnées de l'origine et des cosinus directeurs des axes,
(pour mémoire de la forme $x' = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0)$

$$y' = \alpha'(x - x_0) + \beta'(y - y_0) + \gamma'(z - z_0) \quad \text{etc.,})$$

La seule ordonnée du point A sur Bz' nous intéresse pour donner immédiatement le sinus de l'angle de AB projeté sur le plan (B, x', y')

$$y'_A = -\sin \gamma \times \sin \beta \times (\cosh \times \sin \alpha - 0) - \sin \gamma \times \cos \beta \times (\cosh \times \cos \alpha - 0) + \cos \gamma \times (\sinh - 0)$$

$$y'_A = \cos \gamma \times \sinh - \sin \gamma \times \cosh \times (\sin \beta \times \sin \alpha - \cos \beta \times \cos \alpha)$$

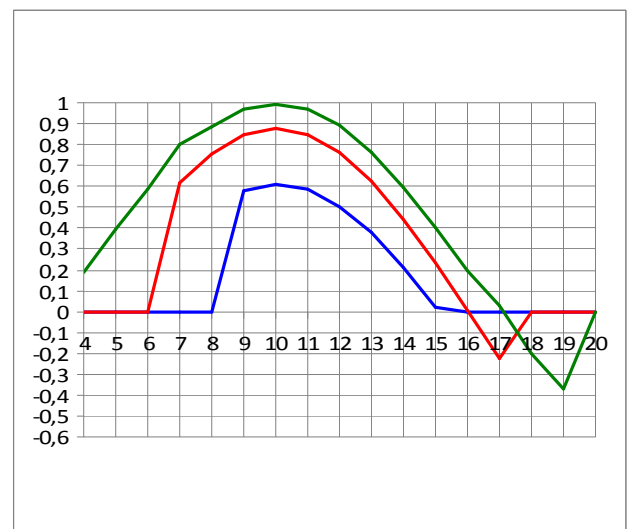
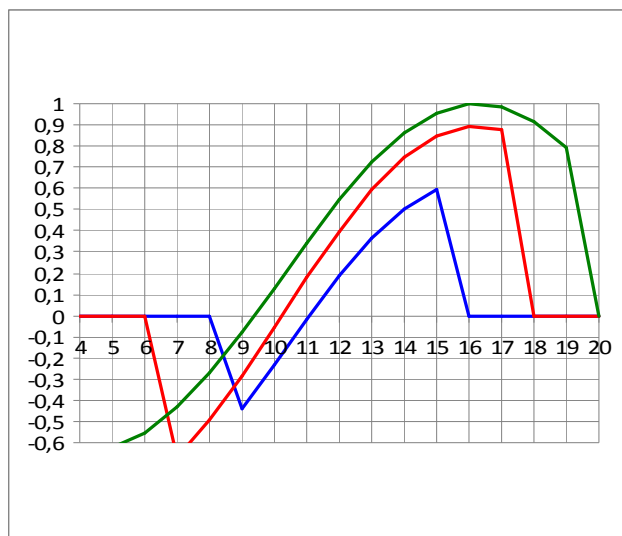
Les calculs donnent des valeurs entre 0 et 1 (valeur atteinte, au moment de l'équinoxe, à midi, sur un toit Est-Ouest, de pente égale à la latitude locale)

Quand $\beta = 0$ la courbe de 6 h. à 18 h. est symétrique par rapport à midi

Quand $\beta > 0$ (tourné vers l'est) le maximum a lieu vers 10/11 heures et symétriquement vers 13/14 h. quand $\beta < 0$. Il paraît donc un peu plus avantageux de se tourner vers l'ouest (jusqu'à 30 deg. !)

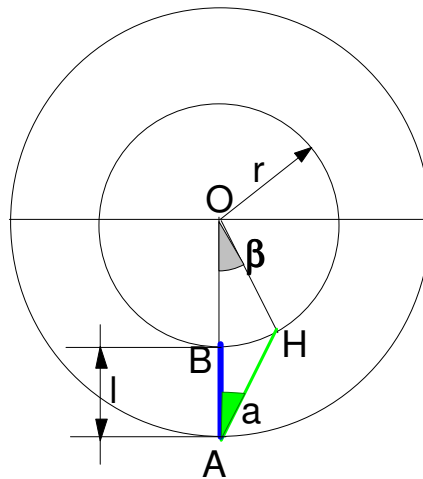
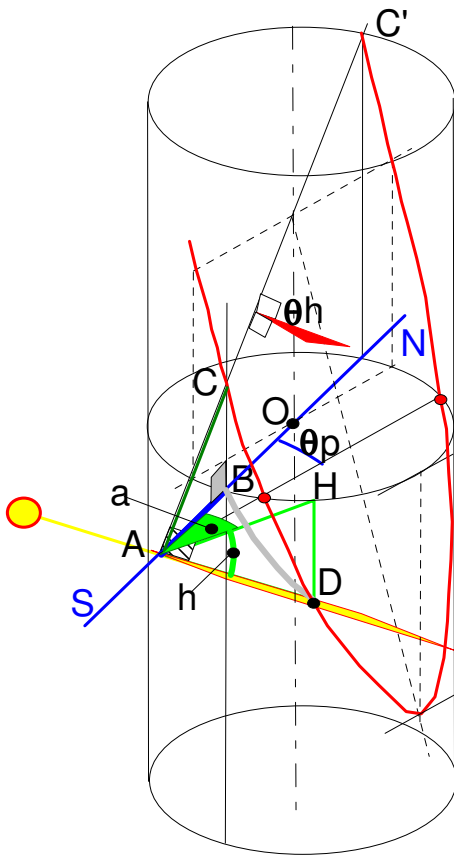
Le graphique de gauche montre un calcul pour un toit de pente à 53 degrés et orienté exactement vers l'Ouest. La courbe bleue correspond au solstice d'hiver, la rouge aux équinoxes et la verte au solstice d'été. Les valeurs négatives indiquent l'absence d'ensoleillement.

Le graphique de droite est celui d'un toit à faible pente (30 degrés) orienté à 60 degrés vers l'Est



Ombre d'un clou sur un arbre

On considère un cylindre vertical de rayon (r) coupé par un plan horizontal qui



contient le segment AB de longueur (l) passant par le centre O. AB est placé dans le plan Nord-Sud et on se propose d'étudier les positions de l'ombre D de l'extrémité A.

La droite ACC' appartient au plan vertical Nord-Sud et forme avec AB un angle égal à la latitude.

Les plans horaires tournent autour de CC' et déterminent des sections elliptiques ayant C et C' comme points communs.

A un angle horaire (θ_h) correspond sur le plan horizontal un angle (θ_p). Si on admet le soleil en position d'équinoxe, le plan perpendiculaire à AC

coupe le cylindre suivant une ellipse dont le point d'intersection en D avec l'ellipse du plan horaire représente l'ombre du point B à l'équinoxe et à l'heure correspondante à l'angle θ_h

En périodes de déclinaisons le soleil décrit des cônes de sommet A qui coupent l'ellipse horaire en de points situés de part et d'autre du point D

Quand on projette le point D en H sur le plan horizontal, l'angle BAH est l'angle d'azimut (a) et l'angle HAD est l'angle de hauteur du soleil. Il suffit de calculer l'arc BH et la longueur HD pour tracer, par points, les lignes horaires sur la développée du cylindre. .Celles-ci devront converger sur un point C qui est le pied du style virtuel AC

Résolution du triangle OAH :

On définit la longueur (l) par un paramètre (k) tel que : $l = k \times r$

$$\sin \hat{H} = (k + 1) * \sin a \quad \text{et : } \beta = \pi - a - \hat{H}$$

$$\text{Connaissant } \beta \quad \frac{r}{\sin a} = \frac{AH}{\sin \beta} \Rightarrow AH = r \times \frac{\sin \beta}{\sin a} \Rightarrow HD = AH \times \tan h$$

$$\text{Arc BH : } \widehat{arcBH} = r \times \beta$$

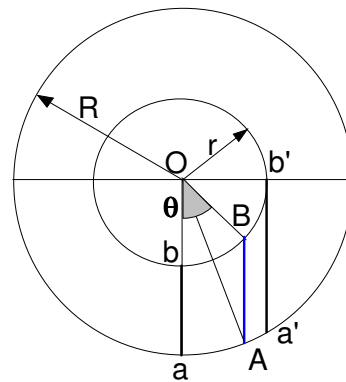
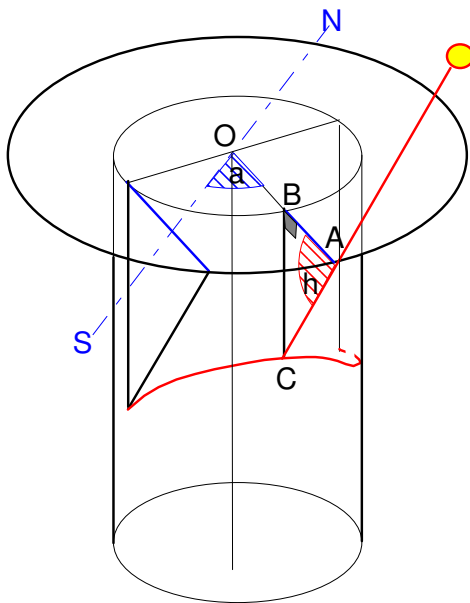
La partie dans l'ombre du cylindre limite le tracé quand l'angle H est égal à $\pi/2$ où l'on a : $\sin a = \frac{1}{1+k}$. Le meilleur compromis correspond à $k = 0.225$ pour la latitude 48.6 deg.

On peut aussi s'interroger sur ce qu'indique l'ombre du clou quand on le tourne à toute les heure en direction du soleil. Le cas suivant présente une relative analogie.

Cadran à colonne verticale

Ce type de cadran dit aussi cadran à chapeau ou même « tuyau de poêle » a été révélé par J. MOLLET en 1837 dans son ouvrage de Gnomonique graphique.

Un cylindre vertical de rayon (r) est coiffé par une plaque circulaire concentrique de rayon (R) dont la courbe d'ombre sur le cylindre possède des propriétés géométriques qui permettent d'apprécier l'heure.



Dans une position du soleil d'azimut (a) et de hauteur (h) la moitié du cylindre est éclairée et il se crée une ombre symétrique dont le sommet C caractérise l'heure à la date correspondante à (a) et (h).

Il suffit de calculer le lieu géométrique du point C pour les heures de 6 à 12 heures pour au moins 3 déclinaisons

Les heures d'après-midi sont symétriques.

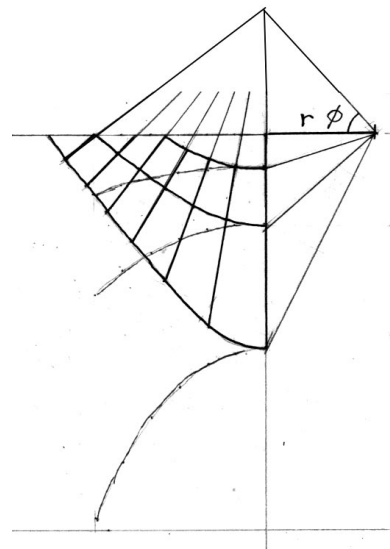
La longueur AB évolue de ab à $a'b'$. Si on veut déterminer la courbe de l'ombre, il faut résoudre le triangle AOB pour avoir AB puis $BC = AB \times tgh$

$$\frac{OA}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{OB}{\sin \hat{A}}$$

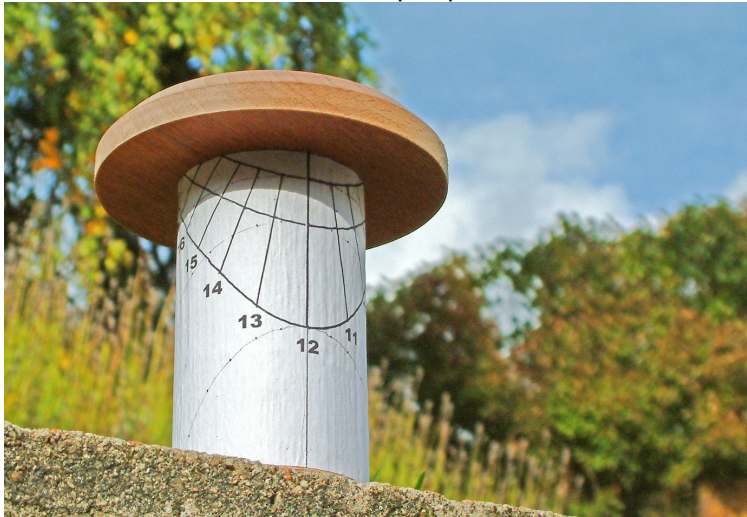
$$\hat{A} = \arcsin\left(\frac{r}{R} \times \sin(\pi - \theta)\right)$$

$$\text{Angle en } O : \hat{O} = \theta - \hat{A}$$

$$\frac{AB}{\sin \hat{O}} = \frac{R}{\sin(\pi - \theta)}$$



Les courbes calculées par points se tracent sur la développée du cylindre.

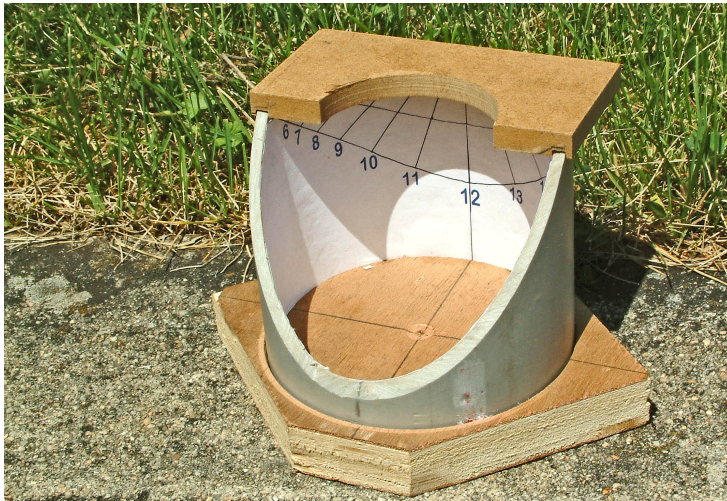


Ce sont des droites qui convergent sur le pied d'un cadran vertical construit sur un plan tangent dont la pointe du style serait sur le bord du rayon R . Ce qui est évident à midi mais ne donne pas de solution graphique pour tracer les lignes horaires

Avec le même principe on peut étudier l'ombre d'un rebord intérieur sur une surface cylindrique concave et on arrive à des courbes similaires.

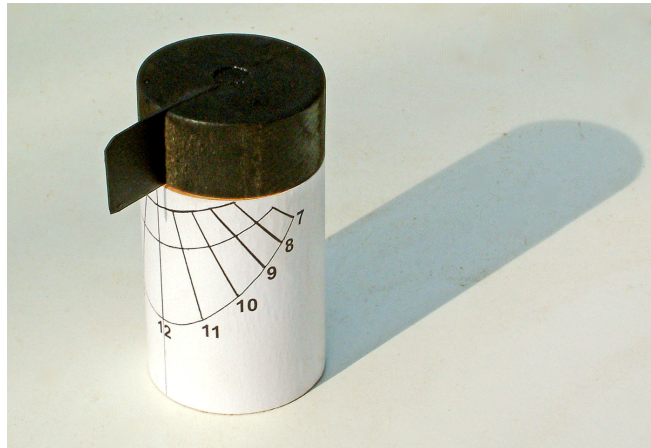
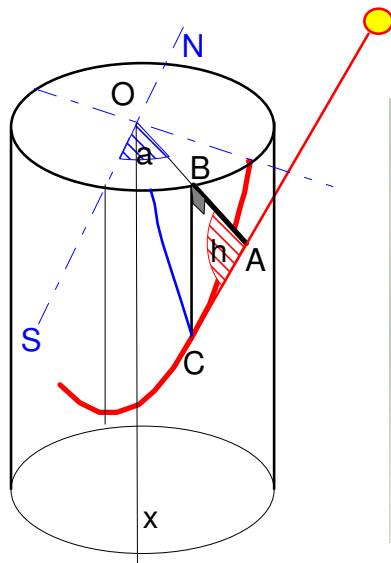
Cette application existe depuis

2009 sur le barrage de Castillon dont la voûte circulaire est surmontée d'une route qui donne l'encorbellement nécessaire



La lecture de l'heure est imprécise car il faut apprécier l'intersection d'une ligne horaire avec le sommet de la courbe formée par l'ombre.

Cadran colonne à style tournant



Pour une heure de l'année définie par un azimut et une hauteur solaire, lorsqu'on place un style dans le plan vertical du soleil, il donne une ombre verticale de longueur connue.

Il suffit donc de graduer une surface cylindrique en fonction de la longueur AB et de donner au style une liberté de rotation autour de l'axe Ox du cylindre.

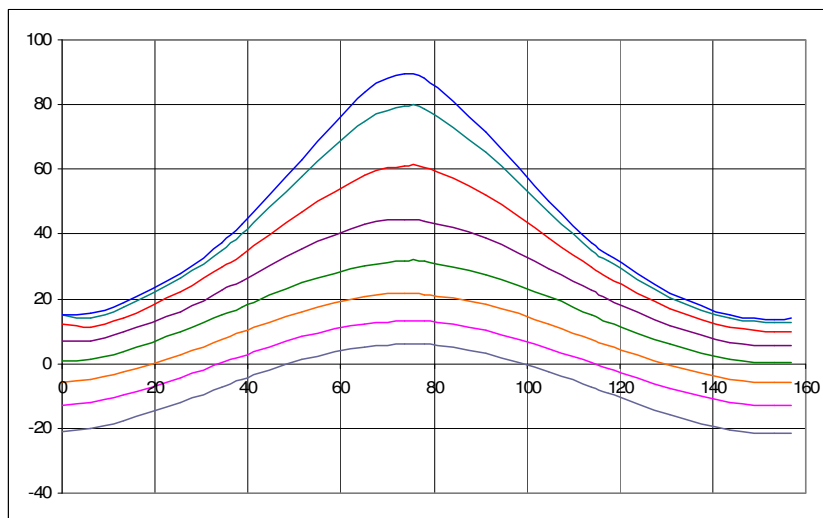
L'heure se lit en plaçant le style dans le vertical soleil, ce qui s'obtient en recherchant la position où son ombre est linéaire et verticale. La connaissance de l'heure est basée sur la mesure de l'azimut solaire

Cadran de berger

Le cadran précédent doit être bien calé sur Nord-Sud et demande une action de réglage pour lire l'heure. Le cadran de berger n'a pas besoin de calage sur le Nord, mais demande 2 actions de réglage avant lecture. A la différence du précédent l'heure est définie par la hauteur solaire

C'est une application de la formule de trigonométrie sphérique connue :

$$\sinh = \sin \delta \times \sin \phi + \cos \phi \times \cos \delta \times \cos H$$



Il est donc possible de calculer et tracer un réseau de courbes horaires en fonction de la déclinaison dont la variation au cours de l'année est connue

On obtient ainsi en abscisse des valeurs de la forme $y = a \times tgh$

avec (a) = longueur horizontale du style

En ordonnée le numéro du jour dans l'année (de 0 à 365) qui donne la valeur de la déclinaison

et permet de calculer la hauteur (h). On peut prendre les débuts de mois et les points de solstices et d'équinoxes

Le résultat est la courbe ci-contre, où le maximum correspond au solstice d'été (20 ou 21 juin)

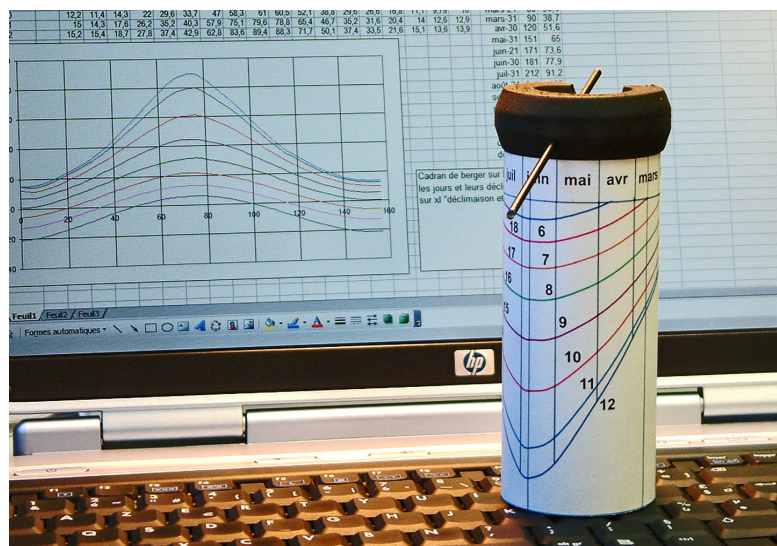
Il suffit ensuite de supprimer les valeurs négatives et par une proportionnalité de rendre la courbe enroulable sur un cylindre. Celui-ci étant surmonté d'un style réglable en orientation, le mode d'emploi devient le suivant :

Orienter le style sur la position du jour de la lecture

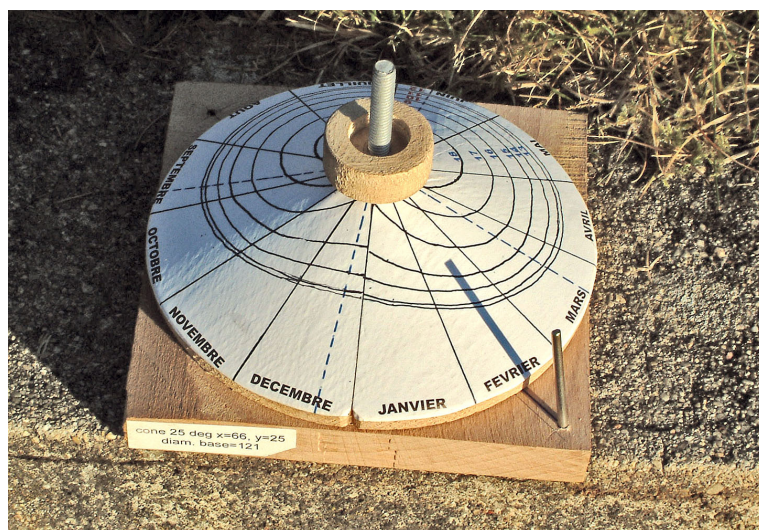
Placer le cylindre bien vertical et le tourner jusqu'à ce que l'ombre du style soit verticale et aussi fine que possible

L'extrémité de l'ombre indique alors l'heure dans le réseau de courbes, Compte tenu de l'aspect des courbes on voit que cet appareil n'a de précision que dans la période d'été. L'avantage est d'éviter le calage, mais il faut connaître la date et savoir si on est en matinée ou en après-midi. En pratique pour être vertical, l'appareil pouvait être suspendu comme un fil à plomb.

Exemple de cadran de berger ,diamètre 50, hauteur 140 à fut fixe et style tournant



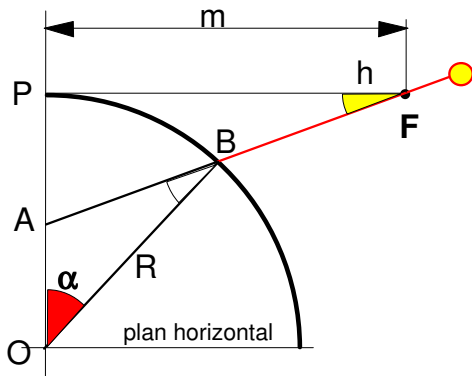
Dans le même principe, le cadran suivant transforme les courbes sur une surface conique tournante avec le style fixe et les courbes tournantes



De toutes façons les cadrans basés sur la hauteur solaire ont 2 inconvénients :

- Quelle que soit la saison, la variation de hauteur est faible entre 11 heures et 13 heures si bien qu'il peut y avoir hésitation pour savoir si midi est passé ou à venir
- Les hauteurs étant beaucoup plus faibles en hiver qu'en été, il en résulte une disproportion dans le graphique qui nuit à la précision de lecture.

Le montage suivant cherche à atténuer ces 2 inconvénients en projetant l'ombre d'un fil horizontal sur une portion de cylindre horizontal. Ceci réduit à 2 le rapport entre le maximum de l'été et le minimum de l'hiver au lieu de 6.5 dans un cadran de berger.



La longueur du cylindre est graduée proportionnellement aux dates de l'année. Les arcs PB caractérisent la hauteur solaire. Le fil est solidaire du cylindre et parallèle à son axe. Après avoir placé le cadran perpendiculaire au soleil, l'heure est lue à l'intersection de l'ombre du fil et du trait correspondant à la date.

Connaissant la longueur (m), le rayon (R), il faut calculer l'arc PB en fonction de l'angle (h) de hauteur.

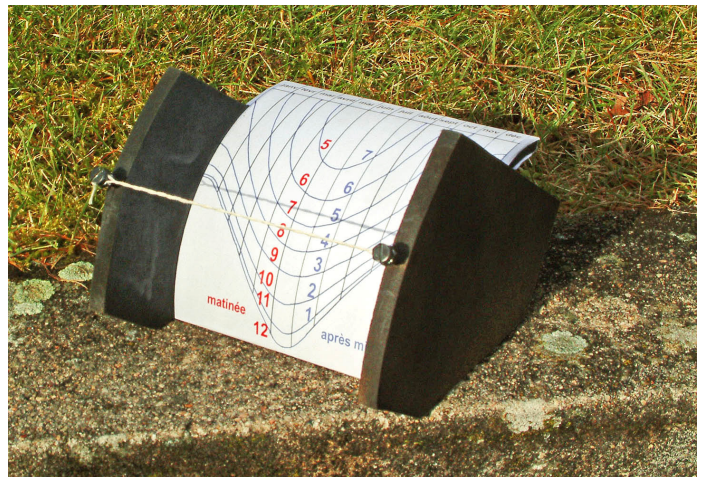
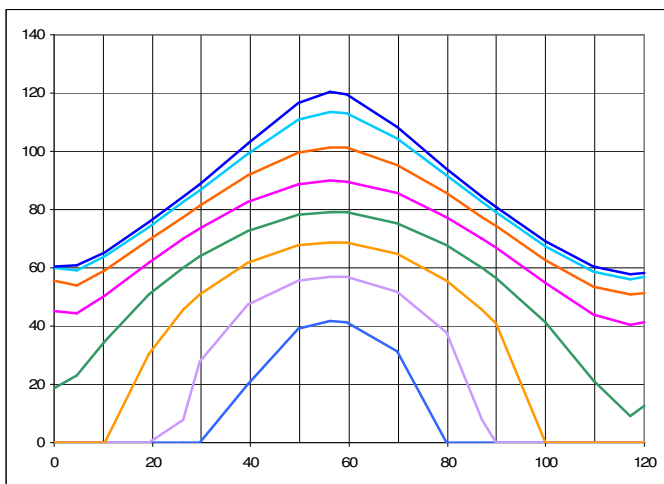
$$OA = R - m \times tgh$$

Dans le triangle OAB : $\frac{\sin A}{OB} = \frac{\sin B}{OA}$

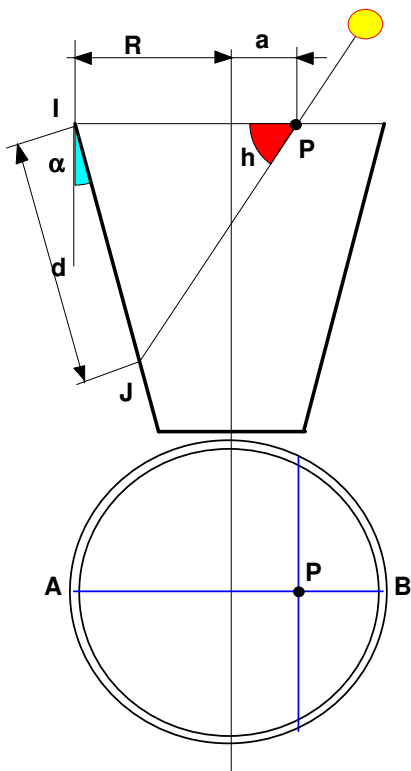
$$\hat{B} = \arcsin \left[\frac{OA}{OB} \times \sin \left(\frac{\pi}{2} + h \right) \right]$$

Finalement : $\alpha = \frac{\pi}{2} - h - \hat{B}$

Exemple de réalisation avec rayon de cylindre = 80 et distance m = 115



Cadran conique creux ou « pot de fleur »



Une couronne tournante porte 2 fils orthogonaux qui se croisent au point P. En orientant l'ensemble pour que l'ombre de AB coïncide avec une génératrice IJ du cône, l'angle h est l'angle de hauteur du soleil.

On calcule la distance IJ qui est fonction de l'heure et de la date :

Dans le triangle IJP on écrit :

$$\frac{\sin \hat{J}}{R+a} = \frac{\sinh}{d} \rightarrow d = (R+a) \cdot \frac{\sinh}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha - h)}$$

Le cercle extérieur est gradué proportionnellement aux 365 jours de l'année et le graphique des longueurs d est calculé à des dates choisies à partir de la déclinaison qui donne la hauteur solaire pour chaque heure de 5 heures à 12 heures. (les points de l'après midi sont égaux

Le principe est identique à celui du cadran de berger.

En connaissant la date, la couronne porte fils est orientée par rapport au graphique puis l'ensemble est tourné pour que l'ombre du fil diamétral tombe sur une génératrice du cône. L'heure est lue au croisement des ombres.



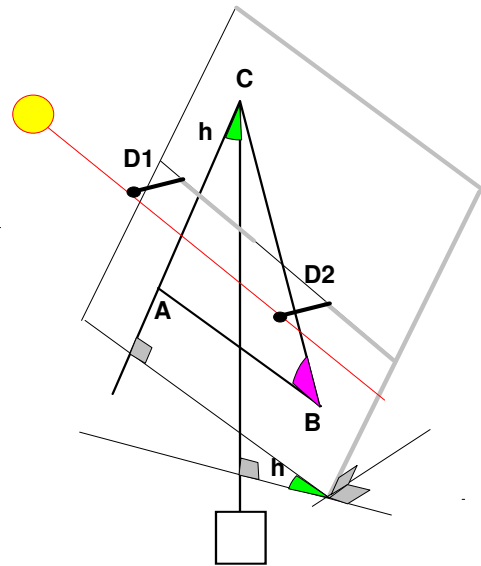
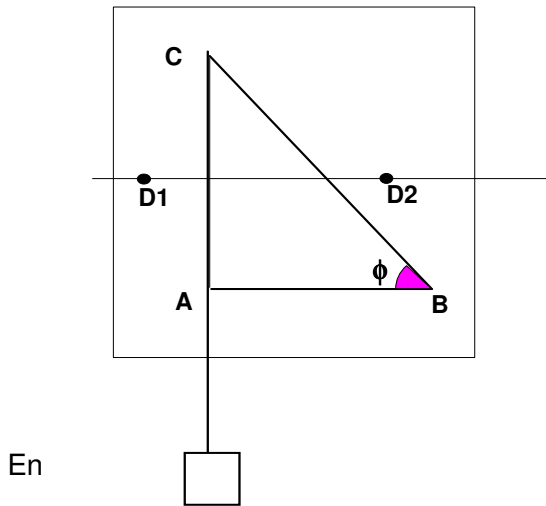
Cadran dit de capucin :

Il s'agit d'un système réputé très ancien, basé sur la mesure de la hauteur solaire, utilisant des propriétés géométriques intéressantes mais dont l'usage n'est pas bien commode.

Considérer un plan vertical sur lequel ont été tracées : Une horizontale AB et une verticale AC telle que l'angle CBA soit l'angle de latitude du lieu.

Planter 2 clous C1, C2 perpendiculaires au plan et placés sur une parallèle à AB.

Suspendre au point C un fil à plomb.

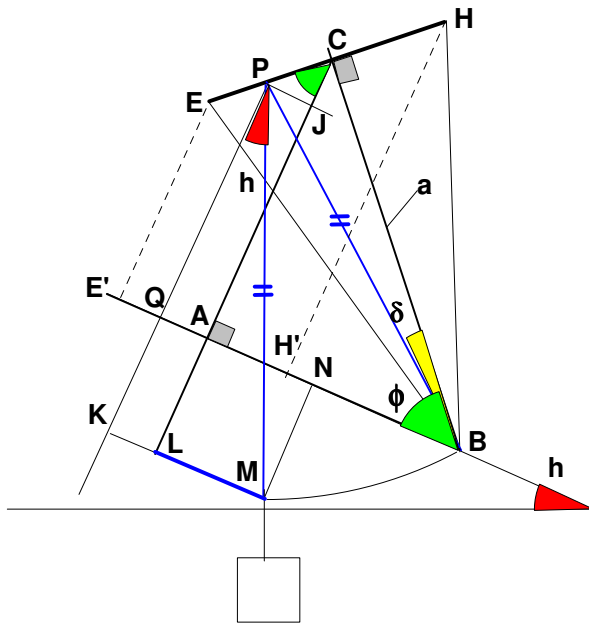


maintenant le plan vertical et en l'orientant vers le soleil de telle sorte que les ombres des clous soient sur la ligne D1D2, on voit que l'angle de la hauteur du soleil peut se mesurer entre la droite AB et l'horizontale ou bien entre la droite AC et le fil à plomb.

Supposons maintenant qu'il y ait une position solaire telle que le fil à plomb soit confondu avec la droite BC. Dans ce cas la hauteur du soleil serait : $\frac{\pi}{2} - \phi$ c'est-à-dire qu'il serait midi à l'équinoxe.

De même quand AB est horizontal le fil à plomb passe par A et on peut dire qu'il est 6 heures du matin à l'équinoxe.

L'idée du « génial capucin » a donc été de chercher une géométrie permettant de graduer la ligne AB en prenant en considération la variation de la déclinaison.



Reprenons la figure initiale en traçant de part et d'autre de BC des droites inclinées de l'angle de déclinaison maximale (23.45 deg.) terminées par une base perpendiculaire à BC.

Soit une déclinaison δ et tracer la verticale, telle que $PM = PB$; On calcule :

$$BC = a \Rightarrow PB = \frac{a}{\cos \delta} \Rightarrow KM = PM \times \sinh = \frac{a \times \sinh}{\cos \delta}$$

$$KL = PJ = PC \times \sin \phi = a \times \tan \delta \times \sin \phi$$

En remplaçant $\sinh$ par son expression issue de la formule astronomique, il vient :

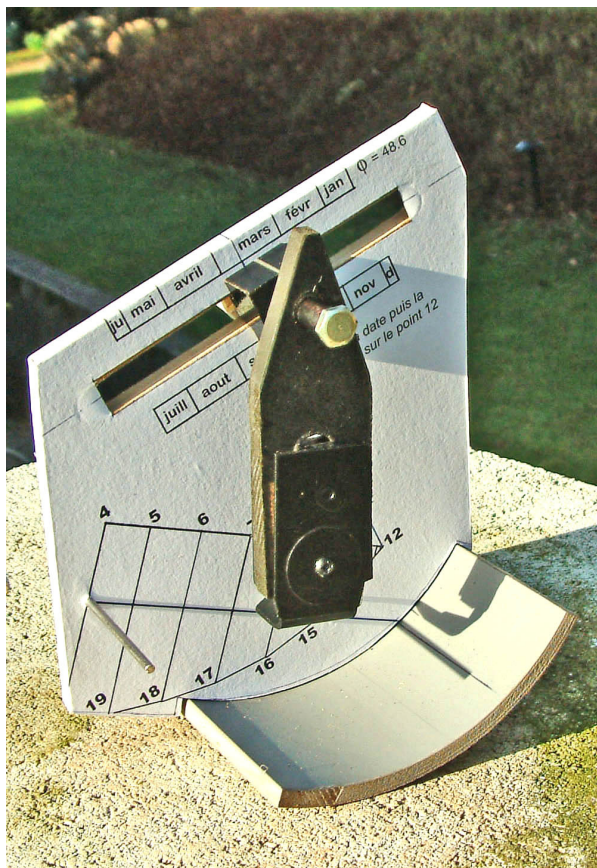
$$KM = \frac{a}{\cos \delta} \times (\sin \delta \times \sin \phi + \cos \phi \times \cos \delta \times \cos H) = a \times (\sin \phi \times \tan \delta + \cos \phi \times \cos H)$$

On voit alors apparaître la valeur de LM :

$$LM = KM - KL = a \times \cos \phi \times \cos H$$

Cette expression, indépendante de la déclinaison est proportionnelle au cosinus de l'angle horaire. Il est donc possible de graduer la ligne AB avec des droites perpendiculaires telles que MN qui correspondent à des heures comprises entre 6 heures au point A et 12 heures au point B

Sur la droite EH, le point E correspond au solstice d'été, le point C aux équinoxes et le point H au solstice d'hiver. En projetant les points E et H en E' et H' on obtient les heures de lever du soleil aux 2 solstices. Comme tous les cadrans basés sur la hauteur solaire, la précision de lecture se réduit de 10 heures à 14 heures à cause du resserrement des graduations.



Le problème de cette théorie intéressante est qu'il faut 2 réglages avant lecture :

Placer d'abord le point P à la position correspondante à la date

Ajuster la longueur PM exactement égale à PB

Orienter ensuite l'ensemble vers le soleil en maintenant le plan vertical

Pivoter le plan par une rotation d'axe horizontal jusqu'à amener les ombres des clous sur leur ligne D1D2

Finalement lire l'heure à l'extrémité M

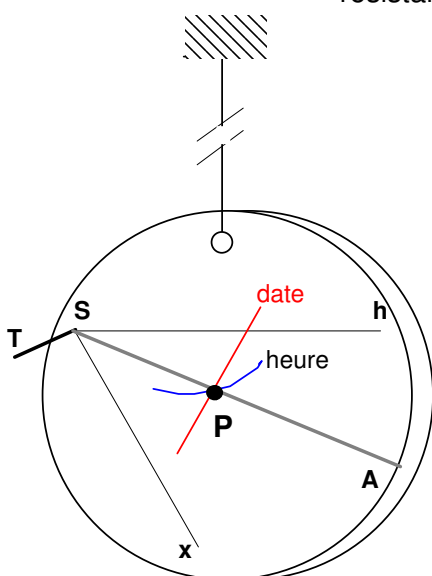
Le prototype ci-contre n'a qu'un seul clou, son ombre doit tomber sur un trait de la surface cylindrique destinée à régler l'angularité.

Cadran de hauteur pendulaire

Sur une figure plane pesante suspendue à un pivot sans résistance, on peut tracer une ligne Sh qui sera bien horizontale. Si le plan de la figure est proche de contenir un rayon solaire, on peut observer l'ombre SA d'un style ST perpendiculaire au plan. Celle-ci indique l'angle ASH de hauteur solaire avec une assez bonne précision.

Comme on sait que la hauteur varie suivant des lois connues au cours du jour et au cours de l'année on peut imaginer un diagramme à lignes croisées d'heures et de dates où une ligne d'ombre détermine un point P qui indique l'heure si on connaît la date (ou réciproquement, mais ceci n'aurait pas d'intérêt)

Le tracé commence par le calcul des hauteurs solaires à la latitude concernée et aux dates choisies. Le plus simple et le moins encombrant est de couvrir d'un solstice à l'autre en utilisant la



symétrie des heures et la quasi symétrie des dates

Par exemple, utiliser le partage type signes du zodiaque avec les déclinaisons de -23.45, -20 -11, 0, 12, 20, 23.45 degrés qui conduisent aux hauteurs solaires du tableau suivant

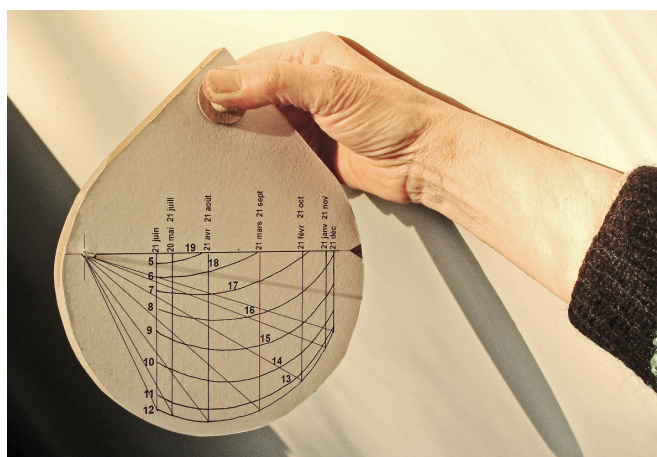
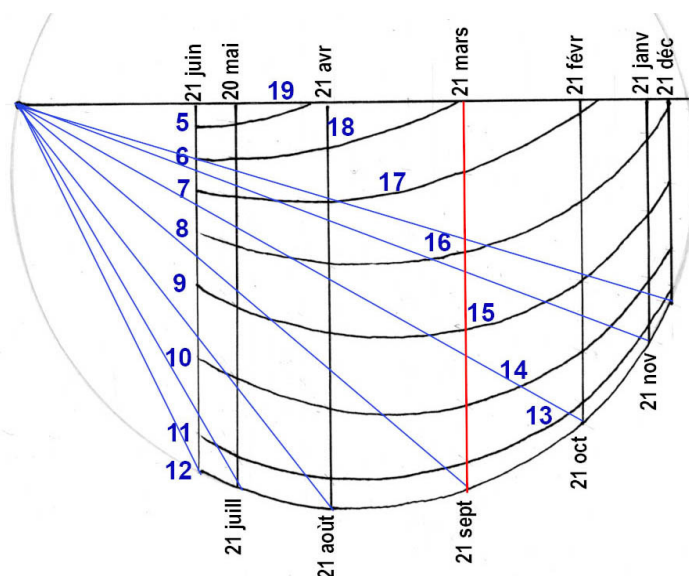
Le graphique peut avoir un peu n'importe quelle forme à l'intérieur de l'angle hSx ou Sx est la hauteur solaire à midi au solstice d'été.

Dans le cas suivant, il a été choisi un arc de cercle pour la ligne d'heure de midi.

Les angles des hauteurs à midi de chaque déclinaison coupent ce cercle en des points utilisés pour élever des lignes verticales qui représentent les dates.

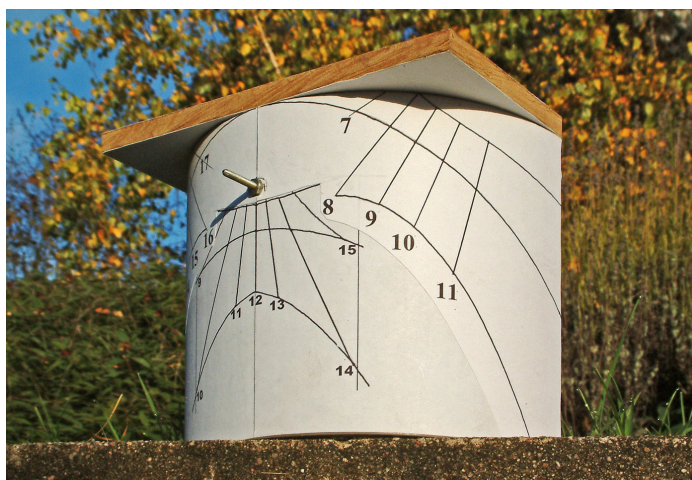
En utilisant les angles du tableau, on détermine sur chacune de ces droites des points pour tracer les lignes horaires.

	-	23,4	-20	-11	0	12	20	23,5
12	17,9	21,4	30,4	41,4	53,4	61,4	64,8	
13	16,7	20,1	28,9	39,7	51,3	59	62,2	
14	13,1	16,4	24,8	34,9	45,7	52,6	55,5	
15	7,5	10,5	18,4	27,9	37,8	44,1	46,7	
16	0,28	3,1	10,5	19,3	28,6	34,6	37	
17			1,43	9,86	18,9	24,7	27,1	
18				-0	8,97	14,9	17,4	
19						5,49	8,13	
20							0	



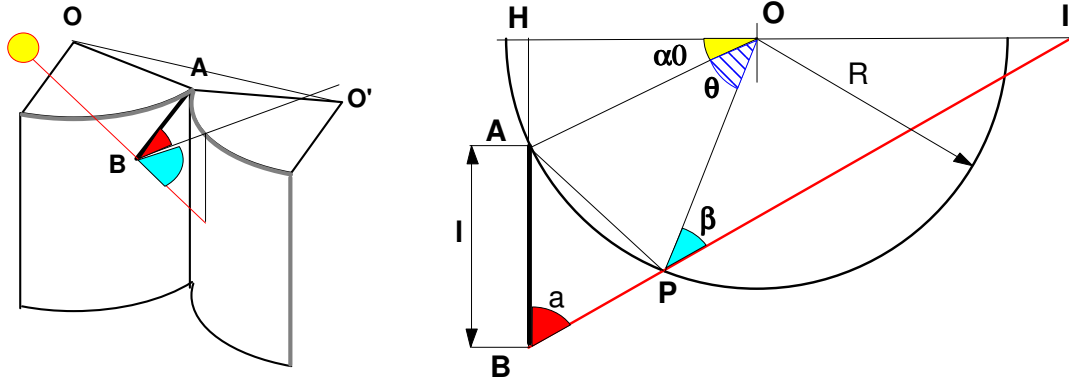
Cadran à chapiteau carré sur colonne cylindrique

Exemple de cadran chapiteau combiné avec un cadran à clou central



On considère un cylindre surmonté d'un carré de côté égal au diamètre. Le tracé est simplifié quand les côtés du carré sont orientés Nord-Sud. Dans un plan vertical Nord-Sud tangent au cylindre est tracée la droite PD inclinée de l'angle de latitude Φ . Le soleil est dans un plan qui tourne autour de l'axe PD de l'angle θh . Son intersection PA avec le plan horizontal détermine un angle β calculable par la trigonométrie sphérique appliquée au trièdre PD, PA, PJ qui est rectangulaire

creux entre les surfaces cylindriques. On sait que les lignes horaires d'ombres sont des ellipses, mais il est plus facile de calculer par les azimuts et hauteurs solaires



$$AH = R \cdot \sin \alpha_0 \rightarrow OH = R \cdot \cos \alpha_0$$

$$HI = HB \cdot \tan a = (l + R \cdot \sin \alpha_0) \cdot \tan a \rightarrow OI = (l + R \cdot \sin \alpha_0) \cdot \tan a - R \cdot \cos \alpha_0$$

Dans le triangle POI : $\frac{OI}{\sin \beta} = \frac{OP}{\sin(\frac{\pi}{2} - a)} \rightarrow \sin \beta = \frac{OI \cdot \cos a}{R}$

D'où $\frac{IP}{\sin(\frac{\pi}{2} + a - \beta)} = \frac{R}{\cos a} \rightarrow IP = R \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + a - \beta)}{\cos a}$

Puis $BP = IB - IP = \frac{l + R \cdot \sin \alpha_0}{\cos a} - IP$

Par résolution du triangle ABP on obtient AP puis l'angle θ $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{AP}{2R}$

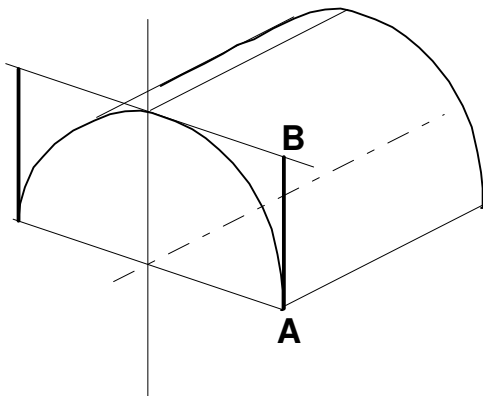
$$\hat{A} + \hat{P} = \pi - a$$

$$\tan \frac{\hat{A} - \hat{P}}{2} = \frac{l - BP}{l + BP} \cdot \tan \frac{\pi - a}{2} \dots \text{puis } \frac{AP}{\sin a} = \frac{l}{\sin \hat{P}} \text{ as précédent.}$$

On peut aussi opérer par les équations de la droite BP et du cercle

Le problème est plus général, mais le résultat final est semblable au cas précédent du cadran à chapiteau carré.

Il paraît alors intéressant d'examiner le cas d'un cadran horizontal cylindrique constitué d'un demi cylindre avec 2 styles verticaux, symétriques et tangents au cylindre.



On considère un demi cylindre horizontal d'axe Oz et de rayon R avec un mat vertical tangent AB de longueur égale au rayon

Un rayon solaire BJ d'azimut (a) et de hauteur (h) coupe la surface du cylindre en D.

En projetant J en C sur Ox, le plan des 3 points JCB est parallèle à l'axe Oz et par conséquent la droite PD parallèle à JC est une génératrice du cylindre et le point D est l'ombre du point B. Pour tracer le lieu des ombres sur la développée du cylindre il faut calculer l'arc θ et la longueur PD en fonction de R, a et h

[illegible]

PD se calcule par la proportionnalité $\frac{PD}{JC} = \frac{BP}{BC} = \frac{BC - PC}{BC} = 1 - PC \cdot \frac{\cos \varphi}{R}$

$$\text{Avec } JC = AJ \cdot \cos a = R \cdot \frac{\cos a}{\operatorname{tgh}}$$

$$PD = R \cdot \frac{\cos a}{tgh} \cdot (1 - \cos(\hat{P} + \varphi))$$

Un angle horaire (H) détermine un plan BSF dont la droite BF coupe le cercle en C et D et dont la droite SF coupe l'axe du cylindre en O. En prenant J milieu de CD et en le joignant à I et à O, le plan OIJ est perpendiculaire à CD et au plan BSF Il est donc médiateur de l'ellipse intersection . Son centre est en O et le grand axe MN peut se calculer si on connaît l'angle α

Pour résoudre le trièdre rectangle de sommet B et d'arêtes BF, BA, BS, appliquer le cas où sont connus C et b avec ici : $\hat{C} = \hat{H}$ et $b = \frac{\pi}{2} - \phi$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} tga &= \frac{tgb}{\cos C} & tgc &= \sin b \cdot tgC \\ \cos B &= \cos b \cdot \sin C \end{aligned}$$

En remplaçant il vient :

$$\boxed{\cos \alpha = \sin \phi \cdot \sin \hat{H}}, \text{ et } \operatorname{tg} \beta = \cos \phi \cdot \operatorname{tg} \hat{H}$$

L'angle (H) prend une valeur maximale (env. 120 deg) qui rend l'angle β supérieur à 90 deg et à ce moment le plan de l'ellipse intersection est défini par le trièdre de sommet S et d'arêtes SI', SB, SF' où sont connus :

$$\text{L'angle de l'arête SI}' = \frac{\pi}{2} - \phi \quad \text{B}$$

$$\text{L'angle de l'arête SB} = \hat{H} - \frac{\pi}{2} \quad \text{C}$$

$$\text{L'angle de face } I' \hat{S} B = \frac{\pi}{2} \quad \text{a}$$

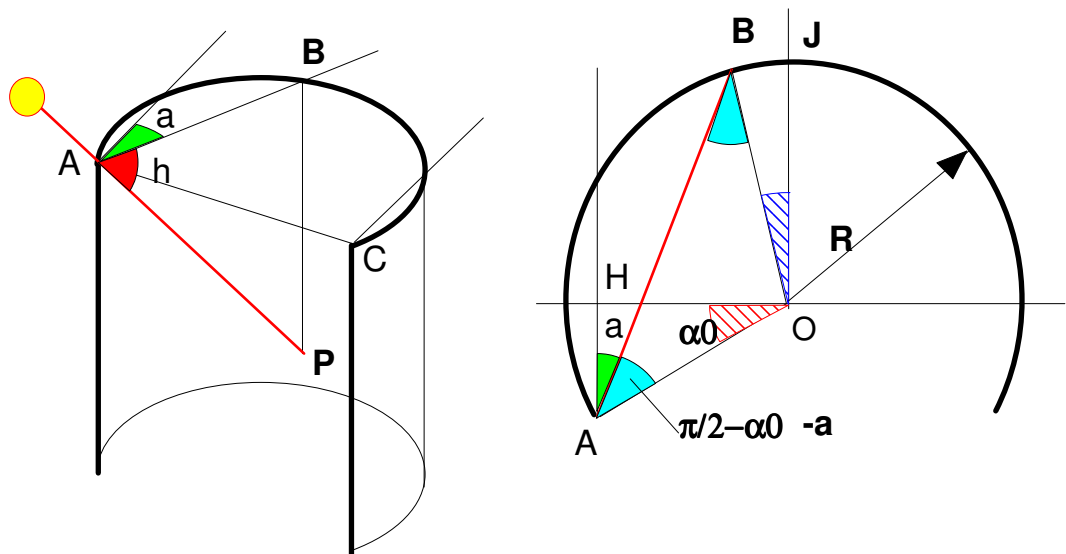
$$\text{Cas de trièdre rectilatère où : } \cos A = -\cos B \cdot \cos C ; \quad \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} B}{\sin C} ; \quad \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} C}{\sin B}$$

$$\text{En remplaçant : Angle de l'arête SF}' : \boxed{\cos \gamma = \sin \phi \cdot \sin \hat{H}}$$

On observe que lorsque l'angle horaire varie de 0 à 90 deg , le centre de l'ellipse O vient de l'infini jusqu'au point I', puis lorsque l'angle horaire dépasse 90 deg. le centre de l'ellipse va de I' vers O' et l'infini inférieur.

La courbure des ellipses à tracer sur la développée du cylindre change de sens quand l'angle β est proche de 40 à 45 deg.

Cadran cylindrique vertical



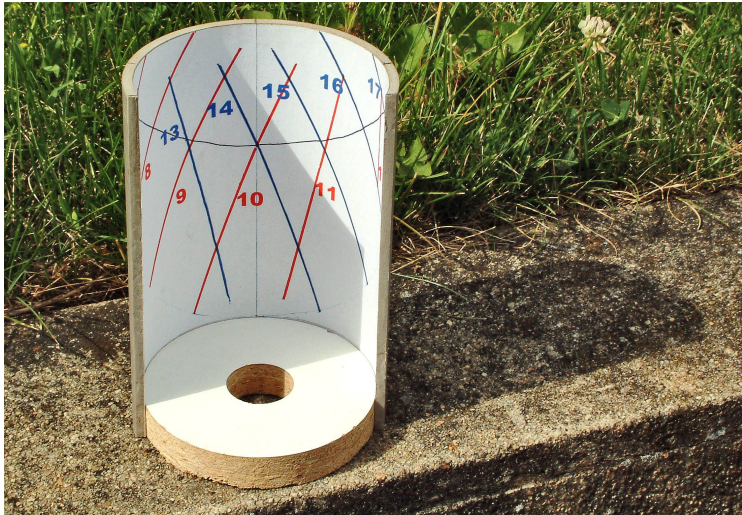
Dans un cylindre partiel on recherche le lieu géométrique de l'ombre du point C pour la matinée et l'ombre du point A pour l'après midi en utilisant les azimuts et hauteur du soleil. Pour mieux préciser les heures proches de midi, il peut être utile de décaler les points A et C d'un angle α_0 et on se propose de calculer l'arc OBJ en fonction de l'angle d'azimut a

Du triangle rectangle OHA on obtient l'angle en A du triangle isocèle OAB.

$$\widehat{BAO} = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 - a \quad \widehat{AOB} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0 - a\right) = 2(\alpha_0 + a)$$

$$\widehat{BOJ} = \frac{\pi}{2} - (2(\alpha_0 + a) - \alpha_0) = \frac{\pi}{2} - 2a - \alpha_0$$

Calcul de AB par : $\frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} = \frac{OB}{\sin \widehat{BAO}} \rightarrow AB = R \frac{\sin 2(\alpha_0 + a)}{\cos(\alpha_0 + a)}$



Les courbes se déterminent par points en calculant aux heures et déclinaisons :

L'arc BJ et $BP = AB \cdot \operatorname{tgh}$

On obtient 2 réseaux symétriques, les heures du matin étant les lignes rouges et celles de l'après midi les bleues

PARTIE 5 AUTRES PROBLEMES

Chemin du marcheur vers le soleil (ou autre méthode de calcul de l'azimut)

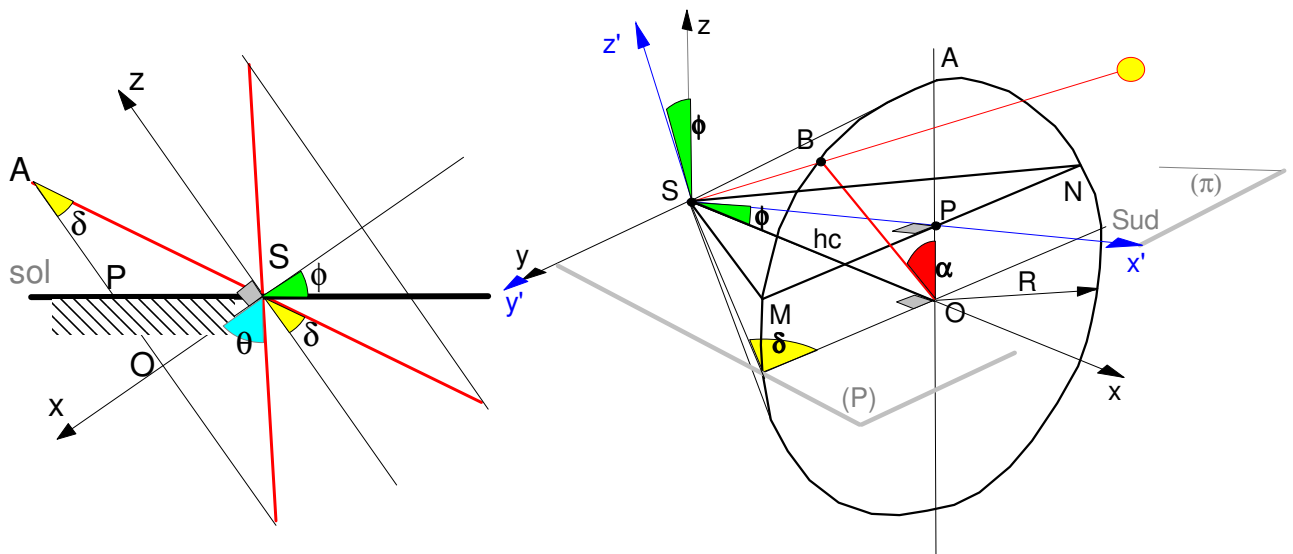
Il s'agit d'étudier la trajectoire d'un mobile qui se dirige constamment en direction du soleil avec une vitesse constante.

Le problème conduit déjà à connaître la variation de l'azimut du soleil au cours de la journée et à tout moment de l'année.

On peut utiliser les formules connues d'origine astronomique ou développer la théorie géométrique suivante (qui donne heureusement les mêmes résultats !).

Celle-ci repose sur la rotation régulière du plan qui contient le soleil, autour d'une droite inclinée de l'angle de latitude dans le plan Nord-Sud. Pour mémoire cette vitesse est de 15 degrés / heure = 7.27×10^{-5} rad/sec

Au cours de la journée le mouvement de rotation apparente des rayons solaires engendre un cône ayant pour axe la droite précédente et dont l'angle au sommet (θ) se définit par l'angle (δ) de déclinaison.



La figure de droite est adaptée pour faciliter le tracé et la compréhension. Le plan (π) représente le sol. Il pivote autour de l'axe Sy en coupant le cône selon un triangle SMN. Pour les calculs, on choisit un cercle de centre O situé à la distance (hc) du sommet. Le soleil est dans un plan passant par l'axe SO faisant un angle (α) avec le plan vertical Nord-Sud (zSx).

La direction prise par le promeneur dans le plan (π) est la projection de la droite SB sur ce plan (c'est-à-dire l'azimut local du soleil).

Le problème se traite par le calcul des coordonnées du point B dans le système Sx', Sy', Sz' qui se déduit du système Sx, Sy, Sz par une rotation d'angle (Φ) autour de l'axe Sy .

Dans les coordonnées Sx, Sy, Sz , on a :

$$zB = R \times \cos \alpha \quad yB = R \times \sin \alpha \quad xB = hc$$

$$\text{Avec : } R = hc \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \frac{hc}{\tan \delta}$$

Les cosinus directeurs des axes Ox', Oy', Oz' dans le système Ox, Oy, Oz sont :

	Sur Ox	Sur Oy	Sur Oz
Ox'	$\alpha = \cos \Phi$	$\beta = 0$	$\gamma = \sin \Phi$
Oy'	$\alpha' = 0$	$\beta' = 1$	$\gamma' = 0$
Oz'	$\alpha'' = -\sin \Phi$	$\beta'' = 0$	$\gamma'' = \cos \Phi$

En appliquant : $x'B = \alpha x + \beta y + \gamma z$ et etc., on a :

$$x'B = hc \times \cos \phi + \sin \phi \times R \times \cos \alpha$$

$$y'B = R \times \sin \alpha$$

$$z'B = -hc \times \sin \phi + \cos \phi \times R \times \cos \alpha$$

La direction cherchée se calcule par :

$$tg\beta = \frac{y'B}{x'B} = \frac{R \times \sin \alpha}{hc \times \cos \phi + R \times \cos \alpha \times \sin \phi} = \frac{\frac{hc \times \sin \alpha}{tg\delta}}{hc \times \cos \phi + \frac{hc \times \sin \phi \times \cos \alpha}{tg\delta}}$$

$$tg\beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \phi \times tg\delta + \sin \phi \times \cos \alpha}$$

Dans cette formule β est l'azimut du soleil (A) et α l'angle horaire (H). On peut remarquer qu'il ne dépend que de l'angle H lorsque la déclinaison est constante.

Son calcul n'est plus significatif quand le point B atteint le point M ou son symétrique

$$N. \text{ C'est-à-dire lorsque : } \cos \alpha = \frac{OP}{R} = \frac{hc \times tg\phi}{R} = \frac{hc}{tg\delta} = tg\phi \times tg\delta$$

Avec $\Phi = 48.6$ et $\delta = 23.45$, on trouve $\alpha = 60.5$ deg. qui correspondent à environ 16 heures, coucher du soleil au solstice d'hiver vers Paris.

La transformation précédente conduit ensuite à la hauteur solaire par la formule :

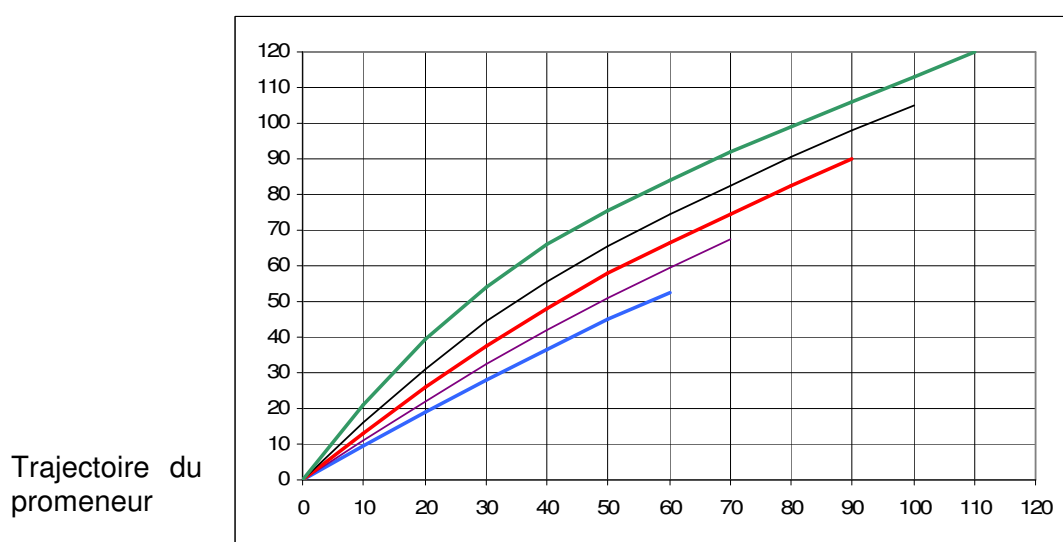
$$tgh = \frac{z'B}{\sqrt{x'^2 B^2 + y'^2 B^2}} \text{ qui donne tous calculs faits :}$$

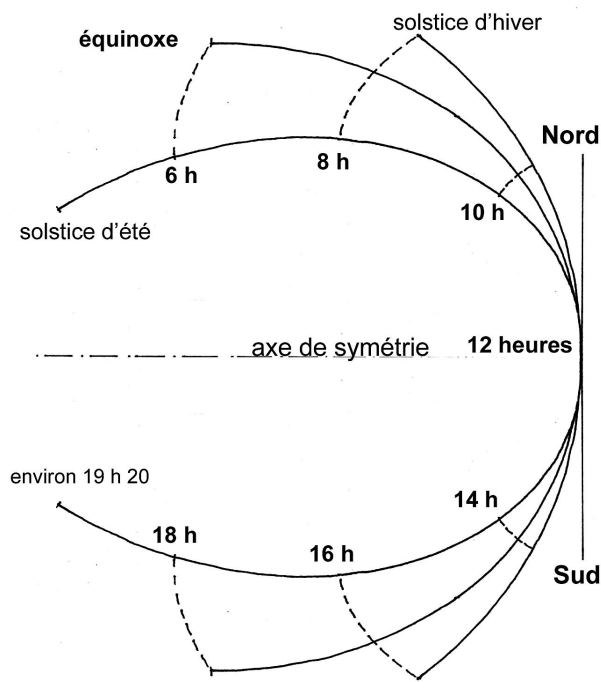
$$tgh = \frac{\cos \phi \times \cos \alpha - \sin \phi \times tg\delta}{(\cos^2 \phi \times tg^2 \delta + \sin^2 \phi \times \cos^2 \alpha + 2 \cos \phi \times \sin \phi \times \cos \alpha \times tg\delta + \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

On obtient des courbes identiques à celles en partie 3:

Angles d'azimuts en fonction de α avec $\alpha = 0$ à midi

La courbe supérieure verte est relative au solstice d'été, la médiane rouge est l'équinoxe et l'inférieure bleue est le solstice d'hiver. Calculées à la latitude de 48.6, (proche sud Paris)





rapport entre les vitesses.

On observe que l'azimut du soleil n'est pas une fonction linéaire de l'angle horaire, c'est-à-dire du temps qui s'écoule.

La trajectoire sera donc une courbe de rayon de courbure variable (tout au moins localement car il y a presque linéarité en hiver ou en été en début et fin de journée)

La courbe peut se calculer par itérations. Mais on voit qu'au bout d'une journée on parcourt environ un demi-cercle

A l'équinoxe, partant à 6 heures vers l'Est, on se trouve face à l'Ouest à 18 heures.

Au solstice d'été on peut partir quand $\alpha =$ environ 67 deg. qui correspond à $\beta = 90$ deg. C'est-à-dire à :

$$12 - \frac{67}{15} = 7.53 \text{ heures et on sera face à l'Ouest à } 12 + \frac{67}{15} = 16.47 \text{ heures.}$$

Ce qui est moins fatigant....Les courbes montrent les trajectoires à 3 périodes de l'année

La forme des courbes est indépendante de la vitesse. Leur facteur de similitude est le

rapport entre les vitesses.

Autre exemple :

Supposons une variation linéaire de l'azimut au solstice d'été telle que 90 deg soient parcourus en 60 deg, c'est-à-dire en 4 heures. La vitesse angulaire serait :

$$\omega = \frac{\pi}{2 \times 4 \times 3600} = 1.0908E - 4 \text{ rad / sec}$$

En marchant à 100 m/heure (0.027778 m/sec) le rayon constant serait :

$$R = \frac{V}{\omega} = \frac{0.027778}{1.0908E - 4} = 254.65 \text{ m}$$

Déterminer l'heure à laquelle l'ombre d'un poteau aura une longueur donnée :

a = hauteur du poteau

k = coefficient de longueur d'ombre : $L_{\text{ombre}} = ka$

Φ = latitude du lieu

δ = déclinaison correspondante à la date donnée

H = angle horaire (15 degrés pour 1 heure)

h = angle de hauteur du soleil

$$\text{La condition est atteinte quand : } tgh = \frac{a}{ak} = \frac{1}{k}$$

On en déduit l'heure par rapport à midi en appliquant la formule astronomique :

$$\cos H = \frac{\sinh - \sin \delta \times \sin \phi}{\cos \phi \times \cos \delta}$$

$$\text{Aux équinoxes } \delta = 0 \text{ et la formule devient } \cos H = \frac{\sinh}{\cos \phi}$$

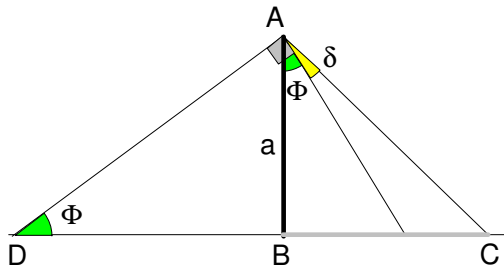
En exprimant le sinus en fonction de la tangente on peut remplacer $\sin h$ par :

$$\sinh = \frac{tgh}{\sqrt{1+tgh^2}} = \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$$

d'où le calcul de H sans devoir calculer l'angle h.

Ce problème présente un intérêt particulier pour déterminer le moment de la prière islamique de l'après midi :

Le dévot doit mesurer son ombre à midi et l'heure de prière sera l'instant où son ombre devient égale à la somme de sa taille et de son ombre de midi



Longueur d'ombre à midi : $BC = a \times tg(\phi \pm \delta)$

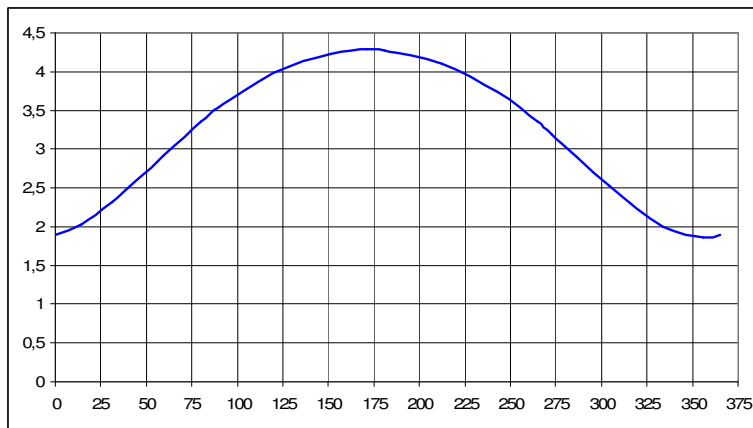
Longueur cherchée $L = a \times (1 + tg(\phi \pm \delta))$

A ce moment l'angle de hauteur solaire est :

$$tgh = \frac{1}{1 + tg(\phi \pm \delta)}$$

Ce qui ramène au cas précédent avec

$$k = 1 + tg(\phi \pm \delta)$$



La courbe calculée par points donne l'heure en fonction du numéro du jour dans l'année.

A la latitude de Paris il faut attendre 2 heures de l'après midi en hiver et plus de 4 heures en été. Cet écart est croissant avec la latitude.

Cadran à mat vertical immergé ou à réfraction

Dans toute théorie de cadran solaire se rencontrent 5 variables :

La latitude Φ , qui est considérée constante dans les réflexions qui suivent

La déclinaison δ qui est l'image d'une date dans le courant de l'année

L'angle horaire H du soleil qui est proportionnel à l'heure solaire

L'angle A d'azimut du soleil

L'angle h de hauteur du soleil

Ces variables sont interdépendantes par l'effet des 2 formules fondamentales de trigonométrie astronomique. (voir part 3)

Quand le diagramme d'un cadran est établi pour montrer ces 4 variables par un point d'ombre, il est théoriquement possible de déterminer la 4^{ème} variable quand on connaît les 3 autres.

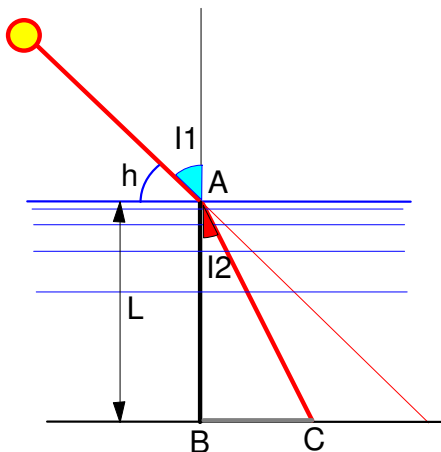
Exemple : Avec un gnomon vertical on voit la longueur de l'ombre et en connaissant la date, on peut théoriquement orienter le cadran pour avoir la correspondance entre la date et la longueur de l'ombre. A ce moment on peut lire l'heure et trouver le Nord qui est sur la ligne droite de midi.

On a vu (partie 1) qu'un mat vertical peut servir de cadran puisque l'extrémité de son ombre se trouve toujours sur les droites horaires d'un cadran classique, polaire horizontal. L'inconvénient réside dans la grande longueur des ombres qui conduiraient à un encombrement excessif. Cet inconvénient peut disparaître si le mat est plongé dans un milieu réfringent qui a le pouvoir d'incliner les rayons solaires. Le plus simple est d'envisager l'eau dont l'indice de réfraction est $n = 1.33$

Selon la loi de Descartes on a : $n_1 \cdot \sin I_1 = n_2 \cdot \sin I_2 \rightarrow \sin I_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin I_1$

Donc le trajet dans l'eau rapproche les rayons de la verticale et en particulier un rayon horizontal qui donnerait une ombre de longueur infinie se trouve réfracté suivant un

angle :
$$I_2 = \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1.33}\right) = 48.75 \text{ deg}$$

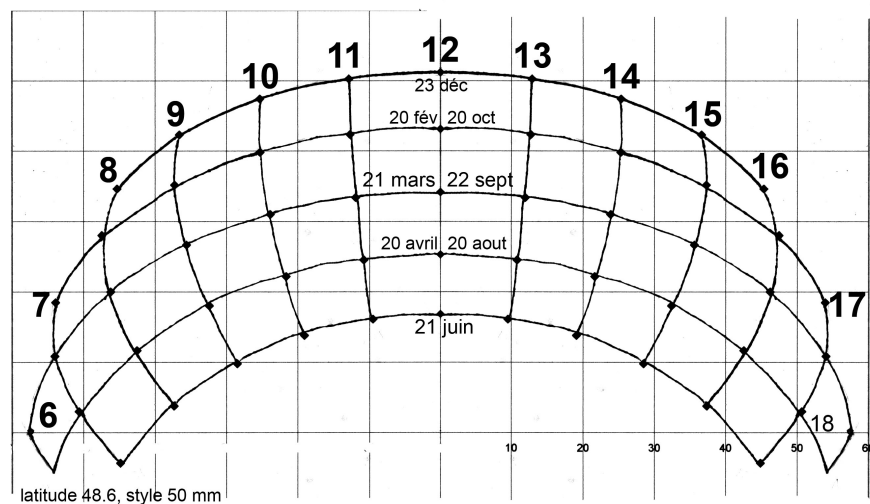
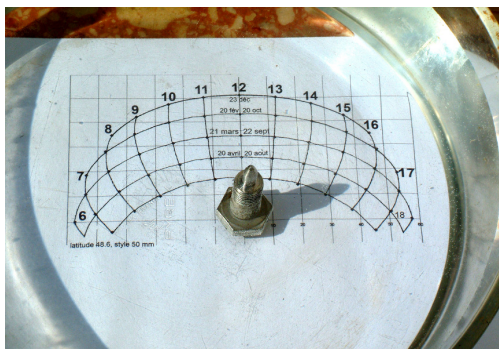


Un mat de longueur L est plongé dans l'eau jusqu'à son sommet. L'angle d'azimut n'est pas altéré mais l'angle de hauteur conduit à un angle I2 tel que :

$$\sin I_2 = \frac{\cosh}{1.333}$$

Connaissant les azimuts et les hauteurs à des heures et des déclinaisons choisies, on obtient un graphique symétrique et ramassé qui permet des lectures faciles.

Ci-dessous le montage expérimental dans l'eau et son graphique



C'est une curiosité qui se vérifie expérimentalement, mais il serait plus commode d'utiliser une résine transparente, de réfringence connue (par exemple résine polyester insaturé Polylyte 32032-20 qui a le même indice de réfraction que le verre, (1.49 à 1.5))

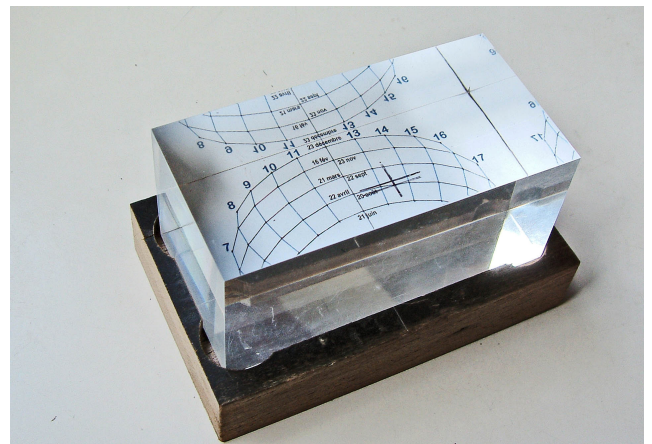
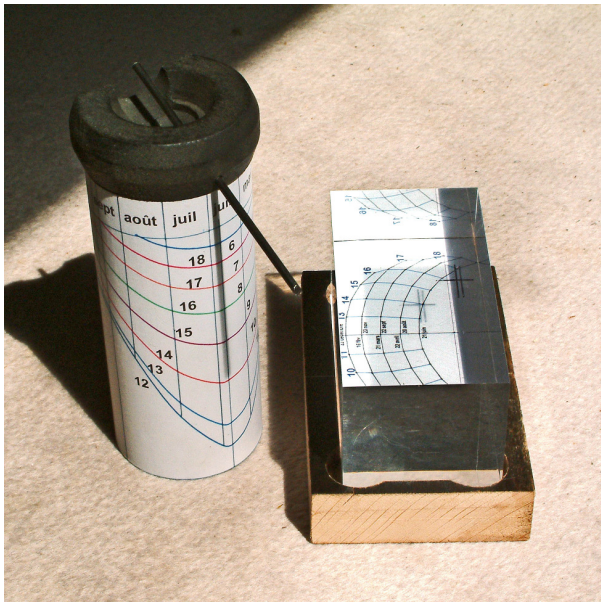
Théoriquement ce cadran peut se passer de la connaissance de la direction Nord, puisqu'on sait que l'extrémité de l'ombre doit appartenir à la courbe de la déclinaison du jour. Il suffit de le tourner pour amener l'extrémité de l'ombre sur cette courbe puis lire l'heure correspondante et savoir que le Nord est sur la ligne 12 heures (il faut quand même savoir si on est avant ou après midi car l'intersection d'un cercle avec la courbe de déclinaison donne toujours 2 points et d'autre part la précision devient trop faible entre 10 h. 30 et 13 h. 30)

Montrant la hauteur et l'azimut solaire ce type de cadran peut présenter des avantages :

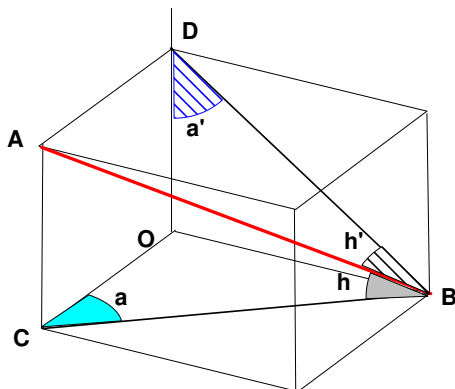
Faible encombrement . En effet avec un mat de hauteur unité, il lui suffit d'une surface de 1.1 x 1.8 alors que le même mat dans l'air conduirait à un graphique occupant 15 x 40

Portatif

Avec un graphique suffisamment détaillé, il permet de déterminer approximativement le Nord et l'heure grâce à la date



Le principe s'appliquerait aussi à un cadran vertical en redéfinissant des angles d'azimut et de hauteur dits verticaux qui peuvent s'exprimer en fonction des azimut et hauteur conventionnels.



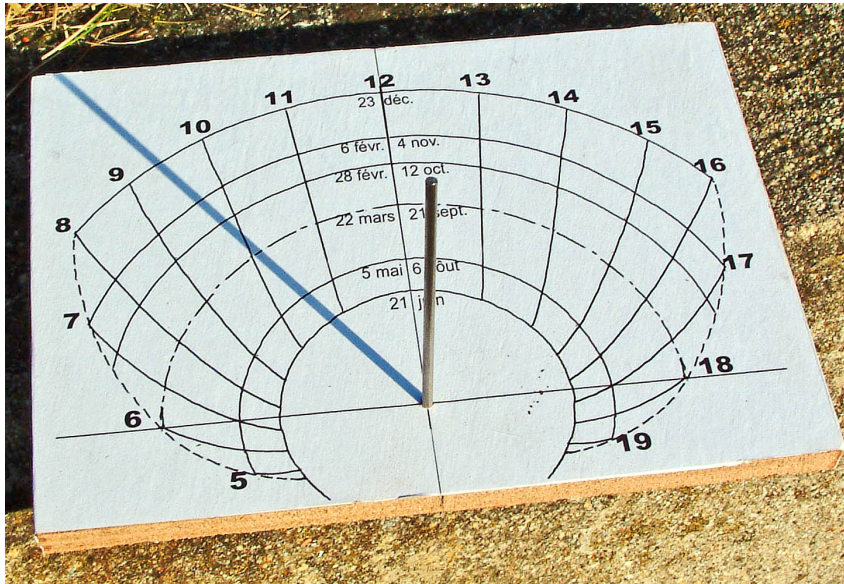
AB est un vecteur unitaire défini par les angles d'azimut (a) et de hauteur (h) par rapport au plan horizontal. Sur le plan vertical on utilise les angles (a') et (h') qui s'expriment en fonction de (a) et (h) :

$$\sinh' = \frac{AD}{AB} = \frac{OC}{1} = \cosh \times \cos a$$

$$tga' = \frac{OB}{OD} = \frac{\cosh \times \sin a}{AC} = \frac{\cosh \times \sin a}{\sinh} = \frac{\sin a}{tgh}$$

AD étant un style perpendiculaire au plan vertical inclus dans un solide réfringent, l'angle de direction (a') reste inchangé et l'angle (h') est soumis à la réfraction. Connaissant AD, on peut calculer la longueur d'ombre et les coordonnées de son extrémité. Par principe ce type de cadran ne donne plus d'indication quand l'azimut (a) atteint 90 deg.

Cadrans d'azimut à style droit vertical



Ces cadrans utilisent la variation de l'azimut d'une heure déterminée au cours de l'année.

L'étendue de l'année, d'un solstice à l'autre, correspond à la distance entre 2 cercles extrêmes concentriques. Les dates particulières sont tracées entre les 2 cercles en appliquant une courbe de proportionnalité simple et arbitraire.

Après calcul des azimuts correspondants, on trace les angles au centre qui coupent leurs cercles en des points qui permettent de tracer les courbes horaires.

Connaissant la date et l'heure, ce cadran peut donner la direction du Nord.

Associé avec un cadran de hauteur qui indiquerait l'heure, il suffirait de connaître seulement la date pour retrouver le Nord.

Par exemple la photo correspondrait à 10 heures vers le 15 mars et 10 heures et demie vers le 5 mai. Mais il aurait été préférable de choisir les déclinaisons qui font correspondre les 21^{èmes} jours de la majorité des mois (23.45, 20, 11, 0, -12, -20, -20.45 degrés, voir page 18 part 1).

Ayant choisis les rayons des 2 solstices, tracer les azimuts de 13 heures qui déterminent un point sur chaque cercle et décrire que la ligne des 13 heures est une droite. En traçant les azimuts des déclinaisons intermédiaires, on obtient des

points sur cette droite qui donnent les rayons à utiliser pour terminer le graphique.

Mais il est plus précis de calculer par l'équation polaire de la droite AB:

Avec α et β les compléments des azimuts et OH distance de la droite à l'origine d'angle γ avec Ox :

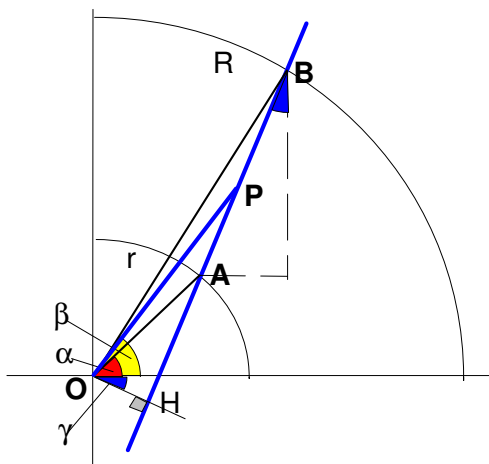
$$xA = r \cos \alpha \quad yA = r \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{xB - xA}{yB - yA} = \frac{R \cos \beta - r \cos \alpha}{R \sin \beta - r \sin \alpha}$$

La distance OH : $d = OH = r \cdot \cos(\alpha + \gamma)$

Pour un point P de rayon ρ et d'angle θ on écrit

$$d = \rho \cdot \cos(\theta + \gamma) = OP \cdot \cos(\theta + \gamma)$$



Le cadran suivant obéit au même principe que le précédent, mais les positions des solstices ont été inversées (le cercle extérieur correspond au 21 juin et l'intérieur au 21 décembre). Pour simplifier il utilise la symétrie approchée des dates et des déclinaisons par rapport aux solstices.

Ceci conduit à tracer 7 cercles correspondants aux dates de chaque 21^{ème} jour du mois. En choisissant les valeurs relatives des rayons des cercles, il est possible d'améliorer la forme des courbes horaires et en particulier de conserver le signe de leurs rayons de courbures.

A la latitude de 48.6 deg. un résultat satisfaisant est obtenu avec les proportions suivantes /

Rayon R extérieur attaché au 21 juin

Rayon intérieur $r = 0.3 R$ attaché au 21 décembre

0.43 R 21 janvier ou 21 novembre

0.56 R 21 février ou 21 octobre

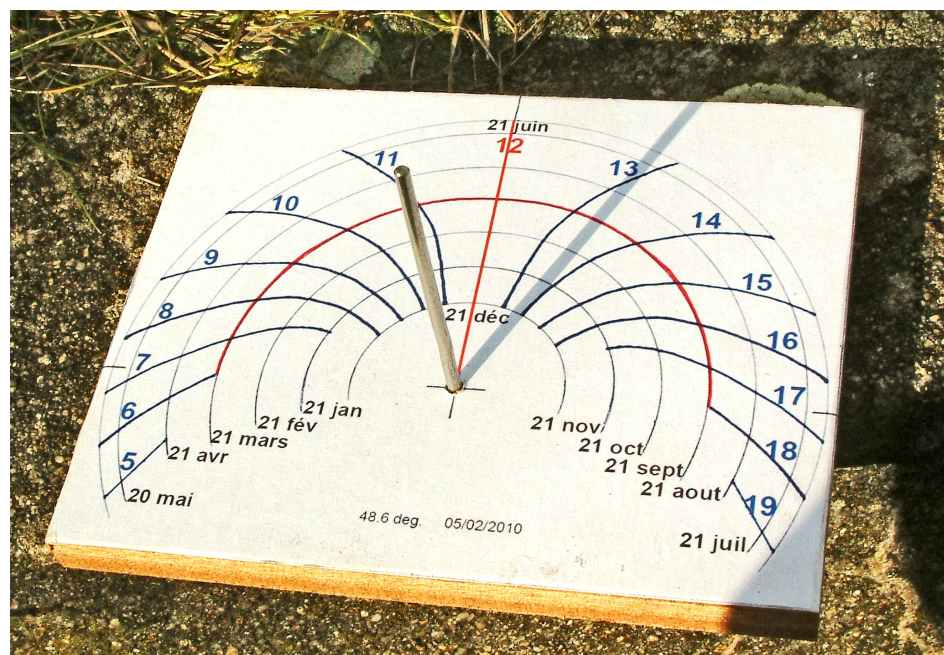
0.69 R équinoxes

0.81 R 21 avril ou 21 août

0.925 R 20 mai ou 21 juillet

	21-juin	20 mai	21 juil	21 avr	21 ma	21 fév	21 jan	21-déc
heures	-							
	23,45	-20	-11	0	12	20	23,45	
12	0	0	0	0	0	0	0	0
13	30,6	28,1	23,5	19,7	16,7	15,0	14,4	
14	54,0	50,7	43,8	37,6	32,3	29,3	28,1	
15	71,0	67,7	60,4	53,1	46,5	42,5	40,9	
16	84,2	81,2	74,1	66,6	59,2	54,6	52,6	
17	95,5	92,8	86,1	78,6	70,9	65,8		
18	106,0	103,5	97,3	90,0				
9	116,5	114,2	108,5					

Sur le tableau ci-dessus figurent les dates et les déclinaisons utilisées pour le calcul des azimuts de 12 h à 19 h



Cadran araignée. Comment Matérialiser l'équation du temps sur un cadran

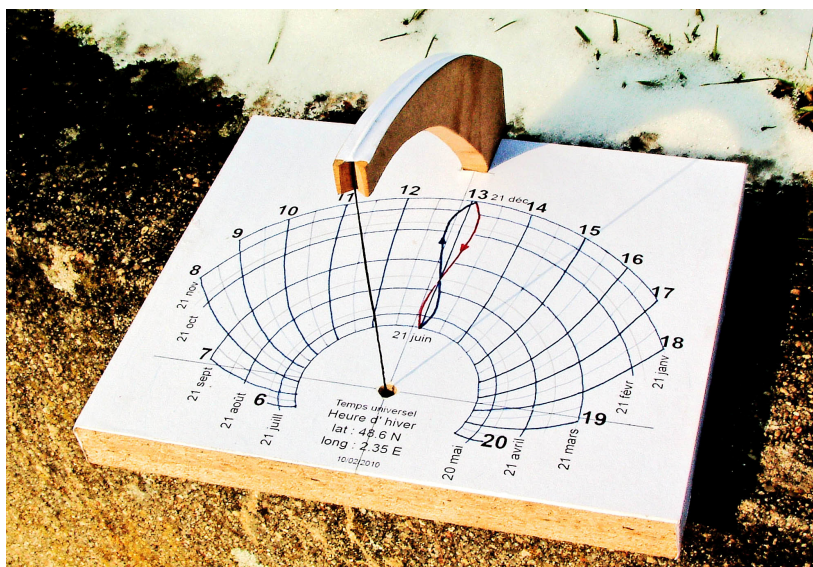
En général, on fait apparaître l'équation du temps avec précision sur les méridiennes, c'est-à-dire sur des cadrans qui ne sont lisibles que de 11 h. 30 à 12 h.30. L'axe moyen de la courbe est forcément orienté Nord-Sud, mais les elongations latérales de la courbe dépendent de la surface de projection.

Quand on utilise l'extrémité d'un style, ou un œilleton équivalent, la courbe se referme sur elle-même en une sorte de 8 qui s'étend entre les points d'ombre extrêmes correspondants aux solstices.

Sur un cadran d'azimut, il est possible de tracer des cercles qui couvrent la totalité de l'année et les lignes horaires vont prendre des formes gondolées qui se déduisent chaque jour de l'année et à chaque heure du jour de la courbe de l'équation du temps qui est connue par un tableau de chiffres ou une courbe en coordonnées rectangulaires.

Comme il faut couvrir l'année entière entre deux cercles, on ne peut avoir que des courbes horaires, avant application de la correction du temps, qui sont très incurvées. La superposition de l'équation du temps provoque ensuite des déformations complexes qui nuisent à la facilité de lecture et à la précision qu'on pouvait espérer.

Yves OPIZZO a réalisé un programme de tracé automatique de ces lignes baptisées araignées qui sont curieuses, mais difficiles à lire



Il a donc été jugé intéressant de revenir aux cercles compris entre les 2 solstices et en utilisant les dates qui donnent une symétrie suffisante entre l'aller vers l'été et le retour vers l'hiver. Les rayons des cercles de ces dates sont choisis pour simplifier la courbure des lignes horaires et faciliter le tracé des lignes de demie heure et éventuellement de quart d'heure. La courbe d'équation du temps n'est figurée que sur la ligne la plus proche de la direction

Nord-Sud avec rappel du sens à utiliser en fonction de la période de l'année.

Le cadran ci-dessous est tracé pour donner l'heure légale d'hiver (décalée d'une heure).

Araignée d'été, araignée d'hiver

Il apparaît une solution de cadrans capables de donner l'heure légale si on étudie les tracés d'araignées adaptées aux deux régimes horaires imposés au cours de l'année. Ces changements d'heure se font les derniers dimanches des mois de mars et d'octobre. On se propose alors d'étudier la période de novembre à mars inclus et la période d'avril à octobre inclus.

Ceci conduit à 2 graphiques dont le plus complexe est celui d'été qui ne concerne que 7 mois et se trace donc avec 7 bandes circulaires au lieu de 12.

Pour tracer les graphiques par points, on choisit de calculer les azimuts à chaque heure, le premier jour de chaque mois.

Les paramètres utilisés sont :

La latitude locale

La longitude (pour mémoire elle correspond à 4 minutes par degré)
Quand la longitude est côté Est le graphique d'un cadran doit être décalé dans le sens horloge puisque le midi solaire local précède le midi solaire à Greenwich.

L'équation du temps définie par courbe ou tableau de chiffres.
Elle représente le temps à ajouter ou retrancher à un cadran situé à Greenwich pour obtenir l'heure universelle. Donc sa valeur positive signifie que l'indication du cadran est en retard sur le temps moyen et dans ce cas pour le corriger il faut décaler son graphique dans le sens inverse horloge.

Par conséquent il faut retrancher la correction du temps de l'écart de temps issu de la longitude

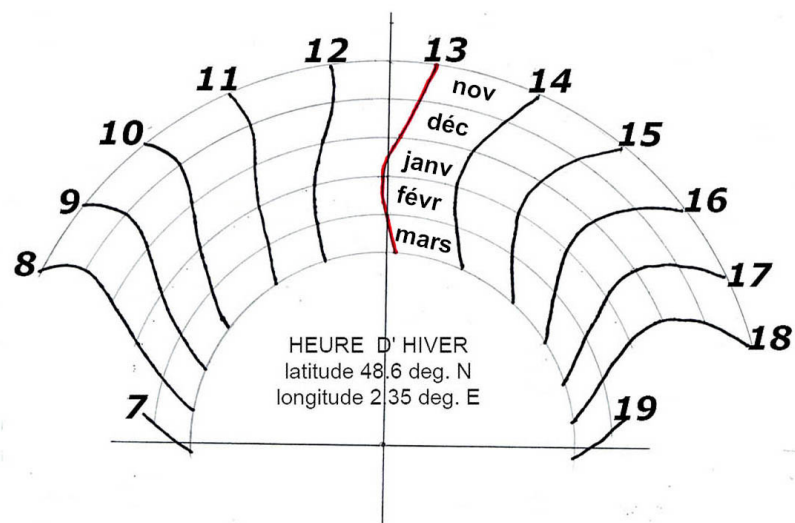
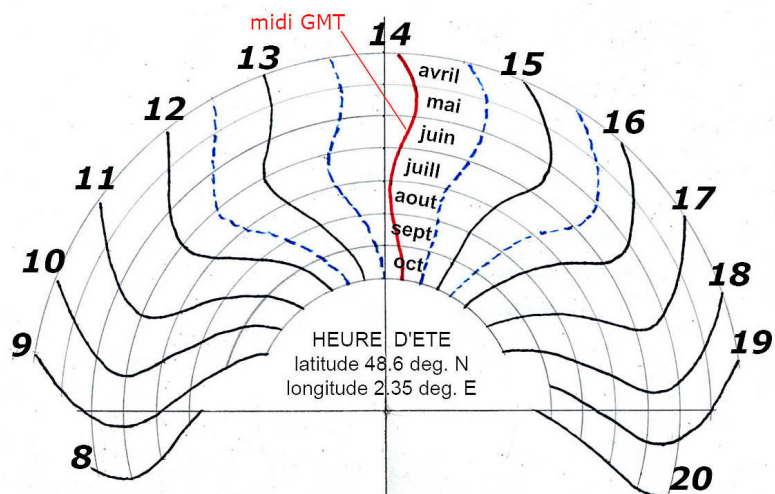
L'écart de temps obtenu est ensuite transformé en écart d'angle horaire (1 heure = 15 degrés, 1 minute = 0.25 degrés)

La déclinaison est lue sur une table ou calculée par formules

Les azimuts peuvent enfin se calculer par exemple avec la formule :

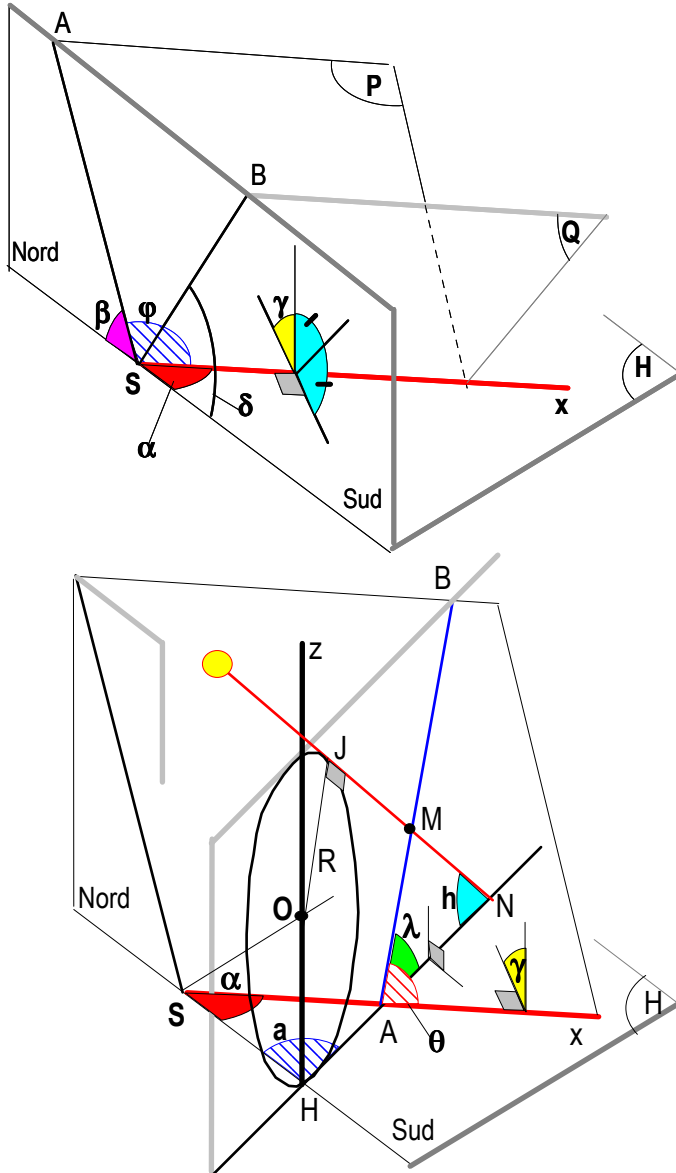
$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin H}{\cos \phi \times \operatorname{tg} \delta + \sin \phi \times \cos H}$$

Les graphiques suivants correspondent à la région Sud de Paris



Cadran avec une sphère tangente à deux plans inclinés

On considère d'abord le cas simple particulier où l'on se propose de placer une sphère tangente aux faces d'un trièdre ayant une face horizontale et d'étudier son ombre sur les faces latérales en admettant qu'elles sont symétriques par rapport à un plan vertical Nord-Sud.



La figure ne représente que le côté Est. Le plan P est défini par sa droite de base Sx d'angle α avec la ligne Nord-Sud et sa pente γ par rapport au plan horizontal H. Pour que la sphère soit tangente aux plans P et H il faut que son centre soit dans le plan Q bissecteur du dièdre d'arête Sx. Pour qu'elle soit tangente au plan P' symétrique du plan P, il faut que son centre soit sur la droite SB dans le plan vertical de symétrie.

Par la trigonométrie sphérique, les angles utiles β , ϕ , δ se calculent en fonction des angles α et γ :

Du trièdre rectangle S Nord, Sx, SA il vient :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cos \gamma}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \sin(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

Du trièdre rectangle S Sud, SB, Sx, il vient :

$$\operatorname{tg} \delta = \sin \alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \gamma}{2}\right)$$

Il y a donc une relation simple entre le rayon de sphère et la distance SH de son axe vertical au sommet

$$S : SH = \frac{R}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{R}{\sin \alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \gamma}{2}\right)}.$$

En considérant le rayon solaire d'azimut a et de hauteur h , le plan passant par l'axe Hz donne l'ombre HA, AB qui est couverte par l'ombre de la sphère jusqu'au point M. On détermine le lieu des points M en calculant les angles θ et λ et les distances

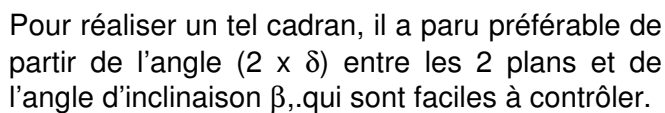
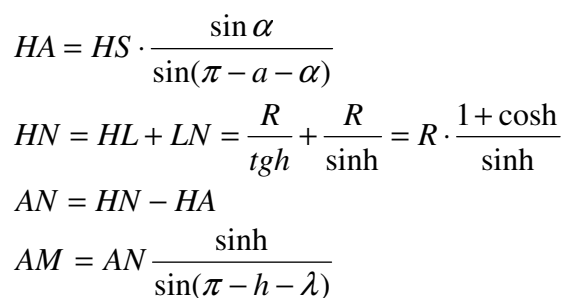
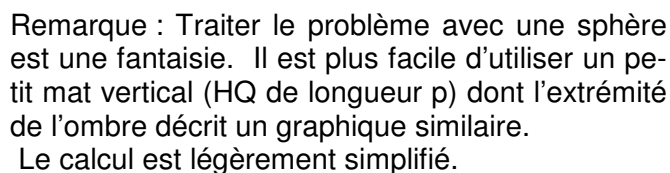
AS et AM

Dans le trièdre rectangle Ax, AN, AM les données sont l'angle γ et l'angle de face dans le plan horizontal $(\pi - \alpha - a)$ et il vient :

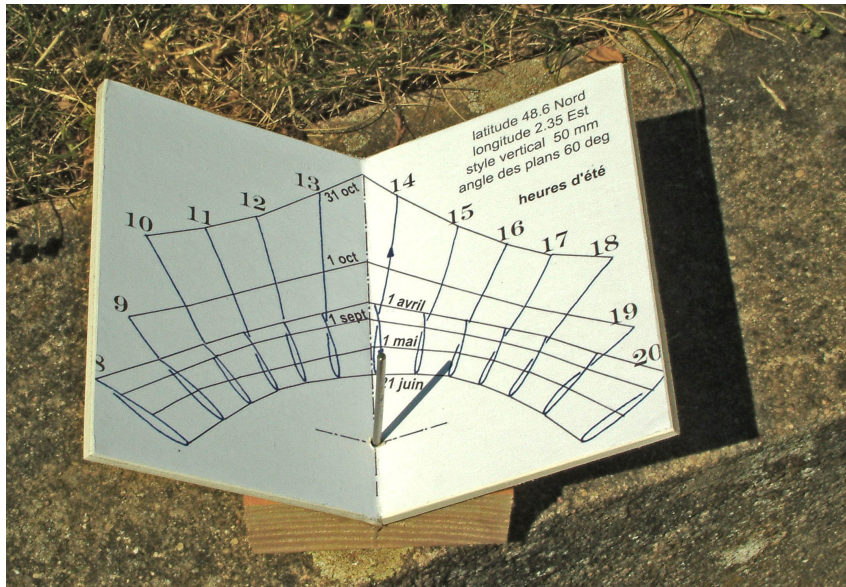
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha - a)}{\cos \gamma} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \lambda = \sin(\pi - \alpha - a) \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

$$\text{AS se calcule dans le triangle ASH par : } \frac{AS}{\sin(\pi - a)} = \frac{SH}{\sin(\pi - \alpha - a)}$$

La figure dans le plan défini par le soleil et le style Hz permet de calculer AM dans les triangles AHS et AMN

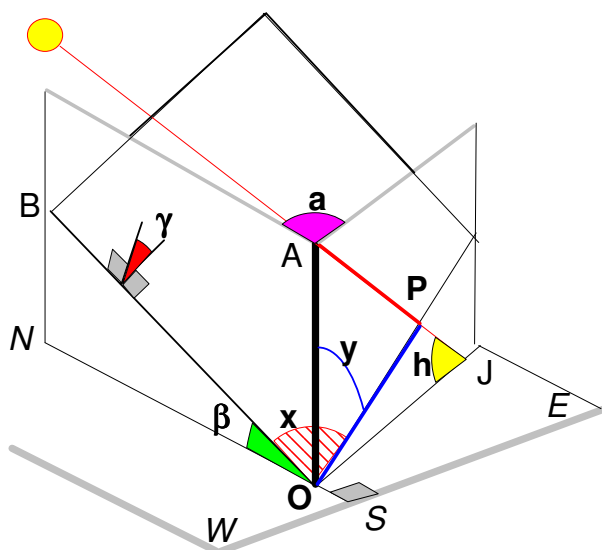

$$\begin{aligned}tg(\pi - \alpha) &= \sin \beta \cdot tg(\pi - \delta) \\ \cos \gamma &= \cos \beta \cdot \sin((\pi - \delta))\end{aligned}$$

$$HN = \frac{p}{tgh}$$

Cadran d'heures d'été avec un style vertical dans un V



A partir des 2 idées précédentes, l'ombre d'un style vertical se projette sur 2 plans inclinés symétriques dont l'arête commune est située dans un plan vertical Nord-Sud.

Le modèle qui se propose d'indiquer l'heure légale d'été est calculé en tenant compte de la longitude et de l'équation du temps. Pour simplifier sa construction l'arête des 2 plans est horizontale.



Dans un cas général, les données sont l'angle β de l'arête OB et γ inclinaison de chaque plan par rapport au vertical Nord-Sud.

Connaissant les angles d'azimut (a) et de hauteur (h), il s'agit de calculer l'angle (x) et la longueur d'ombre OP pour tracer par points le lieu géométrique du point P au cours de la journée et à certaines dates.

Dans le trièdre quelconque OB, OA, OP sont connus les angles solides (a) et (γ) et l'angle de

$$\text{face } A\hat{O}B = \frac{\pi}{2} - \beta$$

En appliquant les formules de résolution, on calcule les angles (x) et (y) et la résolution du triangle OAP par la règle des sinus donne la longueur OP en fonction de celle du style OA.

Cependant lorsque l'arête OB est horizontale le trièdre devient « rectilatère » et les calculs se simplifient considérablement. En posant :

$$a = A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$$

$$B = \gamma$$

$$C = \text{azimut}$$

les formules sont :

$$\text{tgc} = \text{tgx} = \frac{\text{tgC}}{\sin B} = \frac{\text{tgazimut}}{\sin \gamma}$$

$$\text{tgb} = \text{tgy} = \frac{\text{tgB}}{\sin C} = \frac{\text{tg}\gamma}{\sin \text{azimut}}$$

Dans le cas particulier réalisé où (γ) = 60 deg on a donc:

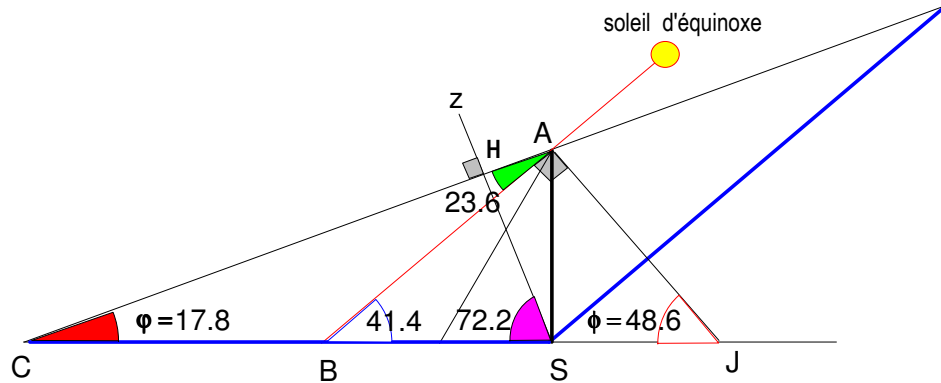
$$\text{tgx} = \frac{2 \cdot \text{tgazimut}}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \text{tgy} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \text{azimut}}$$

Cadran à mat vertical dans un cône creux incliné

Toute solution qui associe la hauteur et l'azimut du soleil semble utile pour créer des cadrans lisibles et assez précis pour indiquer l'heure légale.. Comme il faut limiter les dimensions aux heures de 6 et 18 heures il faut s'intéresser à des surfaces concaves. Et pour faciliter les calculs et le tracé du graphique, cette ou ces surfaces doivent être développables.

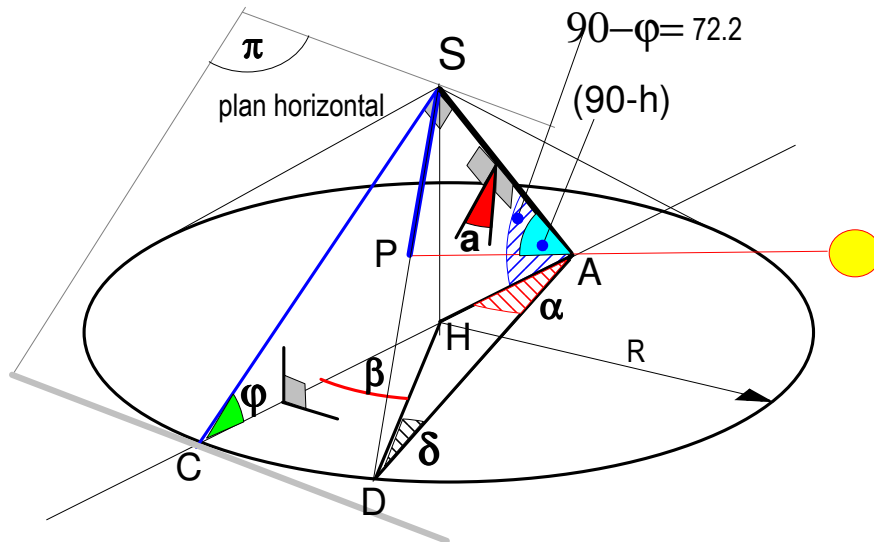
La solution suivante est un cône creux avec une génératrice horizontale orientée Nord-Sud et le plus simple est d'étudier l'ombre d'un mat vertical dont le pied est au sommet du cône.

Pour la latitude 48.6 deg N, on peut s'imposer que l'ombre du solstice d'hiver à midi atteigne la périphérie du cône creux. Ce qui donnerait les angles ci-dessous :



Avec L = longueur du style AS : $SC = \frac{AS}{\tan 17.8} \cong 3.1 \cdot L$ $SH = AS \cdot \cos 17.8 = 0.95L$

$AH = L \cdot \sin \varphi$ $R = HC = SC \cdot \cos \varphi = L \cdot \frac{\cos \varphi}{\tan \varphi}$



Le soleil et le style SA donnent un plan vertical dont l'intersection avec le cône est une droite SJ sur laquelle on calcule la position de l'extrémité P de l'ombre en connaissant les angles d'azimut et de hauteur. Le cône est retourné afin de faciliter le tracé de la figure.

Pour tracer le graphique sur la développée du cône il faut calculer la longueur SP et l'angle **CSD** correspondant à β par l'arc CD .

Dans le trièdre rectangle AS , AC AD on connaît l'angle solide (a) égal à l'azimut, et l'angle de face $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

On en déduit l'angle α par : $\tan \alpha = \tan a \cdot \cos \varphi$

Et l'angle SAD par : $\tan SAD = \frac{1}{\tan \varphi \cdot \cos a}$

Considérer ensuite le triangle AHD où sont connus l'angle α et les côtés HD et HA pour déterminer l'angle β et la longueur du côté AD

$$\frac{HD}{\sin \alpha} = \frac{AH}{\sin \delta} \rightarrow \sin \delta = \sin \alpha \cdot \frac{AH}{HD} = \sin \alpha \cdot \tan \varphi^2 \quad \text{et : } \beta = \alpha + \delta$$

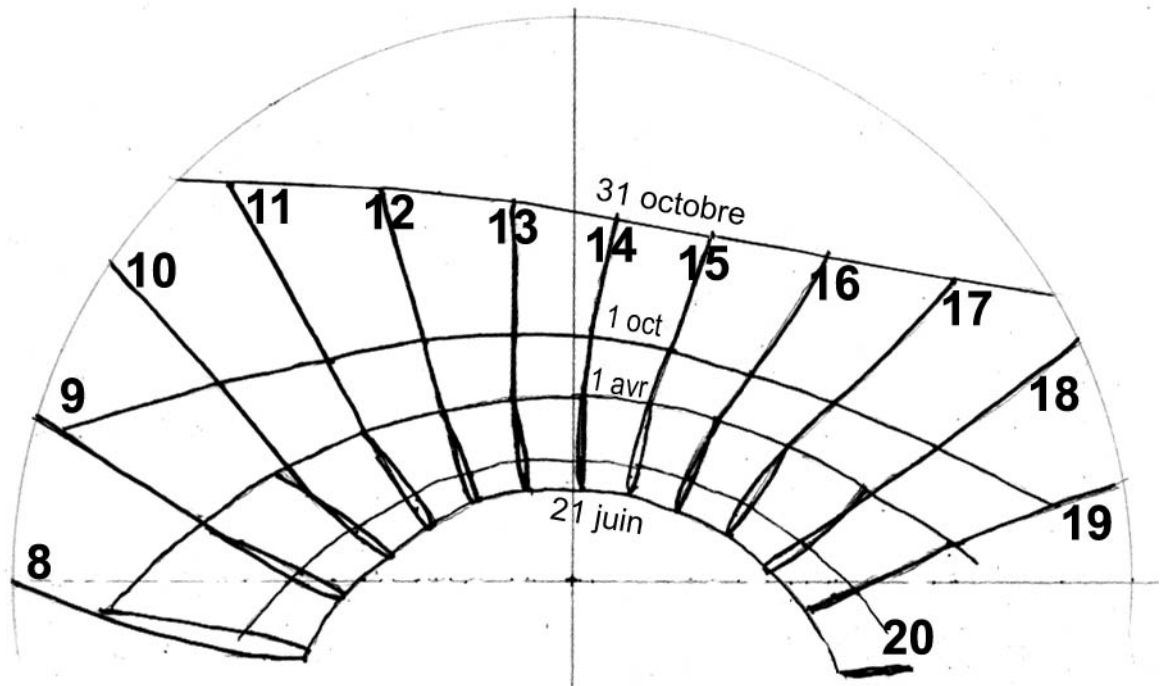
$$\frac{AD}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{HD}{\sin \alpha} \rightarrow AD = R \cdot \frac{\sin(\pi - \beta)}{\sin \alpha}$$

Puis résoudre le triangle ASD où sont connus tous les côtés et l'angle SAD pour avoir

$$\text{l'angle ASD : } \frac{\sin \widehat{ASD}}{AD} = \frac{\sin \widehat{SAD}}{SD} \rightarrow \sin \widehat{ASD} = \sin \widehat{SAD} \cdot \frac{AD \cdot \tan \varphi}{L}$$

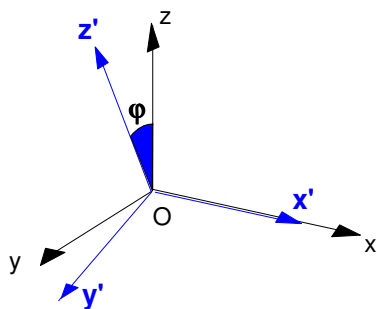
Et terminer par le calcul de SP dans le triangle ASP où sont connus AS et les angles adjacents.

Pour un cadran donnant l'heure d'été au Sud de Paris, avec l'angle φ du cône = 17.8 deg. et un style de 25 mm, on arrive au graphique développé ci-dessous. (échelle 1).



Il est tentant de retourner le cadran pour examiner ce que serait un graphique des heures d'hiver, mais l'inclinaison du style rend les calculs trop pénibles et il faut alors remettre le style dans l'axe du cône et dans les 2 cas transformer les azimuts et hauteurs par changement de coordonnées.

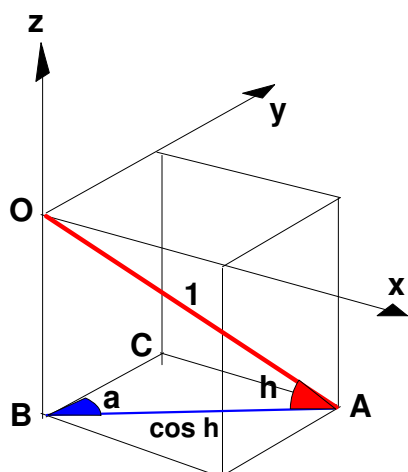
Le changement consiste à une rotation autour de l'axe Ox (Est-Ouest). Un point qui a pour coordonnées x, y, z dans le système Ox, Oy, Oz aura pour coordonnées x', y', z' dans le nouveau système Ox', Oy', Oz' :



$$z' = z \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi$$

$$y' = z \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi$$

$$x' = x$$



Le rayon solaire se définit par un segment OA de longueur unitaire placé à l'origine
Les coordonnées du point A dans Oz, Oy, Ox sont

	Ox	Oy	Oz
Point A	$\cosh \cdot \sin a$	$\cosh \cdot \cos a$	$-\sinh$

Dans le système Ox' , Oy' , Oz' elles deviennent :

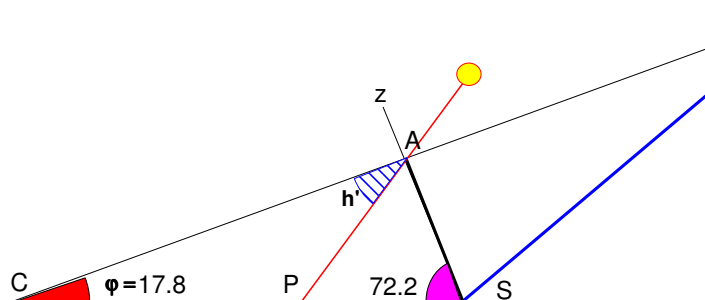
	Ox'	Oy'	Oz'
Point A	$\cosh \cdot \sin a$	$\cos \varphi \cdot \cosh \cdot \cos a - \sin \varphi \cdot \sinh$	$-\cos \varphi \cdot \sinh - \sin \varphi \cdot \cosh \cdot \cos a$

L'expression de la hauteur se recalcule par : $tgh = \frac{BO}{AB}$

L'azimut par : $\sin a = \frac{CA}{AB}$ d'où :

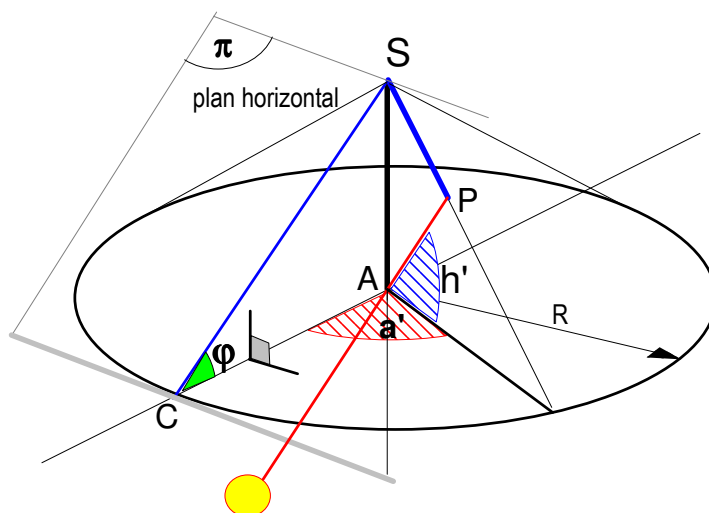
$$tgh' = \frac{\cos \varphi \cdot \sinh + \sin \varphi \cdot \cosh \cdot \cos a}{\sqrt{(\cosh \cdot \sin a)^2 + (\cos \varphi \cdot \cosh \cdot \cos a - \sin \varphi \cdot \sinh)^2}} = \frac{M}{\sqrt{N}}$$

$$\sin a' = \frac{\cosh \cdot \sin a}{\sqrt{N}}$$

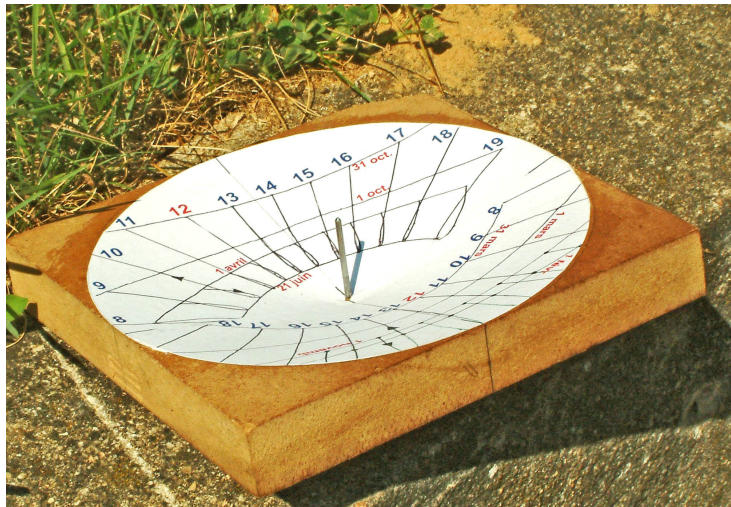


Dans ces conditions le calcul du graphique se simplifie beaucoup et on peut arriver au cadran où figurent d'un côté les heures d'été et du côté opposé les heures d'hiver.

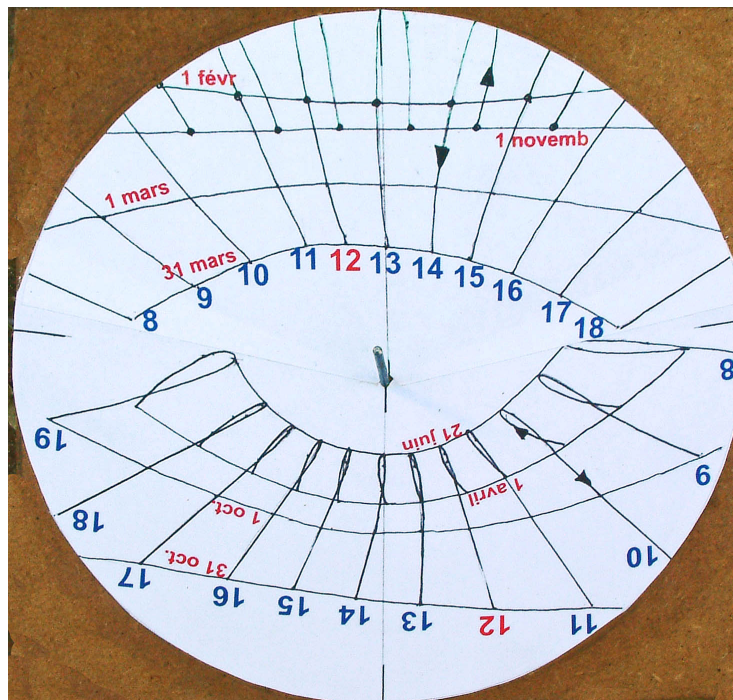
Il suffit de le retourner et de le basculer à chaque changement d'heure



Cadran en position de lecture d'été



Graphique en vue de dessus

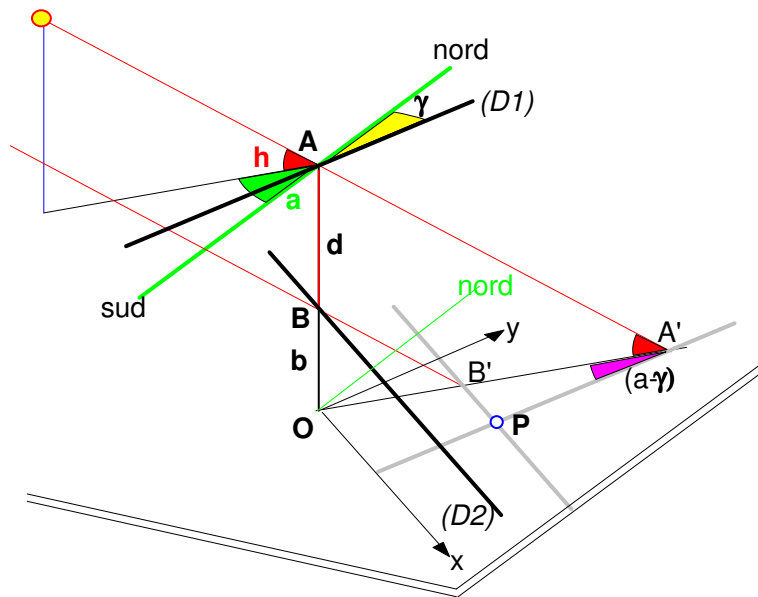


PARTIE 6a Cadrons bifilaires

Ces cadrans utilisent les ombres de 2 fils tendus parallèles au plan de projection. Le point d'intersection des 2 ombres décrit des courbes qui renseignent sur l'heure et la date. On s'intéresse aux plans horizontaux, verticaux, puis quelconques. Dans tous les cas leur plus courte distance (par définition perpendiculaire au plan) est à considérer dans les calculs et leur construction.

Ces cadrans présentent davantage d'intérêt géométrique et mathématique que pratique.

Bifilaire orthogonal horizontal



Les projections des fils se coupent sous un angle droit. La droite (D1) pourrait faire un angle (γ) avec la direction Nord-Sud

$AB = (d)$ est la distance entre (D1) et (D2) celle-ci étant à distance (b) du plan. A priori la droite supérieure (D1) a été orientée dans le quart Nord-Est et on considère le soleil de hauteur (h) et d'azimut (a) dont les rayons issus de A et B atteignent le plan en A' et B'. Comme les ombres sont parallèles aux droites, la position du point P se déduit de B' et A' et on cherche à calculer ses coordonnées dans le système (y, O ,

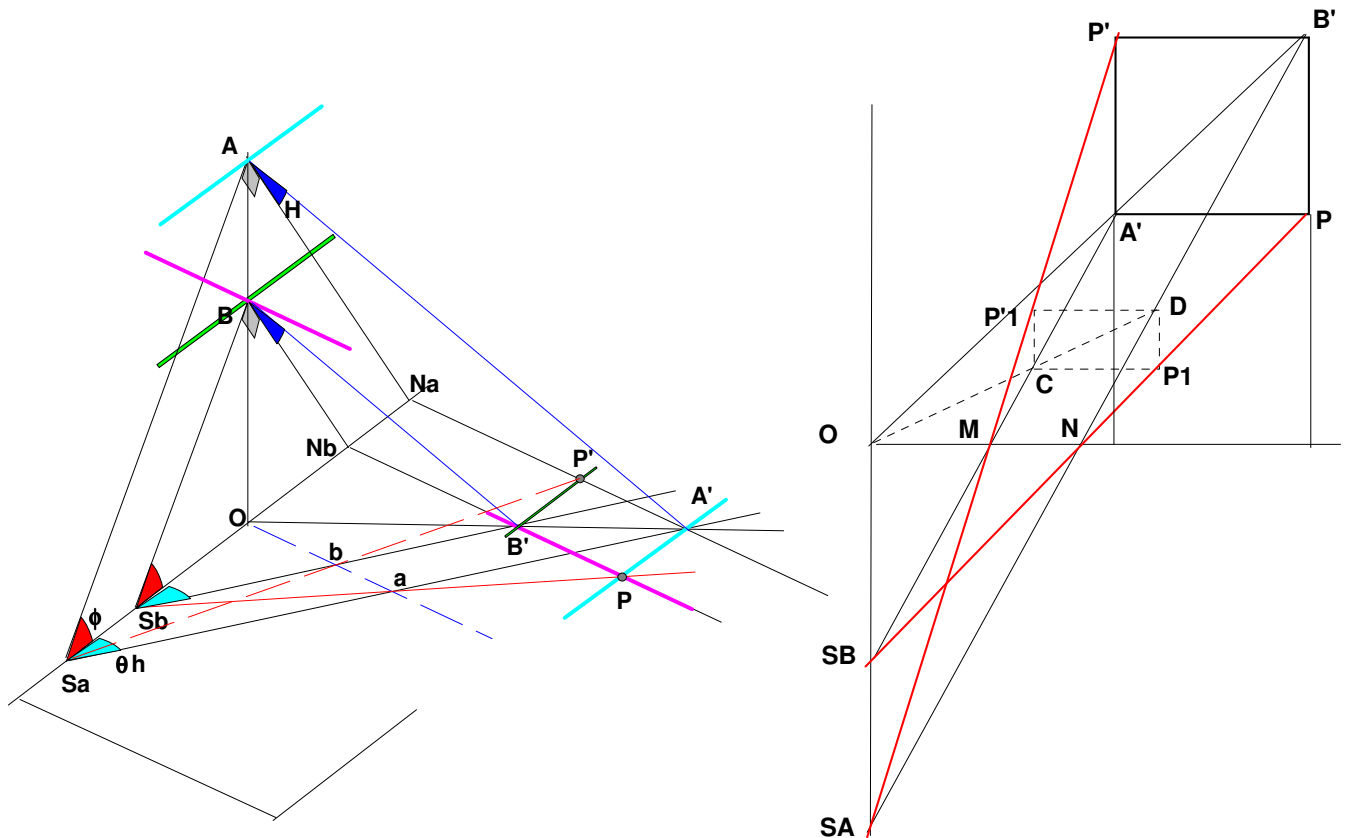
x) défini par la projection des 2 droites sur le plan

$$\begin{aligned} \text{On trouve : } OB' &= \frac{b}{\operatorname{tgh}} & OA' &= \frac{b+d}{\operatorname{tgh}} \\ x_P &= OA' \times \sin(a - \gamma) = \frac{b+d}{\operatorname{tgh}} \times \sin(a - \gamma) \\ y_P &= \frac{b}{\operatorname{tgh}} \times \cos(a - \gamma) \end{aligned}$$

Les calculs numériques (pour chaque heure et les 3 déclinaisons (-23.6, 0, +23.6 deg.) montrent des courbes hyperboliques analogues à celles des cadrans verticaux à déclinaisons Est ou Ouest. On observe que les points figuratifs d'une heure déterminée se déplacent sur une droite quand on parcourt l'étendue de déclinaison et que ces droites convergent en un point commun sur la ligne de midi

On notera cependant que pour ce type de cadran à position horizontale il n'y a pas de fortes raisons pour dévier la droite (D1) par rapport à la ligne Nord-Sud. Dans ce cas simplifié les graduations deviennent symétriques par rapport à la ligne midi.

Il peut paraître plus clair de traiter le problème par la géométrie pure :



AB plus courte distance entre les 2 fils est perpendiculaire au plan horizontal. Dans un plan vertical Nord-Sud, on trace les droites A,Sa et B,Sb qui sont inclinées d'un angle égal à la latitude (Φ) et figurent ainsi 2 cadrans classiques à style incliné.

Supposons une situation d'équinoxe avec les plans perpendiculaires à Sb,B et Sa,A. contenant le soleil

L'angle horaire (H) appliqué en A et B détermine alors les orientations des rayons solaires à l'heure (H) pour chaque cadran. Il en résulte sur le plan horizontal les traces parallèles d'angle (θh) qui déterminent les position des points A' et B' où passent les ombres des fils. Noter que A'B' prolongé passe par O et représente l'ombre du gnomon vertical OB

Les ombres sont parallèles à chaque fil et leurs intersections, P ou P' est fonction des positions relatives des fils

P quand le fil Nord-Sud est au dessus

P' quand le fil Nord-Sud est au dessous

Aux équinoxes les points P ou P' se déplacent sur les droites Nb B' ou Na,A' au cours de la journée.

Recherchons les lieux géométriques de P et P' quand l'heure est constante et que la variable est la déclinaison. Les points A' et B' se déplacent sur leurs droites horaires parallèles issues de Sa et Sb et seule l'ombre OA' du gnomon change d'orientation

La figure dans le plan horizontal est relative au cas défini par la droite OB' qui engendre le rectangle A'P'B'P. Une droite OD conduit à un rectangle D, P1, C, P'1.

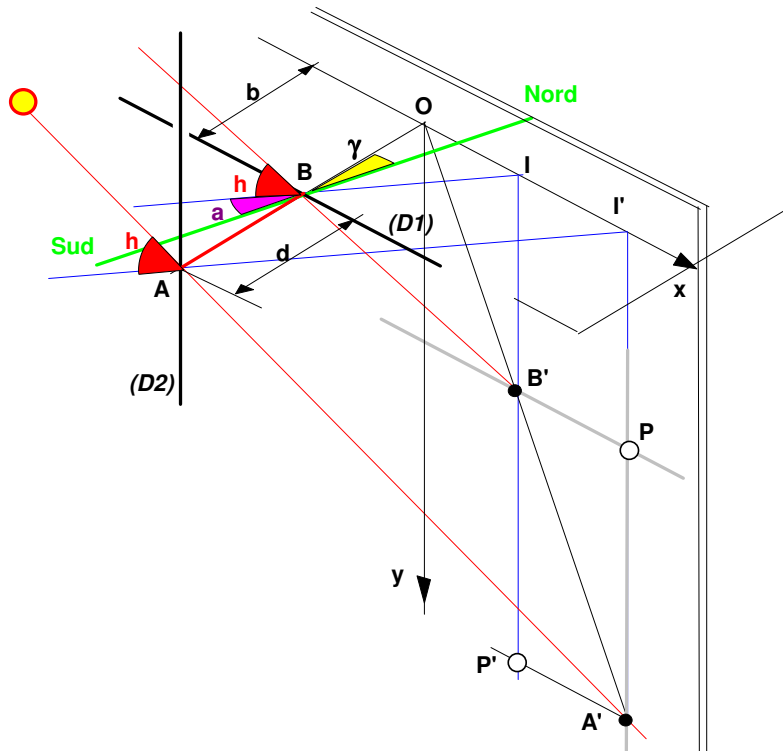
Traçons les droites SA-P', SB-P et MN perpendiculaire à SA

Les triangles semblables M, SA, SB et M,A', P' ont le même rapport d'homothétie que les triangles semblables N, SA, SB et N, P, B' donc MN est // à A'P et perpendiculaire à O, SA.

Quand la droite génératrice pivote autour de O le rectangle part du segment MN et s'étend de telle façon que le point P' se déplace sur la droite SA-M, et le point P sur la droite SB-N

En revenant au tracé des lignes horaires d'un cadran bifilaire horizontal, il suffit alors de calculer les angles horaires d'un cadran classique horizontal et les positions des pieds SA et SB correspondants aux positions des fils
 Si le fil supérieur est Nord-Sud SB-N est la ligne horaire
 Si le fil inférieur est Nord-Sud, la ligne SA-M est la ligne horaire

Bifilaire orthogonal vertical



Le schéma est analogue au précédent avec (D1) horizontale et parallèle au mur vertical qui a une déviation (γ) par rapport à Nord-Sud
 Le plan horizontal passant par la distance AB génère la trace Ox sur le plan vertical d projection. En plaçant en A et B les rayons solaires de hauteur (h) et d'azimut (a), on détermine les points A' et B' qui donnent les positions des 2 ombres dont le point de rencontre est P

Les coordonnées de P sont calculées dans le système x, O, y:

$$x_p = OI' = (b + d) \times \tan(a \pm \gamma)$$

$$y_p = IB' = \frac{b}{\cos(a \pm \gamma)} \times \tan h$$

Quand le fil inférieur (D1) est vertical les coordonnées deviennent celles de P'

$$x_{p'} = OI = b \times \tan(a \pm \gamma)$$

$$y_{p'} = A'I' = \frac{b + d}{\cos(a \pm \gamma)} \times \tan h$$

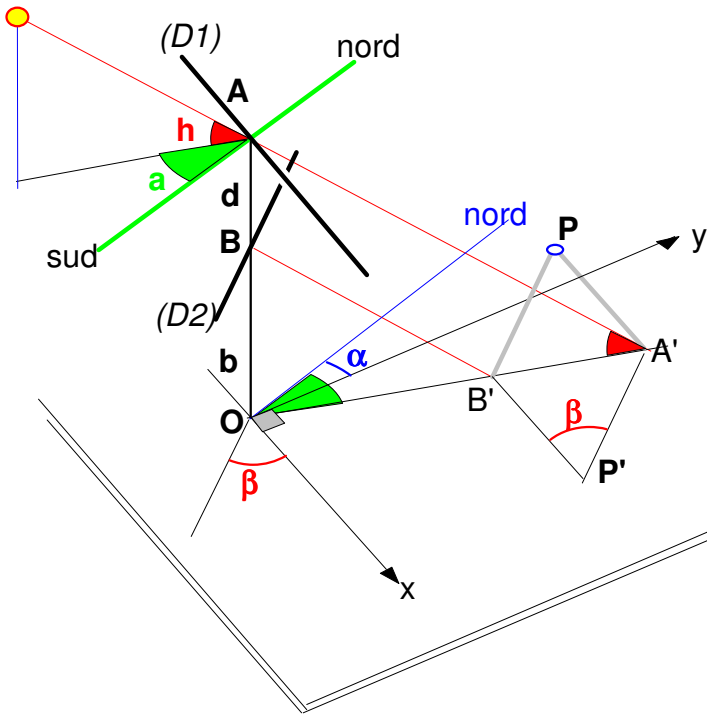
Cette disposition semble donner un meilleur dessin quand le mur est exactement Est-Ouest et ne supporte pas une déviation supérieure à 10 deg. (voir photo d'un prototype à 5 degrés). Comme précédemment les droites horaires convergent sur la ligne midi en des points calculables à partir des cadrans verticaux classiques



Bifilaire horizontale à fils non orthogonaux

Deux droites quelconques peuvent créer un cadran pourvu qu'elles soient parallèles au plan qui reçoit leurs ombres, Les études précédentes à fils orthogonaux ne correspondaient qu'à des cas particuliers.

Pour faciliter les calculs, les 2 droites sont projetées sur le plan et on en choisit une comme axe des (x), qui se trouve ainsi orienté par rapport au Nord de l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$. L'autre droite est définie par l'angle β entre projections des droites



Deux rayons solaires portés par leur azimut (a) et leur hauteur (h) engendrent l'ombre OB'A' et les ombres parallèles aux droites se rencontrent au point P (ou en intervertissant les droites au point P'')

Coordonnées de P' à partir de celles de B'

$$yB' = OB' \times \cos(a - \alpha) = \frac{b}{\text{tgh}} \times \cos(a - \alpha)$$

$$xB' = \frac{b}{\text{tgh}} \times \sin(a - \alpha)$$

Dans le triangle A'B'P' l'angle P' est = β

et l'angle B' = $\frac{\pi}{2} - (a - \alpha) = \frac{\pi}{2} + \alpha - a$

L'angle en A' =

$$\pi - \beta - \frac{\pi}{2} - \alpha + a = \frac{\pi}{2} + a - (\alpha + \beta)$$

Et on calcule facilement A'P = B'P' par la formule des sinus

$$\frac{B'P'}{\sin A'} = \frac{B'A'}{\sin \beta} \Rightarrow B'P' = \frac{d}{\text{tgh}} \times \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + a - \alpha - \beta)}{\sin \beta}$$

$$xP' = XB' + B'P' = \frac{b}{\text{tgh}} \times \sin(a - \alpha) + \frac{d}{\text{tgh} \times \sin \beta} \times \sin(\frac{\pi}{2} + a - \alpha - \beta)$$

$$yP' = yB' = \frac{b}{\text{tgh}} \times \cos(a - \alpha)$$

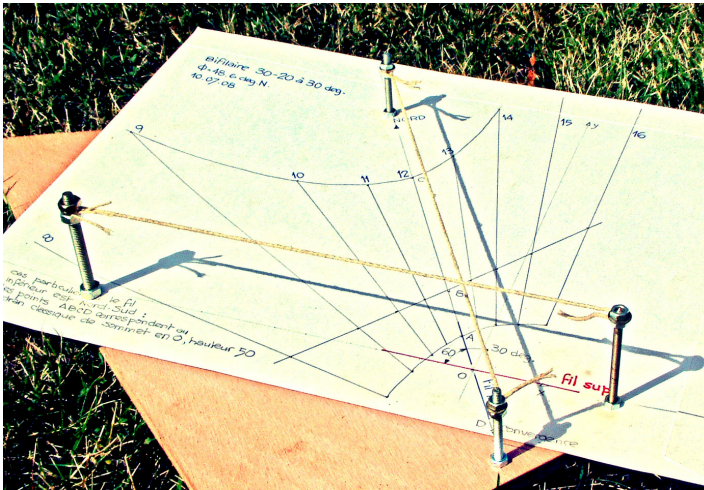
Quand les fils sont inversés, les calculs au point P donnent :

$$yP = \frac{b + d}{\text{tgh}} \times \cos(a - \alpha)$$

$$xP = \frac{b + d}{\text{tgh}} \times \sin(a - \alpha) - \frac{d}{\text{tgh} \times \sin \beta} \times \sin(\frac{\pi}{2} + a - \alpha - \beta)$$

(avec $\alpha = 0$ et $\beta = \pi/2$ on retrouve les formules du cadran à fils orthogonaux)

Ces calculs conduisent à un tracé par points



Quand $\alpha = 0$ et $\beta = 90$ le graphique est symétrique, la ligne midi est confondue avec Nord-Sud et la ligne équinoxe est perpendiculaire

Quand $\alpha = 0$ et $\beta < 90$ deg. la ligne midi s'incline vers l'Ouest et vers l'Est pour $\beta > 90$, cependant la ligne équinoxe reste orientée Est-Ouest

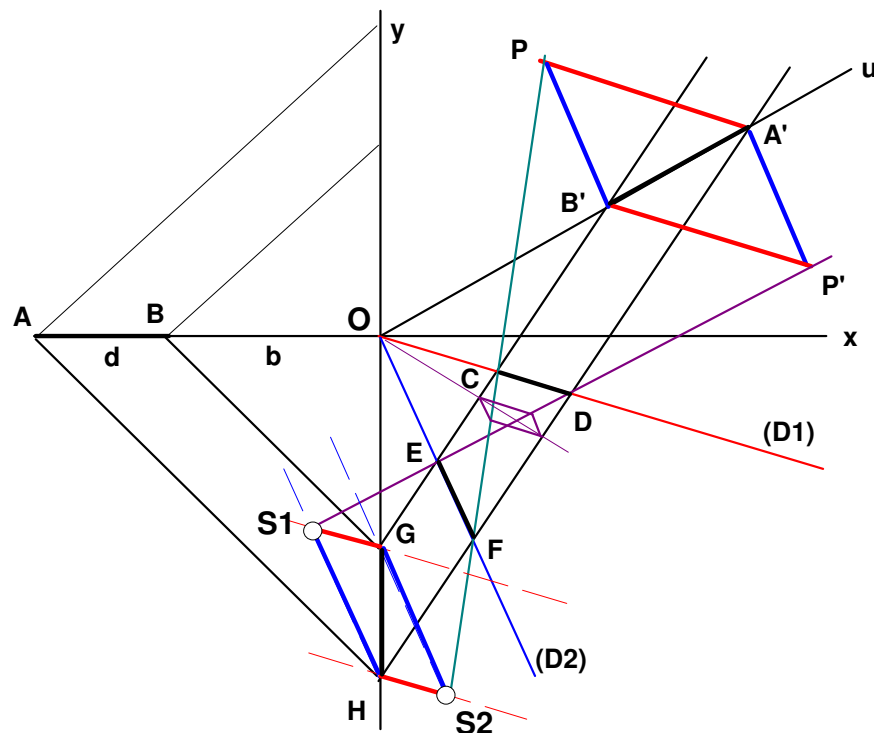
Dès que α est différent de 0 la ligne équinoxe s'incline

Dans le cas particulier ci-dessous, l'angle α vaut 30 deg. le fil supérieur est parallèle à l'axe des (x) et l'angle β a la valeur de 60 deg. Ceci lui donne la direction Nord-Sud et fait que toutes les lignes horaires

convergent sur un point de la ligne midi (au point qui correspond au pied d'un cadran classique à arête inclinée dont le sommet serait à la hauteur du fil supérieur)

Dans tous les autres cas le point de convergence existe mais se trouve extérieur à la ligne midi

Géométrie plane du bifilaire non orthogonal

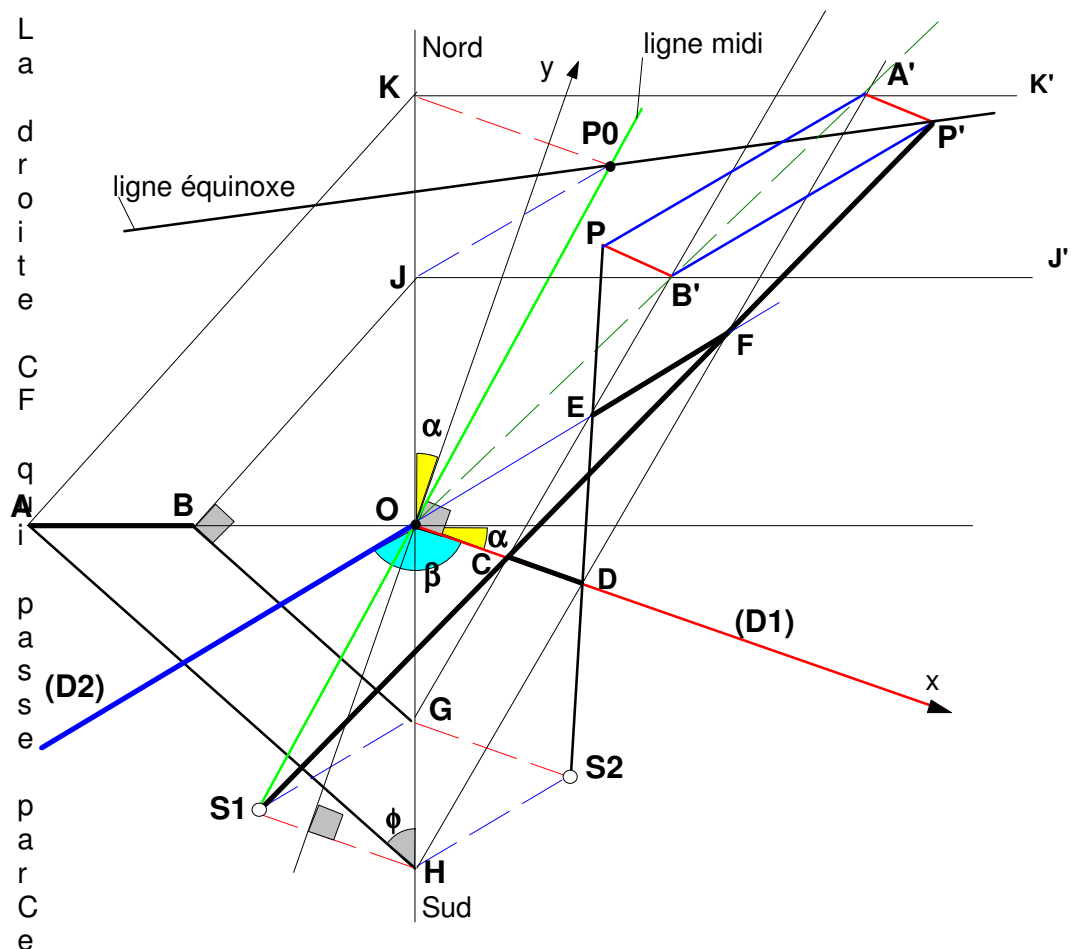


L'étude des bifilaires revient à s'intéresser à l'ombre d'un mat vertical de hauteur $(b + d)$ portant un repère à la hauteur b . Il est connu qu'au cours de l'année l'ombre change de longueur et d'orientation. Cependant le lieu géométrique de son extrémité est la droite horaire définie sur le plan horizontal par un cadran à style incliné de même hauteur. Donc les points A' et B' de l'ombre du poteau se déplacent sur des parallèles quand l'heure est constante et la déclinaison variable. Les droites $(D1)$ et $(D2)$ représentent les projections des fils. Leurs directions conduisent au tracé de parallélogrammes tels que $P'A'PB'$ lorsque l'ombre du poteau change d'orientation avec la déclinaison.

Pour trouver le lieu géométrique des points P et P' il faut examiner la rotation complète de la droite Ou autour du point O . Lorsque Ou se confond avec $(D1)$ le parallélogramme se réduit au segment CD avec P en C et P' en D . Puis Ou se confond

avec (D2) et par déformation du parallélogramme le point P' se trouve en E. Finalement Ou vient sur Oy et le parallélogramme est S1, G, S2, H
 Donc pour une heure déterminée le point P' se déplace sur la droite DE qui passe par le point S1 et le point P se déplace sur CF qui passe par S2
 Si on considère une heure différente, la figure se construit à partir de 2 parallèles issues des points G et H et les droites qui portent les points P' et P passent encore par les points S1 et S2 puisque le parallélogramme S1, G, S2, H reste invariable
 Conclusion : Si (D1) est en position supérieure le point de rencontre des ombres est le point P et toutes les droites horaires du cadran convergent au point S2. Inversement quand (D2) est au dessus les lignes horaires sont plus écartées et convergent en S2. Dans ces 2 cas on observe que la ligne midi n'est pas dans le plan Nord-Sud passant par la ligne AB
 Si (D2) est orientée Nord-Sud, les points S1 et S2 viennent se confondre avec les points G et H et la ligne midi reprend sa place habituelle.
 On peut en déduire une méthode graphique pour déterminer quelques lignes et points remarquables

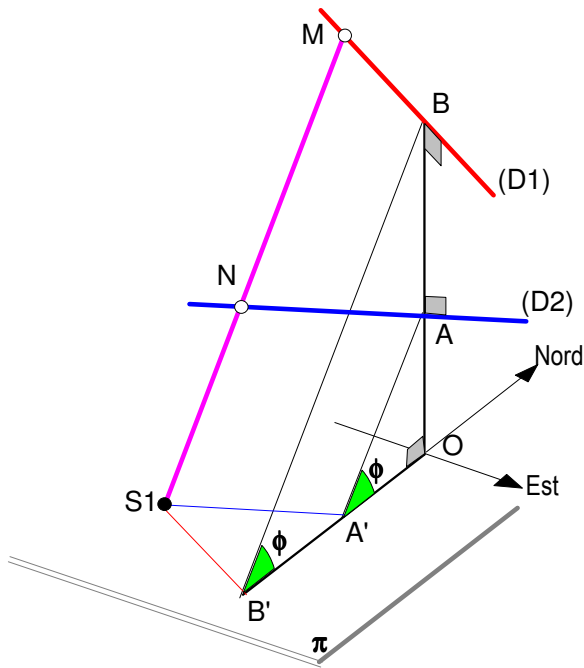
HAK et GBJ sont les cadrans fictifs avec les lignes équinoxes KK' et JJ' sur le plan horizontal. (D1) correspond au fil supérieur et (D2) à l'autre.
 Les points P0, S1, S2 sont tracés avec des parallèles aux droites.
 Aux pieds G et H des cadrans tracer 2 parallèles quelconques, celle issue de H correspond à (D1) et celle du point G à (D2). Elles coupent les parallèles KK' et JJ' en A' et B' dont le prolongement passe au point O et représente une ombre de OBA



Les 2 parallèles coupent la projection de (D1) en C et D et celle de (D2) en E et F
 Les points S1 C F P' sont alignés et la droite est le lieu du point P' à l'heure considérée. (La droite ED passe en S2 et porte le point P quand (D2) est en position supérieure)
 La droite OP0 est la ligne de midi qui n'est pas portée par la direction Nord-Sud

Oy perpendiculaire à (D1) et Ox, porté par OD sont les références de calculs par points qui conduisent aux valeurs suivantes

$$y = -OH \times \cos \alpha = -\frac{b+d}{tg \phi} \times \cos \alpha$$

$$x = OH \times \sin \alpha + HS_1 = \frac{b+d}{tg \phi} \times \sin \alpha \pm \frac{d \times \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta)}{tg \phi \times \sin \beta}$$


Dans le plan horizontal (π) A'S1 parallèle à (D2) et B'S1 parallèle à (D1) définissent le point S1. La parallèle S1M à l'axe du monde issue de S1 rencontre les 2 droites aux points N et M. En effet le plan défini par B'S1 et B'B contient la droite (D1) et le plan défini par A'S1 et A'A contient la droite (D2), donc leur intersection S1NM est bien parallèle à l'axe du monde et possède un point com-

Cette propriété est indépendante de l'orientation du plan mais n'existe que si les droites lui sont parallèles.

Bifilaire sur plan incliné quelconque

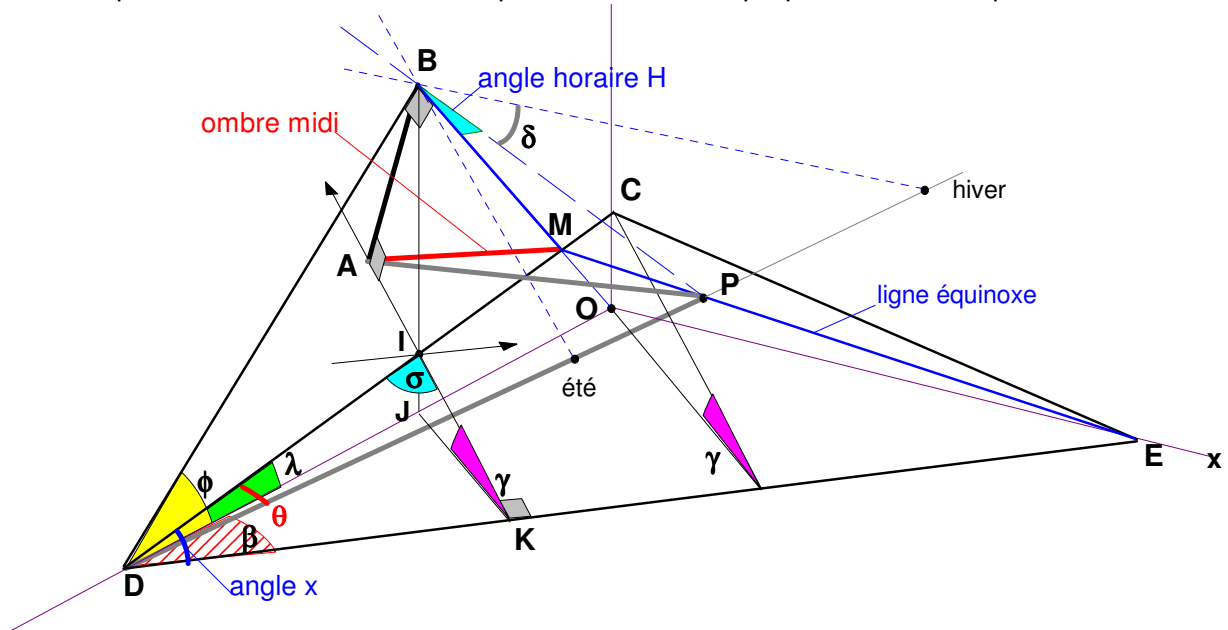
Etude de l'ombre d'un bâton planté à angle droit sur un sol plan quelconque

Cette étude est nécessaire à la compréhension et la détermination des cadrans bifilaires dans leur sens le plus général.

Dans un trièdre orienté Nord-Sud, Est-Ouest, on place dans le plan Nord-Sud un style DB (incliné de ϕ , angle de latitude) avec BO perpendiculaire à DB pour que BOx corresponde au plan équinoxe issu du sommet B.

Le plan incliné se définit par l'angle β en D et par sa plus grande pente γ .

Dans un plan vertical, passant par B et perpendiculaire à DE, la projection BA du point B sur l'intersection IK représente un bâton perpendiculaire au plan BDE



A une heure caractérisée par l'angle horaire (H), la droite DP est l'ombre, d'angle θ constant, du style sur le plan incliné.

A l'équinoxe l'ombre du point B est en P et AP est l'ombre cherchée du bâton.

Le point P déterminé par l'heure (H) et la déclinaison se déplace donc sur des droites qui convergent au point D

Le problème est de calculer les positions de P en choisissant des références favorables sur le plan incliné.

Les seuls paramètres sont : la longueur (l) du bâton, l'angle de pente (γ) l'angle (β) sur le plan horizontal et la latitude (ϕ). Comme il paraît nécessaire de partir du point D et des angles (θ) la référence doit être la droite DC qui est la ligne midi Nord-Sud du style DB sur le plan CDE.

Pour trouver le point D il faut résoudre le triangle BID où l'on connaît :

$$BI = \frac{l}{\cos \gamma} \quad \text{angle en B : } \frac{\pi}{2} - \phi \quad \text{angle en I : } \frac{\pi}{2} + \lambda$$

$$\text{qui donne : } DB = \frac{BI \sin(\frac{\pi}{2} + \lambda)}{\sin(\phi - \lambda)} = \frac{l \times \sin(\frac{\pi}{2} + \lambda)}{\cos \gamma \times \sin(\phi - \lambda)}$$

$$DI = \frac{l \times \cos \phi}{\cos \gamma \times \sin(\phi - \lambda)}$$

L'angle (λ) a été calculé par trigonométrie sphérique dans le trièdre D, I, J, K qui donne :

$$\text{tg } \lambda = \sin \beta \times \text{tg } \gamma$$

Pour tracer la position du pied A il faut calculer l'angle (σ) après celle de l'angle (x) en B du triangle CDE, obtenu dans le trièdre D, I, J, K par :

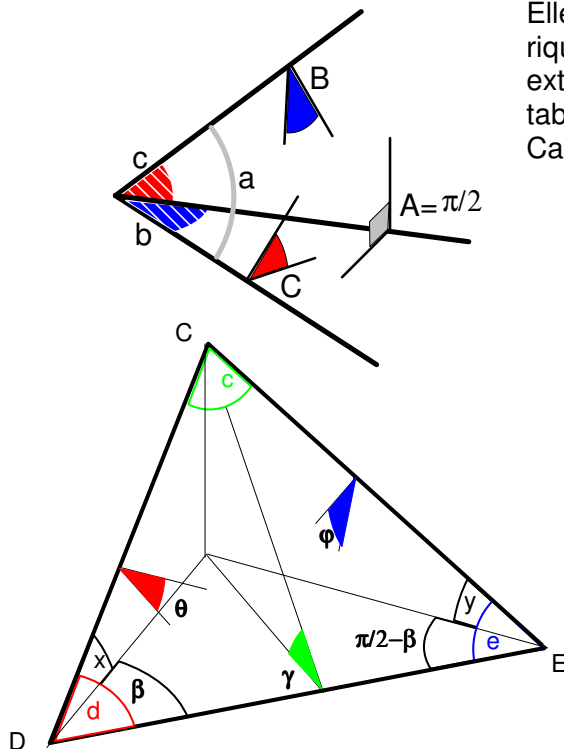
$$\frac{\sin x}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \lambda}{\sin \gamma} \rightarrow \sin x = \frac{\sin \lambda}{\sin \gamma} \text{ ou mieux } \cos \sigma = \frac{\sin \lambda}{\sin \gamma} \text{ puis } IA = l \times \tan \gamma$$

Pour tracer la ligne équinoxe ME la position de M est : $DM = \frac{DB}{\cos(\phi - \lambda)}$

L'angle DME demande la résolution du triangle MDE où sont connus :

$$DM, \quad \text{l'angle } x, \quad \text{le côté } DE = \frac{DO}{\cos \beta} = \frac{DB}{\cos \phi \times \cos \beta}$$

Rappel de caractéristiques utiles du plan incliné



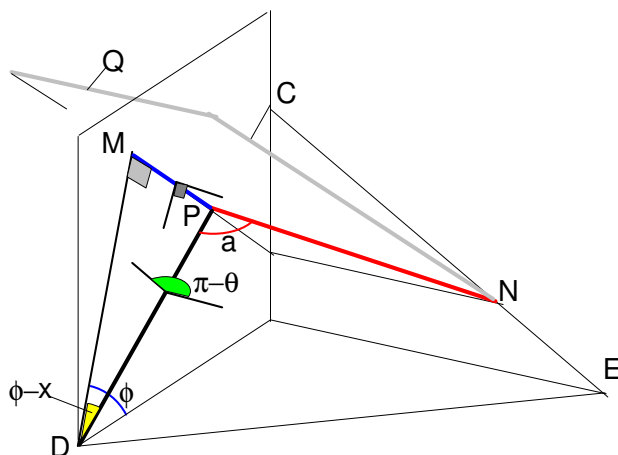
Elles se trouvent par la résolution des triangles sphériques rectangles dont les formules ci-dessous sont extraites page 34 des Règles et Formules usuelles de la table de logarithmes Bouvard & Ratinet (édition 1946)

Cas où b et C sont connus

$$\begin{aligned} tga &= \frac{tgb}{\cos C} \\ tgc &= \sin b \times \tan C \\ \cos B &= \cos b \times \sin C \end{aligned}$$

En appliquant on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Au point D : } tgd &= \frac{tg\beta}{\cos \gamma} \\ tgx &= \sin \beta \times \tan \gamma \\ \text{Au point E : } tge &= \frac{1}{tg\beta \times \cos \gamma} \\ tgy &= \cos \beta \times \tan \gamma \end{aligned}$$



$$\cos \phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \times \sin \gamma = \sin \beta \times \sin \gamma$$

$$\cos \theta = \cos \beta \times \sin \gamma$$

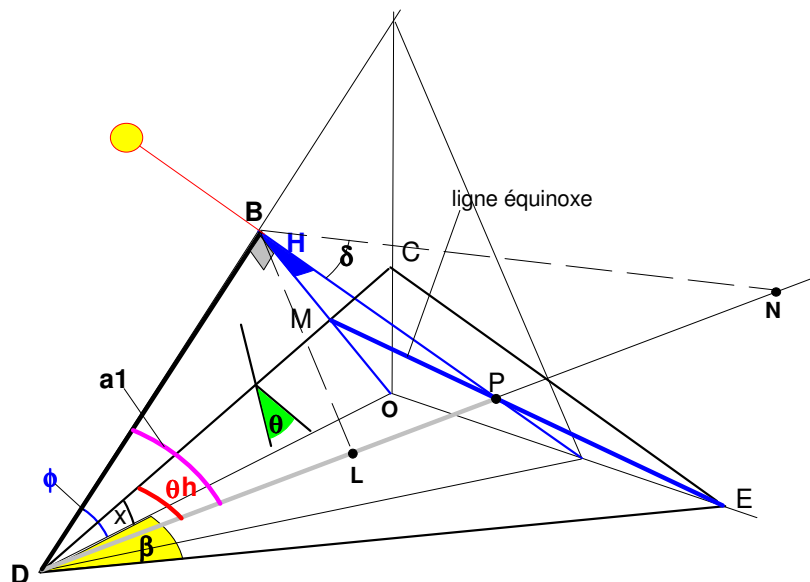
Calcul d'angle de la ligne équinoxe :

C'est l'intersection PN du plan avec un plan perpendiculaire au style et construit à son extrémité

$$tga = \frac{tgb}{\cos C} = \frac{-1}{tg(\phi - x) \cdot \cos \theta}$$

Rappel des calculs pour un cadran sur plan quelconque

Ces calculs sont développés en détail dans la partie « newcadsolpart3)



Considérer le trièdre de sommet D et d'arêtes DB, DC, DP

L'angle horaire H correspond à l'angle de face θh

L'angle $(\pi - \theta)$ correspond à l'angle de face $a1$

L'angle de la 3ème face est : $\Phi - x$

Avec la notation $a = a1$ $A = \pi - \theta$
 $b = \theta h$ $B = H$
 $c = \Phi - x$ $C = \text{non concerné}$

Par résolution du trièdre où l'on connaît : c, A, B on obtient a et b par les formules :

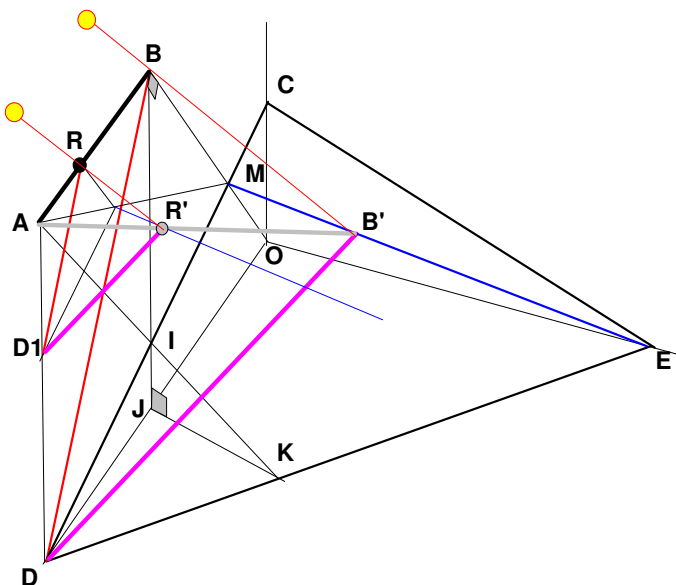
$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2} \times \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \quad \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{A-B}{2} \times \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}$$

Les longueurs d'ombres se calculent à partir de la longueur du style, de l'angle (a1)

et de l'angle $\frac{\pi}{2} \pm \delta$

ME est la droite équinoxe.

Propriétés du graphique bifilaire



Les points R et B des 2 fils appartiennent à leur perpendiculaire commune et il faut déterminer leurs ombres R' et B' sur le plan CDE. A l'aide d'un cadran d'arête BD on a déterminé l'ombre de DB, par exemple à l'équinoxe, dont la longueur conduit au point B'. On peut construire le point R' sur AB' par le rapport de proportionnalité $\frac{AR'}{AB'} = \frac{AR}{AB}$. Mais on pourrait aussi le construire comme pour B avec un petit cadran RD1 dont la base D1 sur le plan CDE appartient à la droite AD et qui donnerait une ombre D1R' parallèle et homothétique à DB'.

On voit alors apparaître un problème de géométrie plane avec une droite AD portant un point D1, des droites parallèles issues de D et D1 et des sécantes issues

de A déterminant des points R' et B' qui sont utilisés pour tracer des parallélogrammes dont les côtés sont toujours parallèles à des directions fixes. (L1 et L2) Quels sont les lieux géométriques des sommets des parallélogrammes ainsi construits ?

En faisant tourner la droite (L) autour du point A, le parallélogramme se déforme et se réduit à un simple segment en passant sur L1 et L2. Sur la ligne AD le parallélogramme a une forme finale S1 D S2 D1. qui est indépendante de l'orientation des 2 parallèles. On démontre à l'aide de triangles semblables que les diagonales du trapèze b d passe en S1 et a e passe par S2 et ceci est vrai quelles que soient les directions des 2 parallèles issues de D et D1

Conclusion :

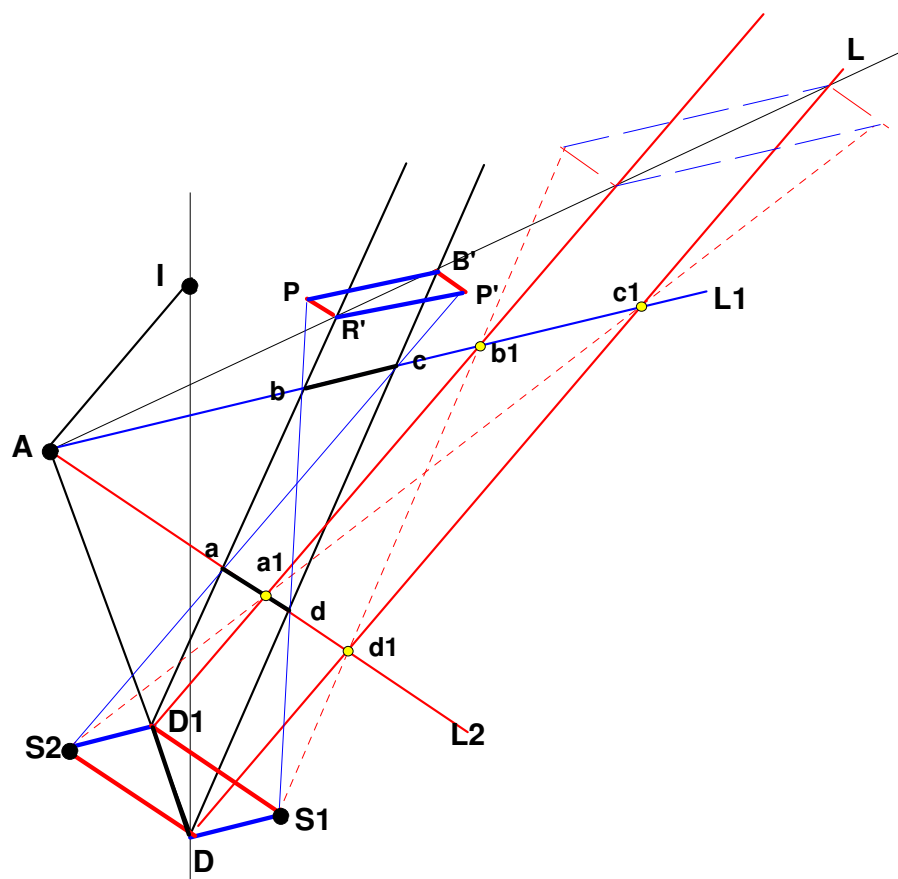
Quand le fil supérieur a la direction L1, les points P de croisement des ombres se trouvent sur des droites horaires qui convergent au point S1

Quand le fil supérieur a la direction L2 les droites horaires du point P' convergent au point S2.

La propriété est générale et les positions de S1 et S2 ne dépendent que de l'angle entre les fils.

Quand le cadran a une pente dans l'axe Nord-Sud, les points A et D1 sont situés sur la droite ID

Quand les fils sont orthogonaux et dirigés Nord-Sud et Est-Ouest le point S1 vient en D et le point S2 en D1



Méthode de tracé

Le calcul par points en coordonnées rectangulaires est déconseillé et le mieux est de combiner calculs et tracés

Les positions relatives des points D, I, M sont calculées en fonction de la hauteur du fil le plus élevé et cette droite est à placer Nord-Sud. On trace ensuite la position du point A après calcul de IA et de l'angle σ . Le point D1 situé sur DA le partage proportionnellement aux hauteurs des fils

$$\frac{AD1}{AD} = \frac{h_{filhaut}}{h_{filbas}}$$

A partir du style de longueur calculé DB, utiliser le calcul d'un cadran sur plan incliné et tracer les lignes horaires et les positions de l'extrémité de l'ombre aux solstices et à l'équinoxe.

Ayant choisi les positions angulaires des fils et la hauteur du fil inférieur, tracer pour chaque heure les droites issues de A qui représentent l'ombre de AB et sur ces droites situer par un partage proportionnel la position du point du fil inférieur.

A partir de ces 2 derniers points tracer les triangles dont les côtés sont parallèles aux fils. Le sommet obtenu correspond au croisement des ombres. En joignant les 3 points construits aux solstices et à l'équinoxe d'une même heure, on obtient la ligne horaire du bifilaire

On peut vérifier la précision du tracé en observant la convergence sur le point S1 ou S2 suivant la hauteur affectée à chaque fil.

On gagne du temps en ne traçant que les triangles à l'équinoxe et en joignant directement les points obtenus à S1 ou S2

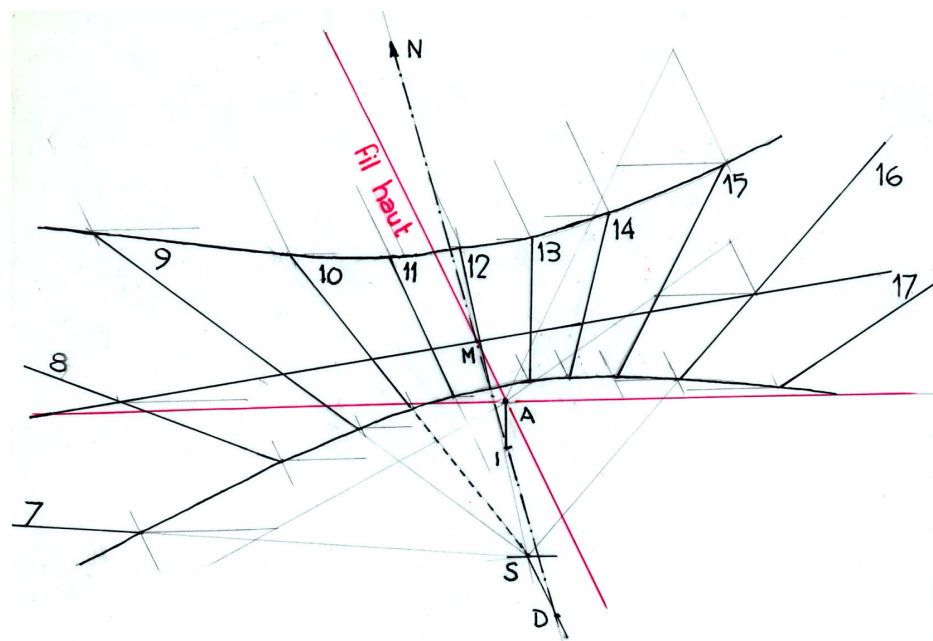
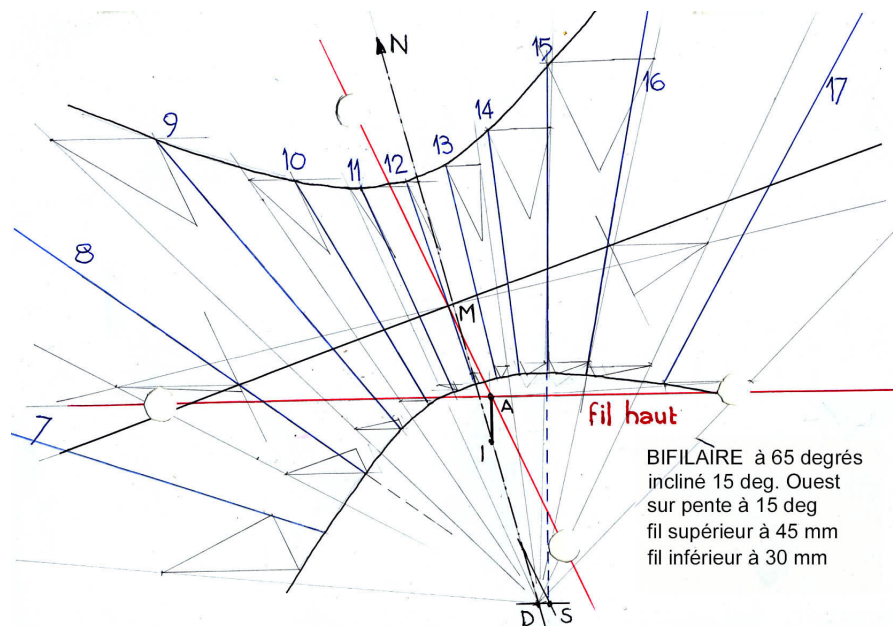
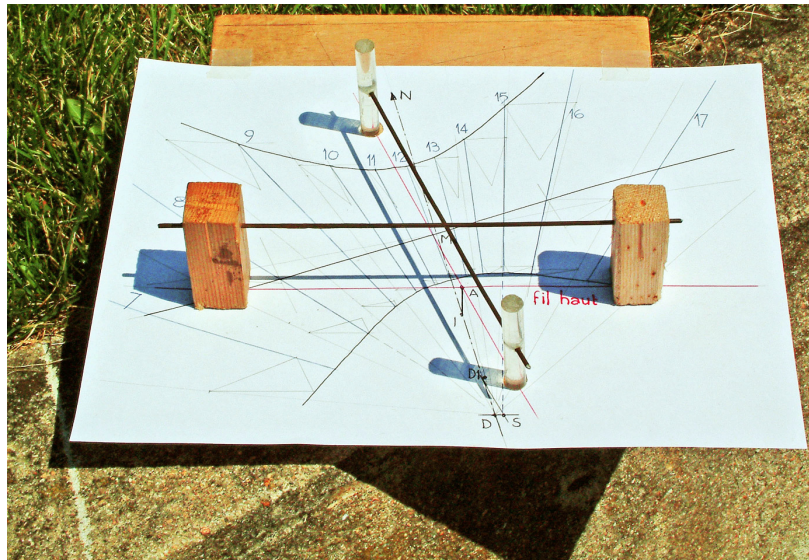
La figure montre un cadran sur une pente de 15 degrés orientée vers l'Ouest de 15 degrés.

Les triangles sont construits sur les ombres fictives de AB, leurs cotés convergent sur le point A, la longueur de ce coté est calculée proportionnelle à la distance entre fils par rapport à la hauteur du fil supérieur. Les autres cotés parallèles aux fils permettent de passer des lignes horaires du cadran de sommet D au graphique bifilaire.

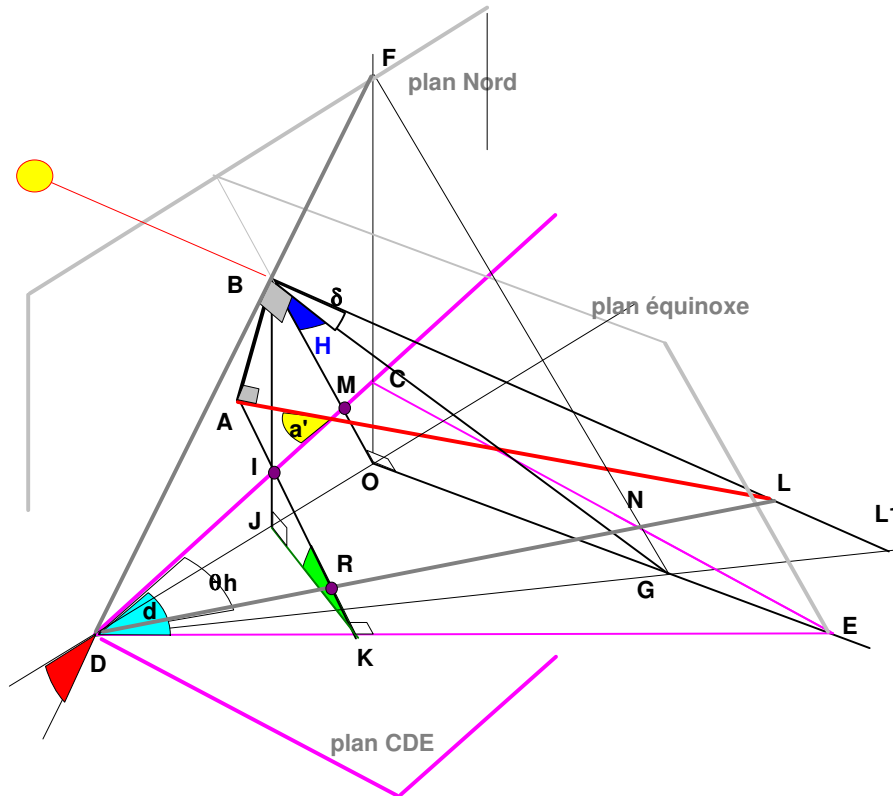
Les lignes du cadran convergent en D celles du bifilaire convergent en S

Les lignes équinoxe ont un point commun M

Quand les positions des fils sont inversées, le graphique devient assez différent

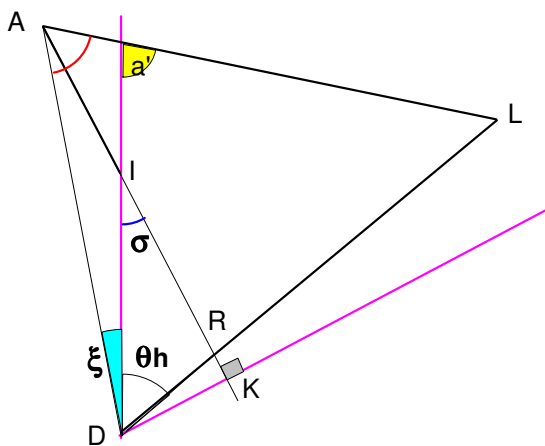


Comment calculer les lignes par points ?



La figure antérieure est reprise où AB est perpendiculaire au plan CDE. BD est un cadran établi à partir du point B dans le plan vertical Nord-Sud. Dans le plan équinoxe perpendiculaire à DB est tracé un angle horaire (H) qui définit un plan DFG qui coupe le plan CDE suivant la droite DN. Dans le plan DFG le soleil a une position donnée par la déclinaison (δ) et la droite DL est l'ombre du style DB sur le plan CDE.

Par conséquent la droite AL est l'ombre de AB.



Il a été vu précédemment qu'on savait calculer dans le plan CDE les positions des points A, M, I, D avec DM qui est la référence Nord-Sud. Et il suffit alors de pouvoir calculer l'angle d'azimut (a') de l'ombre AL par rapport à DM

Les points A, I, D sont fixes, il reste à étudier la variation de l'angle (a') et de la longueur AL quand θh et la longueur DL varient
D'abord résolution du triangle IAD avec 2 côtés un angle ($\pi - \sigma$) en I

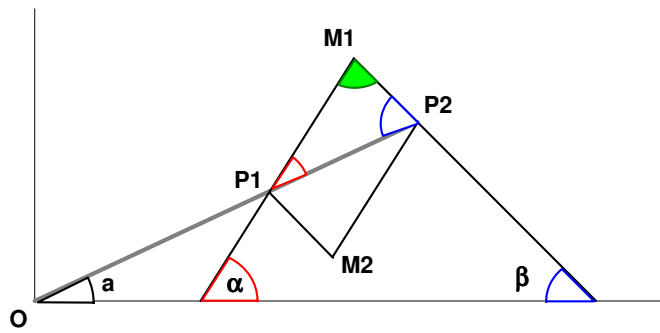
$$\hat{A} + \hat{D} = \sigma$$

$$tg \frac{A - D}{2} = \frac{ID - IA}{ID + IA} \times tg \frac{A + D}{2} \quad \text{etc}$$

De même résoudre le triangle ADL où sont connus l'ombre DL, la longueur AD et l'angle $\hat{D} = \theta h + \xi$ pour avoir AL et l'angle en A

L'azimut de l'ombre de AB est alors : $a' = \hat{A} - \xi$

Il reste à définir sur l'ombre AL le point correspondant au fil inférieur, puis de construire les parallélogrammes de côtés parallèles aux fils.



La résolution du triangle P1M1P2 donne les longueurs P1M1 et P2M2

Il peut paraître prudent de définir β dans le sens trigonométrique qui donne aux angles du triangle P1M1P2 les valeurs

En P2 : $\pi - \beta + a$

En P1 : $\alpha - a$

En M1 : $\beta - \alpha$

$$\frac{P1P2}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{P1M1}{\sin(\beta + a)} = \frac{P2M1}{\sin(\alpha - a)}$$

A partir des coordonnées de P1, calculer les coordonnées de M1 et M2

$$xM1 = xP1 + P1P2 \frac{\sin(\beta + a)}{\sin(\pi - \beta - \alpha)} \times \cos \alpha$$

$$xM2 = xP1 + P1P2 \frac{\sin(\alpha - a)}{\sin(\pi - \beta - \alpha)} \times \cos \beta$$

Puis de même pour les y....etc

Le tracé par calcul de coordonnées est donc possible, mais il est bien long à programmer et demande des contrôles du signe de l'angle ξ (qu'il faut changer vers midi !)

La méthode mixte, calculs puis tracé à partir des lignes horaires du cadran à style incliné est donc plus compréhensible et fiable.

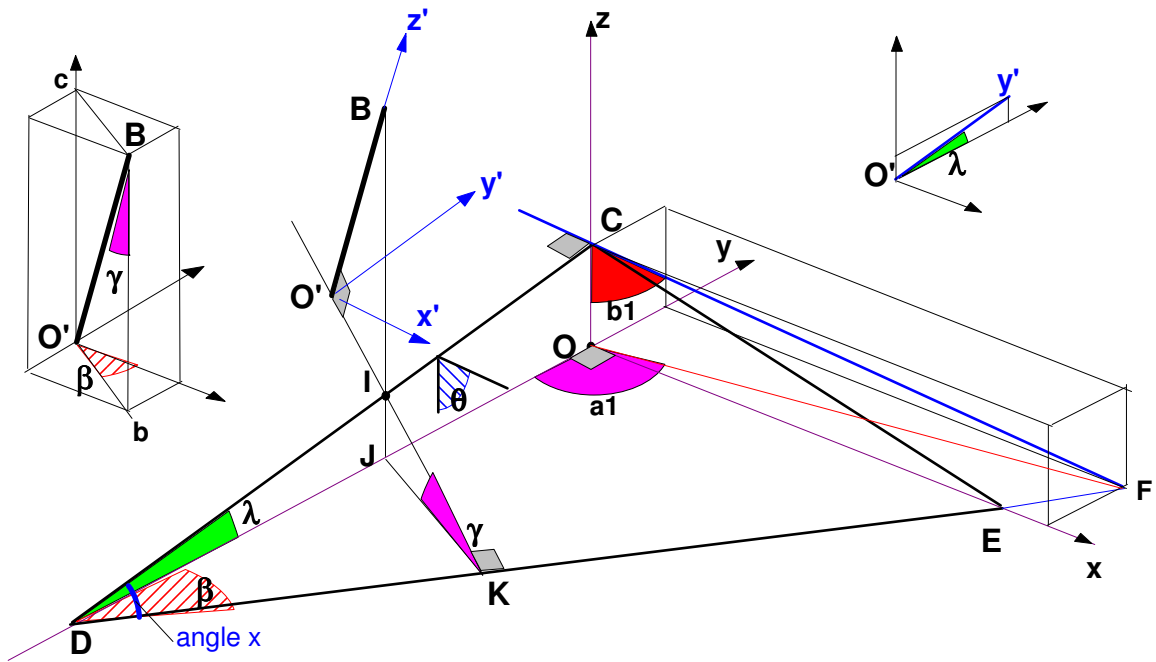
La méthode suivante par changement de coordonnées en utilisant les azimuth et hauteur solaire est intéressante mais pas moins laborieuse.

Calcul de l'ombre d'un mat perpendiculaire à un plan quelconque par changement de coordonnées pour utiliser les hauteur et azimuth soleil

Références choisies : L'axe du bâton pour O'z''
La direction Nord sur le plan pour O'y''
La perpendiculaire à O'y' sur le plan pour O'x''

Les références initiales étant
La verticale Oz
Le Nord pour Oy dans le plan horizontal
L'Est pour Ox dans le plan horizontal

Le plan est défini par l'angle β par rapport au Nord, de sa trace sur un plan horizontal et par son angle γ de plus grande pente par rapport à un plan horizontal. A l'aide d'un changement de coordonnées, on se propose d'exprimer l'azimut et la hauteur solaire, connus dans les références (O,x, y, z), dans les coordonnées (O', x', y', z') pour calculer l'ombre du Point B (sommet d'un gnomon perpendiculaire au plan).



Les axes $O'z'$ et $O'y'$ sont figurés ci-dessus. L'axe $O'x'$ est plus complexe
 CF , segment unitaire de $O'x'$ est perpendiculaire à CD et appartient au plan CDE
 L'angle θ entre le plan CDE et le plan vertical zOy est connu : $\cos \theta = \cos \beta \times \sin \gamma$
 L'angle λ est aussi connu : $\tan \lambda = \sin \beta \times \tan \gamma$

On résout ensuite le trièdre rectangle D, C, O, E qui donne : $\tan x = \frac{\tan \lambda}{\cos \theta} = \frac{\tan \beta}{\cos \gamma}$

Dans le triangle rectangle DCF on a :

$$CF = CD \times \tan x = \frac{OC}{\cos b1} = \frac{CD \times \sin \lambda}{\cos b1}$$

D'où $\cos b1 = \frac{\sin \lambda}{\tan x} = \cos \theta \times \cos \lambda$

Dans le trièdre C, D, O, F , on calcule l'angle ($a1$) par :

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin a1} = \frac{\sin b1}{\sin \theta} \Rightarrow \sin a1 = \frac{\sin \theta}{\sin b1}$$

Ecrire les cosinus directeurs des segments unitaires des axes O', x', y', z' dans le système initial O, x, y, z

	Sur Ox	Sur Oy	Sur Oz
$O'x'$	α $\sin b1 \times \cos(a1 - \frac{\pi}{2})$	β $\sin b1 \times \sin(a1 - \frac{\pi}{2})$	γ $-\cos b1$
$O'y'$	α' 0	β' $\cos \lambda$	γ' $\sin \lambda$
$O'z'$	α'' $\sin \gamma \times \cos \beta$	β'' $-\sin \gamma \times \sin \beta$	γ'' $\cos \gamma$

On peut maintenant calculer ce que deviennent les azimuts et hauteurs solaires dans les références $O' x' y' z'$.

En se fixant sur la figure ci-dessous :

$OM = 1$, les coordonnées initiales de M et N sont exprimées sur ce tableau

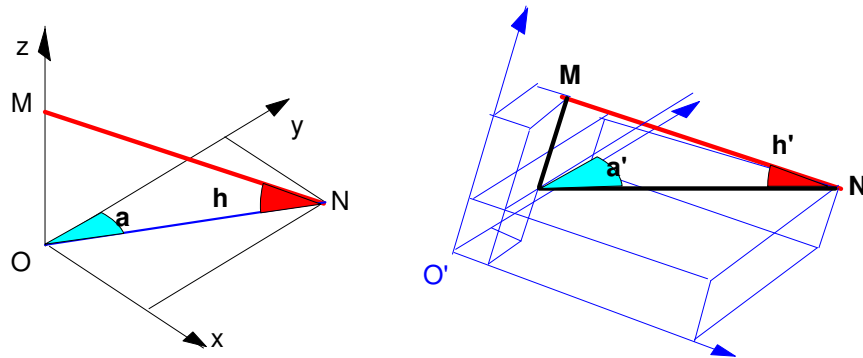
	x	y	z
Point M	0	0	1
Point N	$\frac{\sin a}{\text{tgh}}$	$\frac{\cos a}{\text{tgh}}$	0

Il s'agit ensuite de conserver l'orientation du rayon solaire en définissant le segment MN par ses coordonnées dans le système O', x', y', z' . Elles se calculent par la formule de transformation :

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$

$$z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$$



On calcule ensuite les valeurs de l'azimut et de la hauteur dans le nouveau système par :

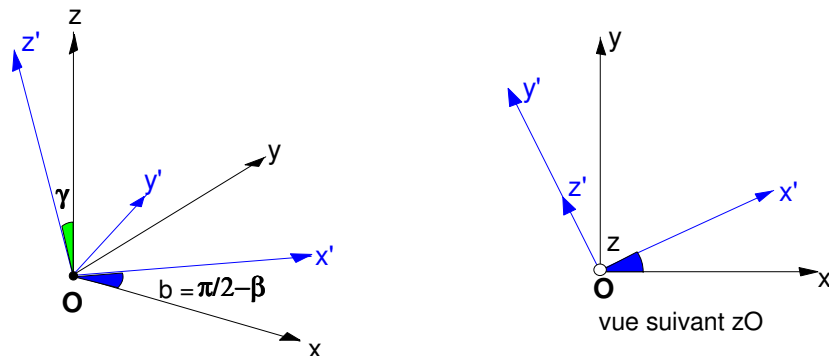
$$\text{tgh}' = \frac{z'M - z'N}{\sqrt{(y'M - y'N)^2 + (x'M - x'N)^2}}$$

$$\sin a' = \frac{x'N - x'M}{\sqrt{(y'M - y'N)^2 + (x'M - x'N)^2}}$$

On pourrait aussi choisir des coordonnées du plan telles que Ox' soit parallèle à la droite de base DE, Oy' perpendiculaire à Ox' et Oz' perpendiculaire au plan.

Cela revient à tourner le trièdre $Oxyz$, d'abord autour de Oz d'un angle $b = \frac{\pi}{2} - \beta$,

puis autour de Ox' d'un angle γ .



Calcul des cosinus directeurs des nouveaux axes dans l'ancien système Ox, Oy, Oz

	Ox	Oy	Oz
Ox'	$\cos b$	$\sin b$	0
Oy'	$-\cos \gamma \sin b$	$\cos \gamma \cos b$	$-\sin \gamma$
Oz'	$-\sin \gamma \sin b$	$\sin \gamma \cos b$	$\cos \gamma$

Coordonnées des points M et N

Point M				Point N			
Sur Ox	0	Sur Ox'	0	Ox	$m = \frac{\sin a}{tgh}$	Ox'	$m \cos b + p \sin b$
Sur Oy	0	Sur Oy'	$-\sin \gamma$	Oy	$p = \frac{\cos a}{tgh}$	Oy'	$-m \sin b \cos \gamma + p \cos b \cos \gamma$
Sur Oz	1	Sur Oz'	$\cos \gamma$	Oz	0	Oz'	$-m \sin b \sin \gamma + p \cos b \sin \gamma$

En remplaçant $b = \pi/2 - \beta$ les coordonnées du point N deviennent :

Sur Ox'	$m \sin \beta + p \cos \beta$
Sur Oy'	$-m \cos \beta \cos \gamma + p \sin \beta \cos \gamma$
Sur Oz'	$-m \cos \beta \sin \gamma + p \sin \beta \sin \gamma$

Les azimuts et hauteurs exprimés dans le nouveau système se calculent comme précédemment.

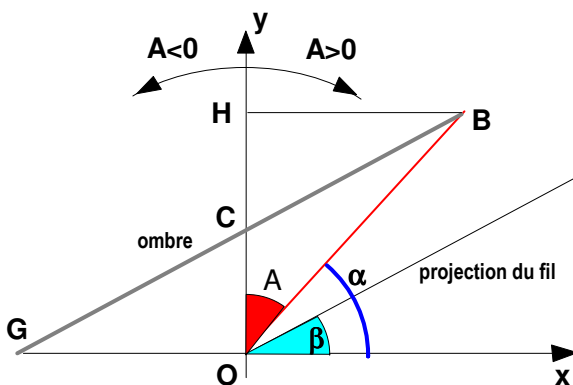
$$tgh' = \frac{z'M - z'N}{\sqrt{(y'M - y'N)^2 + (x'M - x'N)^2}}$$

$$\sin a' = \frac{x'N - x'M}{\sqrt{(y'M - y'N)^2 + (x'M - x'N)^2}}$$

Ceci est théoriquement exact mais le calcul numérique est décevant à cause de valeurs très grandes hors graphique. Il faut donc bien préférer l'ordonnée Oy' à l'intersection d'un vertical Nord-Sud avec le plan considéré.

Autre méthode de calcul d'un bifilaire horizontal :

On considère un fil parallèle, à une distance (D), au plan horizontal et dont la projection verticale passe par l'origine des axes Ox et Oy.



Oy est dirigée vers le Nord, Ox vers l'Est
L'orientation du fil est définie par l'angle (β) de sa projection avec l'axe Ox
Le fil étant éclairé par un soleil d'azimut (A) et d'angle de hauteur (h), on se propose d'écrire l'équation de la droite ombre du fil dans le système d'axes Ox, Oy.
Le fil, sa projection et son ombre sont parallèles.
La position de l'ombre CB se définit par le segment OB incliné de l'angle d'azimut (A) et de longueur : $OB = \frac{D}{tgh}$. Pour couvrir tous les cas, on uti-

lise l'angle trigonométrique : $\alpha = \frac{\pi}{2} - A$

$$OC = OH - HC = OH - HB \times \operatorname{tg} \beta = OB \times (\sin \alpha - \cos \alpha \times \operatorname{tg} \beta)$$

$$OC = \frac{D}{\operatorname{tgh}} \times (\sin \alpha - \cos \alpha \times \operatorname{tg} \beta)$$

Et on peut écrire l'équation de l'ombre

$y = OC + \operatorname{tg} \beta \cdot x$, qui est une forme générale de l'équation de l'ombre d'un fil dont la projection passe par le point O.

Pour appliquer au bifilaire il faut que les projections des 2 fils passent par le point origine O et il suffit de résoudre 2 équations pour obtenir les coordonnées du point de rencontre des ombres.

Mais cette forme d'équation linéaire donne des impossibilités de calcul quand β est proche de 0 et de 90 degrés. Il faut alors chercher une autre expression de l'équation de la droite à partir des 2 points C et G, avec

$$OG = \frac{OC}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{D}{\operatorname{tgh}} \times \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta} - \cos \alpha \right)$$

En posant :

$$OG = a \quad \text{et} \quad OC = b$$

L'équation de la droite passant par ces 2 points des axes s'exprime alors par :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ et on définit de même la seconde droite par : } \frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$$

En résolvant le système on obtient les coordonnées de l'intersection :

$$x = (b - d) \times \frac{ac}{bc - ad}$$

$$y = b \times \frac{dc - ad}{bc - ad}$$

On rappelle ensuite les formules nécessaires au calcul de OC :

$$\begin{aligned} \sinh &= \sin \delta \times \sin \phi + \cos \phi \times \cos \delta \times \cos H \\ \sin A &= \frac{\cos \delta \times \sin H}{\cosh} \end{aligned}$$

Pour tracer la droite qui contient les points de rencontre des ombres à une heure déterminée et au cours de l'année il suffit de considérer les points extrêmes correspondants aux solstices.

Et avec un 3^{ème} fil ?

Le graphique d'un bifilaire horizontal d'angles quelconques est toujours composé d'hyperboles et de lignes droites concourantes en un point. Au cours d'une journée le point figuratif de l'heure parcourt une branche de l'hyperbole définie par la déclinaison à la date considérée.

Cette situation se produit 2 fois dans l'année (printemps et automne)

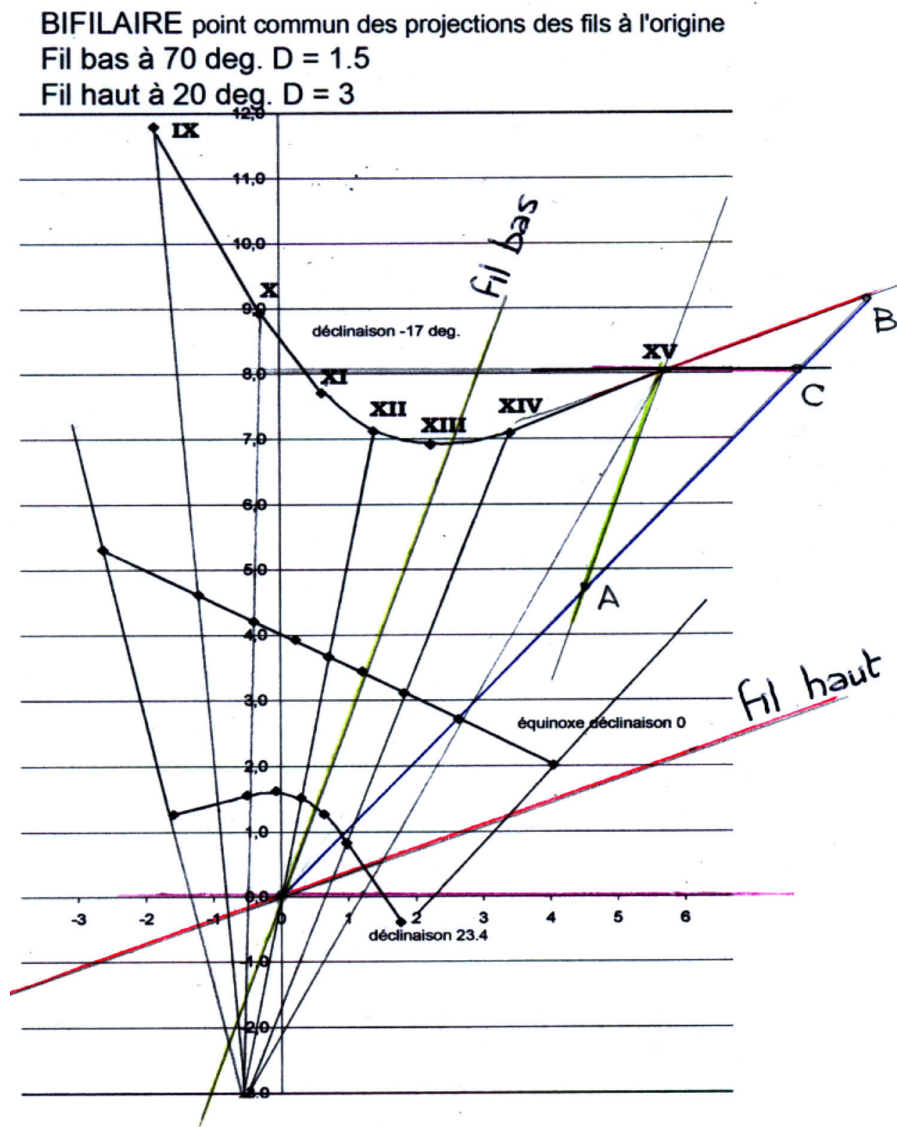
Quand on trace sur le graphique une droite passant par un point horaire, elle rencontre en général son hyperbole en un second point.

Par conséquent si cette droite est l'ombre d'un 3^{ème} fil, on peut dire que les 3 fils possèdent au moins un point de rencontre commun 2 fois dans l'année.

L'équation de l'ombre du 3^{ème} fil serait, selon la 1^{ère} notation : $y = fx + g$,

On peut choisir un jour et une heure dans les calculs précédents qui conduisent à un point de coordonnées calculées. En remplaçant par leurs valeurs dans l'équation on arrive à une solution en se donnant f qui est la tangente de l'angle choisi pour la projection du fil par rapport à Ox et g l'abscisse du point de passage de l'ombre qui

permettra ensuite de calculer l'altitude D de ce fil à partir de l'azimut et de la hauteur solaire du moment choisi.



Exemple simple:

Sur le graphique ci-dessus on peut se proposer d'établir un fil dont la projection se fait également au point d'origine et d'inclinaison nulle (c'est-à-dire Est-Ouest).

On choisit d'avoir le point de rencontre à 15 heures pour une déclinaison de - 17 deg. (début février et début novembre)

Les calculs montrent qu'à ce point : $y = 8.07$ et $x = 5.7$

La hauteur solaire = 13.2 deg et l'azimut solaire (angle yOB) = 44.0 deg.

La droite OAB est l'ombre de la perpendiculaire commune aux 3 fils

On vérifie que $\frac{OA}{OB} = \frac{1.5}{3}$ et on voit que la cote D du 3^{ème} fil doit être : $3 \times \frac{OC}{OB} \cong 2.63$

Mieux, par calcul, appliquer la formule du calcul de OC, page précédente

$$8.07 = \frac{D}{\tan 13.2} \times \sin(90 - 44) \Rightarrow D = 2.64$$

Si on choisit le 3^{ème} fil incliné de (-20 deg.), l'équation de l'ombre sera : $y = -\tan 20x + v = -0.364x + v$

Avec les coordonnées du point XV heures :

$$8.07 = -0.364 \times 5.7 + v \Rightarrow v = 10.14$$

En remplaçant dans la formule de OC :

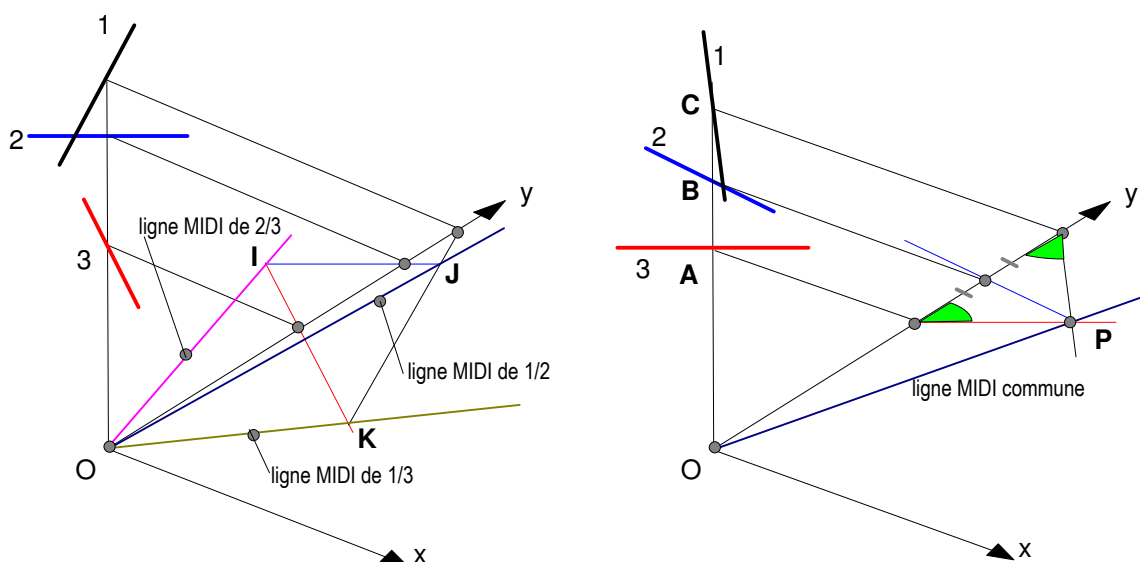
$$10.14 = \frac{D}{\operatorname{tg} 13.2} \times (\sin 36 - \cos 36 \times (-0.364)) \Rightarrow D = 2.44$$

C'est la distance au dessus de l'origine du 3^{ème} fil dont l'ombre passe au point XV heures à la date choisie.

Cependant s'il n'a d'intérêt que pour marquer le point XV heures à la date convenue, on pourrait donner au fil n'importe quelle position pourvu qu'il soit parallèle à - 20 deg. et situé dans le plan passant par le point d'altitude 2.44 au dessus du point O et défini par une droite inclinée de -20 deg. issue du point XV heures. D'ailleurs à la limite, on pourrait se limiter à la dessiner sur le graphique.

Cependant il est intéressant de tracer les graphiques des 3 bifilaires quand les fils se projettent tous sur le point origine.

On observe bien le croisement prévu des hyperboles au point commun de XV heures. On voit aussi que les prolongements des 3 lignes de midi se rejoignent au point O. En traçant les triangles des 3 points midi sur les hyperboles ainsi que sur les droites équinoxes, on observe qu'ils sont semblables avec leurs cotés parallèles aux 3 fils.



Cette observation se vérifie facilement sur la figure de gauche où l'on voit le triangle IJK construit par une certaine hauteur solaire. En faisant varier la hauteur solaire les triangles restent semblables et se situent dans l'angle IOK.

Cette propriété peut constituer une vérification des calculs et du tracé.

Sur la figure de droite, les orientations des fils 1 et 3 sont symétriques et le fil 2 est situé au milieu de AC et parallèle à Ox (Est-Ouest). Le triangle se réduit alors au point P. Cette convergence se vérifie tous les jours et toute l'année, mais seulement à midi. Ce cas est cité par Y. Opizzo sous le nom de méridienne tri filaire

Par exemple :

Fil supérieur à 40 deg. avec $D = 3$

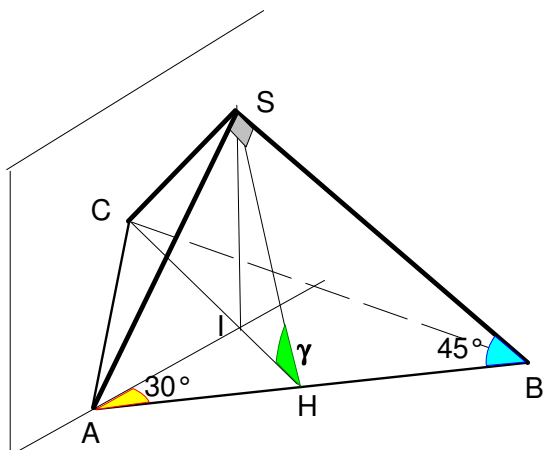
Fil inférieur à -40 deg. avec $D = 1.5$

3^{ème} fil à 0 deg. avec $D = 2.25$

Cadran solaire cubique

A partir d'un cube mis dans la position où une diagonale et une arête sont dans un plan vertical Nord-Sud, on se propose de créer 2 cadrans symétriques.
La solution choisie est la technique du gnomon perpendiculaire au plan
Afin de poser le cube en équilibre le sommet inférieur est tronqué par un plan perpendiculaire à la diagonale qui détermine une base triangulaire équilatérale.
Pour faciliter la figure et le calcul des angles de définition des plans des cadrans on suppose que cet usinage a atteint les diagonales des 3 faces concernées

On obtient un trièdre S,ABC.



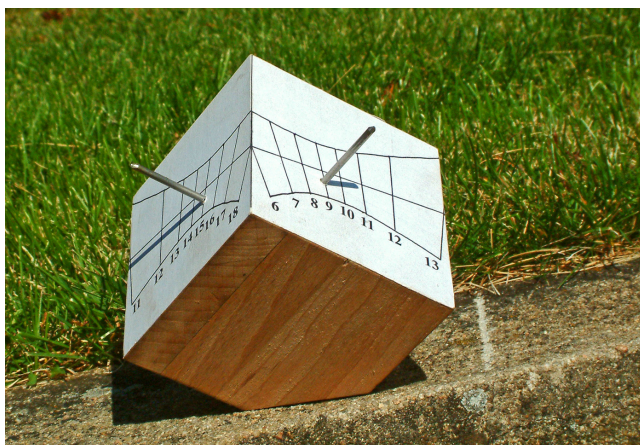
Le plan SAB devient défini par la droite de base AB à 30 deg. et la pente γ par sa tangente

$$\text{tg } \gamma = \frac{SC}{SH} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

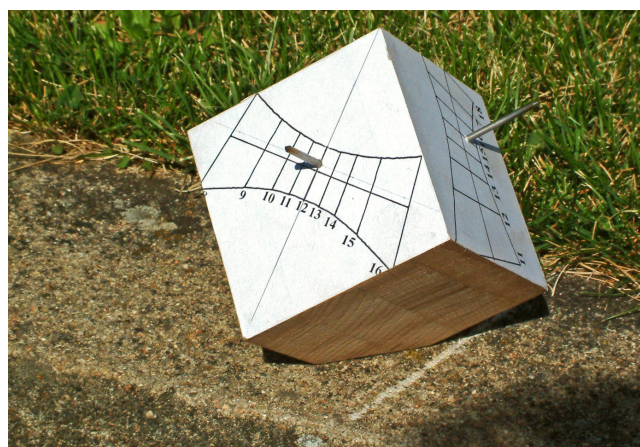
$$\gamma = 54.73 \text{ deg.}$$

Il suffit de reprendre les calculs du bâton planté d'équerre à un plan avec Oy parallèle à AS et Ox parallèle à SB

Sur la face SAC les graduations d'après-midi sont égales et symétriques à celles du matin de la face à l'est.



La face arrière a reçu un cadran simple, la droite équinoxiale est en dessous du pied du gnomon



En sorte de conclusion, on a vu que tout cadran solaire revient au problème de projection d'un point sur une surface appropriée et au tracé du lieu géométrique de cette projection au cours de la journée et au cours de l'année.

Pour faciliter le tracé du graphique et son transfert sur la surface on a intérêt à s'intéresser d'abord aux surfaces développables (plans, cylindres, cônes, hélicoïdes)

Les calculs font appel à plusieurs méthodes :

La géométrie avec un cadran polaire fictif :

Faire passer par le point un plan vertical Nord-Sud et tracer dans ce plan, à partir du point, une droite inclinée de l'angle de latitude par rapport à l'horizontale. En général, elle rencontre la surface en un point qui est le sommet d'un cadran dit polaire parce que la droite est parallèle à l'axe de rotation de la terre.

En faisant tourner un plan autour de la droite précédente, on obtient des intersections avec la surface qui sont des lignes horaires et on calcule dans le plan les longueurs d'ombres au cours de l'année en utilisant les angles de déclinaisons.

L'astronomie et mathématique :

On sait calculer à chaque instant de la journée et chaque jour de l'année les angles d'azimut et de hauteur solaire. Ces angles attachés au point déterminent une droite de l'espace qui rencontre la surface en un point appartenant aux courbes recherchées. Il est nécessaire que ces angles et la surface soient définis dans un même système de coordonnées. Ceci conduit en général à traiter le problème par des changements de coordonnées à 3 dimensions.

Cette méthode est abstraite et plus complexe que la précédente mais permet de traiter des cadrans plus originaux

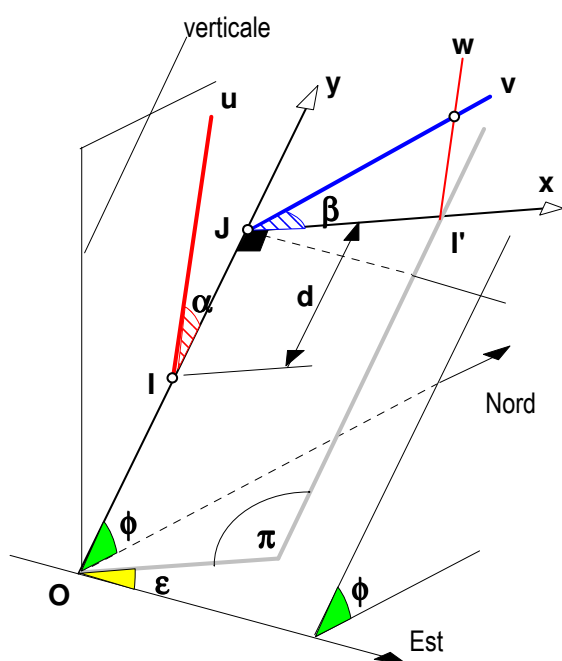
Les mathématiques supérieures et la géométrie analytique :

Le soleil fabrique des droites qui restent toujours en contact avec une droite parallèle à l'axe du monde. En considérant celles qui sont aussi en contact avec une courbe de l'espace il apparaît une surface réglée dont l'intersection avec une autre surface engendre des courbes qui peuvent, dans des conditions particulières, présenter les propriétés de cadrans solaires.

Bernard Rouxel a ainsi traité le problème avec des lignes droites pour établir sa théorie générale des cadrans bifilaires. Il a également montré des solutions où se combinent une ligne droite et une hyperbole ou une parabole.

PARTIE 6b Cadran bifilaire type B. ROUXEL

Ce cadran révélé en 2007 par Bernard Rouxel est un cas particulier de son étude générale des cadrans bifilaires.



plan vertical

β : angle du fil (Jv), dans le plan défini par (Jx) perpendiculaire à Oy et une droite (I'w) parallèle au fil (Iu)

Supposer les fils coupés en A et A' par un plan parallèle à (π) et noter : $IA = a$

On trouve les **ombres à l'équinoxe** en considérant les plans AKB et A'K'B' perpendiculaires à IJ où l'angle horaire H détermine les points B et B'.

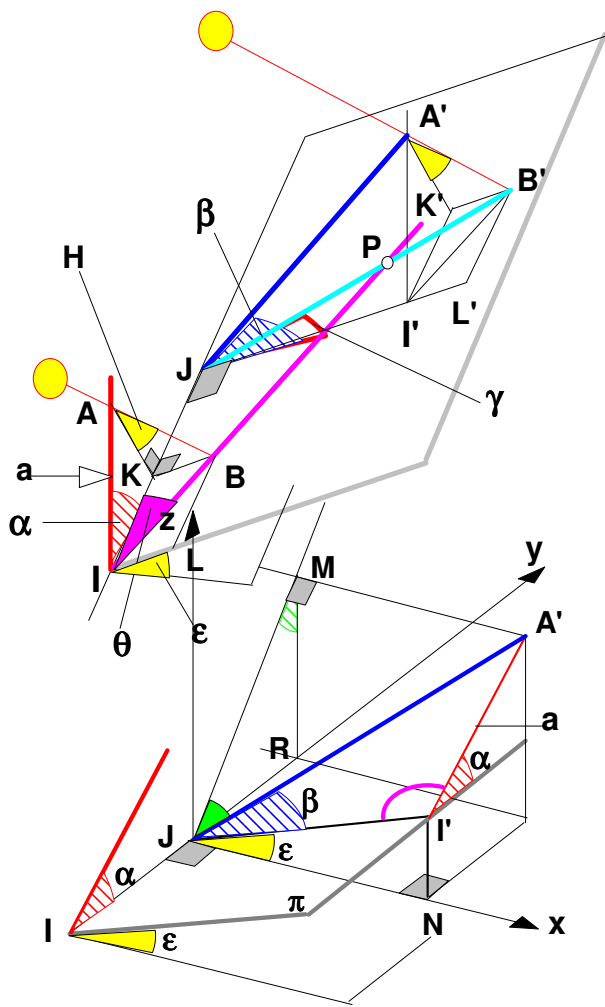
Dans le triangle AKB on écrit :

$$\frac{KB}{\sin \hat{H}} = \frac{AK}{\sin(\frac{\pi}{2} - (\hat{H} - \hat{\epsilon}))} = \frac{AK}{\cos(\hat{H} - \hat{\epsilon})} = \frac{AI \times \sin \alpha}{\cos(\hat{H} - \hat{\epsilon})}$$

$$KB = \frac{a \times \sin \alpha \times \sin H}{\cos(H - \epsilon)}$$

D'où l'angle θ de l'ombre du fil (Iu) par :

$$\tan \theta = \frac{KB}{IK} = \frac{a \cdot \sin \alpha}{a \cdot \cos \alpha} \times \frac{\sin H}{\cos(H - \epsilon)} = \frac{\tan \alpha \cdot \sin H}{\cos(H - \epsilon)}$$



Pour avoir l'ombre du fil (Jv), on voit bien l'identité entre les pyramides KAIB et K'I'A'B', mais il faut calculer JI' dans le triangle JA'I' où l'on connaît l'angle β , le côté I'A' = a et son parallélisme avec IA

Du trièdre rectangle I'J, I'N, I'A' on déduit l'angle en I' du triangle I'A'J (cas sphérique où sont connus A, b, c,

formule : $\cos a = \cos b \cdot \cos c$), et on a : $\cos \hat{I}' = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) = -\sin \alpha \cdot \sin \varepsilon$

Connaissant cet angle, il vient ensuite dans le triangle I'A'J :

$$\frac{a}{\sin \beta} = \frac{JI'}{\sin(\pi - \beta - \hat{I}')} \quad \text{et} \quad \boxed{JI' = a \frac{\sin(\pi - \beta - \hat{I}')}{\sin \beta}}$$

Connaissant $I'L' = KB$ et $B'L' = BL = IK$, on peut alors calculer l'ombre de JA' sur le plan (π) par :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{IK}{JL'} = \frac{IK}{JI' + KB}$$

Remarque

La réalisation du cadran peut conduire à remplacer le fil JA' par un triangle opaque MJA' où l'on aurait :

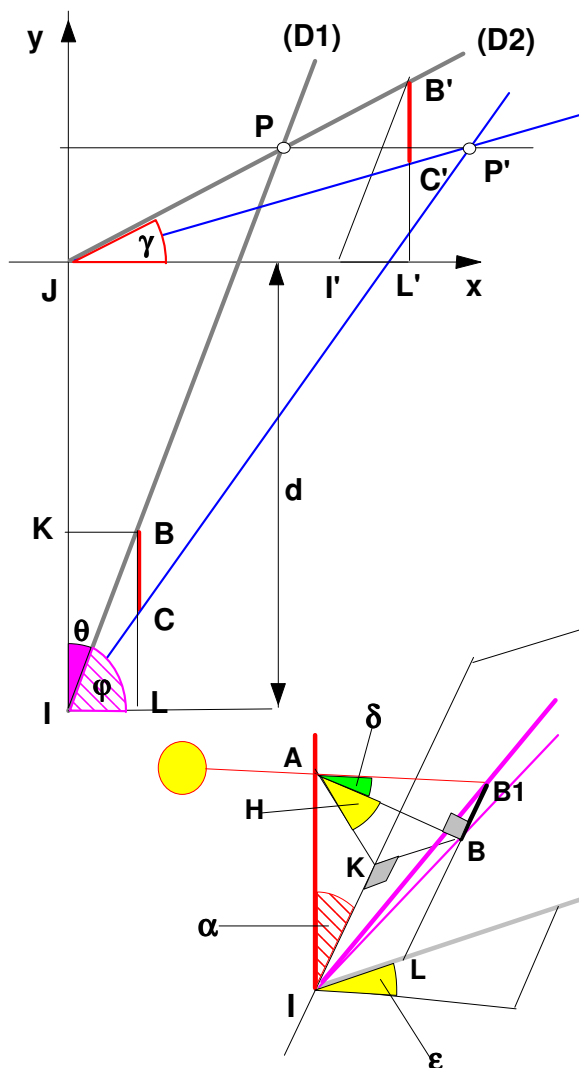
$$MA' = JN = JI' \cdot \cos \varepsilon$$

$$MR = JI' \cdot \sin \varepsilon + a \cdot \sin \alpha$$

$$JR = a \cdot \cos \alpha$$

$$\text{L'angle de pente JMR se définirait par : } \operatorname{tg} \hat{JMR} = \frac{JR}{MR} = \frac{\cos \alpha}{\frac{\sin \varepsilon \cdot \sin(\pi - \beta - \hat{I}')}{\sin \beta} + \sin \alpha}$$

$$\text{L'angle au sommet MJA' par : } \operatorname{tg} \hat{MJA'} = \frac{MA'}{MJ} = \frac{MA' \cdot \cos \hat{JMR}}{MR}$$



Cette figure est la vraie grandeur sur le plan (π). Le point P correspond à une certaine heure et on recherche ses coordonnées dans les axes Jy et Jx

Les équations des droites sont :

$$y(D1) = \operatorname{tg} \varphi \cdot x - d$$

$$y(D2) = \operatorname{tg} \gamma \cdot x$$

Dont les solutions donnent les coordonnées :

$$x(P) = \frac{d}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \gamma}$$

$$y(P) = \frac{d}{\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \gamma} - 1} = \frac{d \cdot \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \gamma}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{BL}{IL}}{\frac{BL}{JL'}} = \frac{JL'}{IL} \quad \text{valeur indépendante}$$

de BL donc si on remplace les valeurs égales BL et B'L' par des valeurs quelconques mais égales comme CL et C'L' l'ordonnée y du point de rencontre des droites (D1), (D2) reste constante. C'est précisément ce qui se produit lorsque l'on prend en considération les déclinaisons dans les 2 sens.

En effet, quel que soit le moment de l'année les rayons solaires à l'heure H

restent dans un même plan parallèle à IK qui coupe le plan (π) suivant LB
 La déclinaison (δ) amène ainsi le point B en B1 et on se trouve bien dans le cas géométrique précédent.

Donc toutes les lignes horaires sont des droites parallèles à Jx (c'est-à-dire perpendiculaires à Oy)

Calculs :

Déterminer les valeurs des angles φ et γ à l'équinoxe

Déterminer les valeurs constantes de $y(P)$

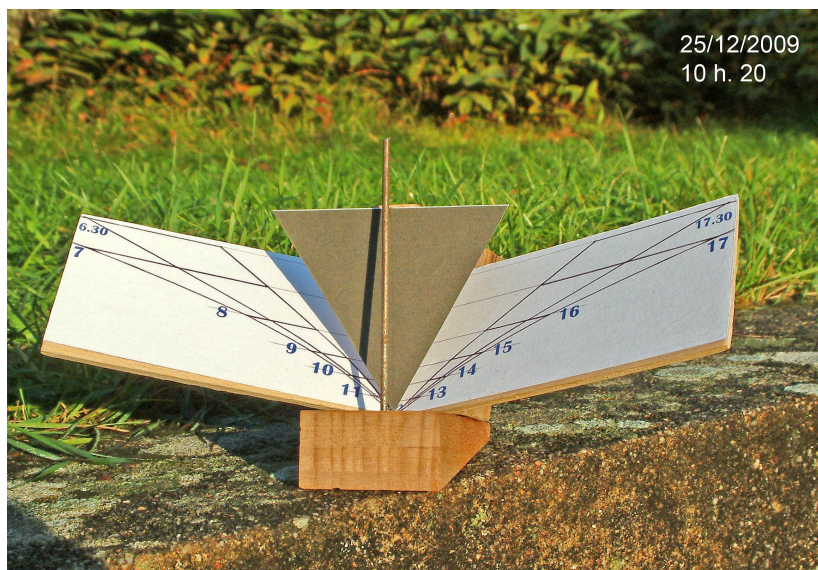
Les valeurs de $x(P)$ à l'équinoxe par $x(P) = \frac{y(P)}{\operatorname{tg} \gamma}$

Pour les valeurs de $x(P)$ sous déclinaison, calculer l'effet de la déclinaison sur l'angle (γ) et calculer $x(P)$ comme précédemment

$BB1 = AB \cdot \operatorname{tg} \delta$, avec AB calculé dans le triangle AKB par : $\frac{AB}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)} = \frac{KB}{\sin H}$

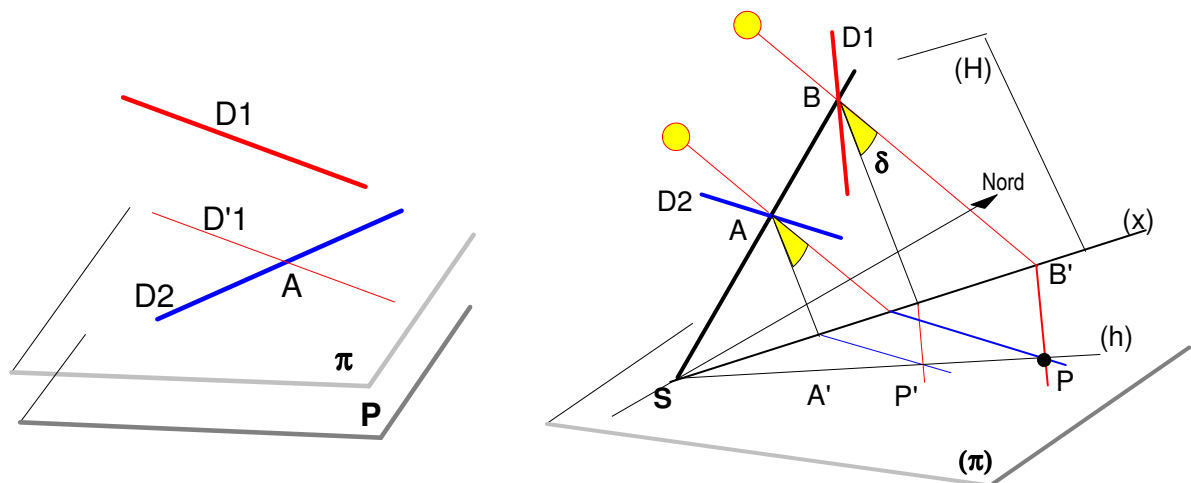
$$AB = \frac{a \times \sin \alpha \times \sin H}{\cos(H - \varepsilon)} \times \frac{\cos \varepsilon}{\sin H} = \frac{a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varepsilon}{\cos(H - \varepsilon)}$$

L'angle γ se calcule par : $\operatorname{tg} \gamma = \frac{IK \pm AB \cdot \operatorname{tg} \delta}{JL'}$



Considérations théoriques et pratiques sur les cadrans bifilaires à plan quelconque

Pour que le croisement des ombres de 2 lignes droites sur un plan constitue un cadran solaire, il faut (et il suffit) que les droites soient parallèles au plan mais non concourantes ou parallèles entre elles.



Il est toujours possible de construire des plans parallèles à 2 droites quelconques de l'espace. En effet, il suffit de tracer à partir d'un point de la première une droite parallèle à la seconde et ces 2 droites engendrent un plan (π) et tous les plans (P) qui lui sont parallèles répondent à la propriété.

Etant donnés 2 droites et un plan ayant les propriétés précédentes, il est en général possible de construire une droite d'orientation définie et qui possède un point de contact avec chacune des droites. Donc en particulier on s'intéresse à une droite qui serait parallèle à l'axe du monde et qui rencontrerait le plan en un point S. Ce qui suppose une inclinaison modérée du plan pour éviter la fuite du point S vers l'infini. On démontre alors facilement que les points d'ombres croisées se trouvent sur des lignes horaires qui convergent toutes au point S.

Le plan qui contient les rayons solaires pivote autour de SAB, à une certaine heure ce plan coupe le plan (π) suivant la droite Sx et le point P est donné par les ombres A'P et B'P parallèles à chaque droites.

Si on considère une déclinaison nouvelle on obtient le point P' et par les propriétés d'homothétie il est connu que P' appartient à la droite SP. On note qu'en échangeant les positions des droites la ligne horaire Sh passe de l'autre côté de Sx mais qu'elle ne serait pas symétrique par rapport à Sx.

Donc les bifilaires quelconques donnent des graphiques analogues à ceux des cadrans classiques avec des lignes horaires droites et des lignes diurnes hyperboliques avec une ligne droite aux équinoxes. Cependant ils sont plus compliqués à calculer et à réaliser.

Recherche du point S

Comme les droites sont parallèles au plan du cadran, leur perpendiculaire commune (appelée aussi plus courte distance) est perpendiculaire au plan et à priori on a intérêt à prendre cette référence plutôt que la droite polaire également en contact avec les 2 droites. On définit alors un trièdre de référence dont l'axe Oz est cette perpendiculaire commune et les axes Ox, Oy sont dessinés sur le plan avec de préférence Oy dirigé vers le Nord.

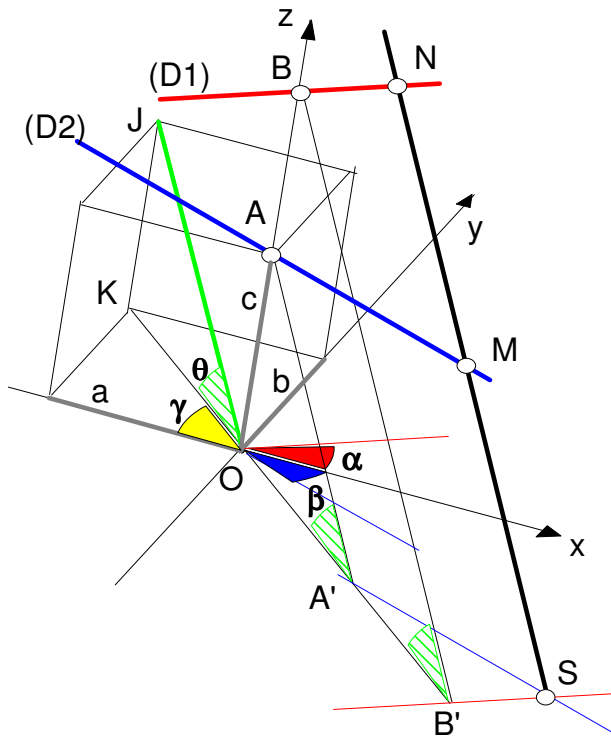
Dans ce système l'orientation d'une droite polaire se définit par ses cosinus directeurs. C'est-à-dire la direction d'un segment OJ de longueur unitaire placé à l'origine et dont les coordonnées a, b, c de l'extrémité J sont appelées cosinus directeurs.

Pour simplifier la figure la droite (D2) se trouve sur la face du parallélépipède qui contient OJ, mais dans les calculs on notera :

$$OA = l \text{ et } AB = d$$

Pour arriver au point S, on construit AA' parallèle à OJ et BB' parallèle à OJ

La droite (D2) et AA' forment un plan dont la trace sur Oxy est A'S. De même à partir du point B le plan de (D1) et BB' donne la trace B'S sur le plan Oxy



L'intersection des 2 plans qui contiennent chacun leur droite et qui sont parallèles à la direction OJ est donc la droite recherchée en contact avec les 2 droites.

Les coordonnées de S se calculent après les valeurs de OA', A'B' et A'S

$$OA' = \frac{OA}{\tan \theta} = \frac{l}{\tan \theta}$$

$$A'B' = \frac{AB}{\tan \theta} = \frac{d}{\tan \theta}$$

Dans le triangle A'B'S :

$$\frac{A'B'}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{A'S}{\sin(\pi - \alpha - \gamma)} \quad \text{d'où}$$

$$A'S = \frac{d}{\tan \theta} \cdot \frac{\sin(\pi - \alpha - \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

d'où les coordonnées de S :

$$x_S = \frac{l \cdot \cos \gamma}{\tan \theta} + \frac{d \cdot \cos \beta}{\tan \theta} \cdot \frac{\sin(\pi - \alpha - \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$y_S = \frac{l \cdot \sin \gamma}{\tan \theta} + \frac{d \cdot \sin \beta}{\tan \theta} \cdot \frac{\sin(\pi - \alpha - \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$SM \text{ et } SN \text{ se calculent par : } SM = AA' = \frac{l}{\sin \theta}$$

$$SN = BB' = \frac{l + d}{\sin \theta}$$

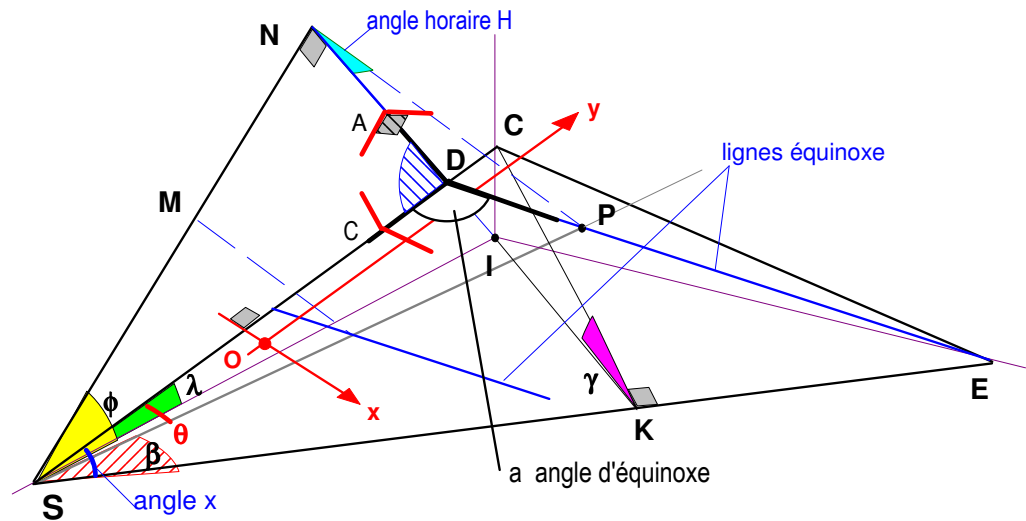
Dans le cas particulier du bifilaire sur plan horizontal :

Oy est orientée au Nord, l'angle θ devient l'angle ϕ de latitude locale, l'angle $\gamma = 90$ deg.

$$x_S = \frac{d \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha}{\tan \phi \cdot \sin(\alpha + \beta)}$$

$$y_S = \frac{1}{\tan \phi} \cdot \left(l + \frac{d \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \right)$$

Recherche des lignes horaires et de la droite équinoxiale



Pour étudier sur un plan quelconque, on reprend la définition du plan identique à celle du cas de l'ombre d'un mat perpendiculaire au plan (voir p ;8 de part. 6)
 Oy est la trace de l'intersection du plan par un plan vertical Nord-Sud
 Ox , sur le plan est perpendiculaire à Oy.
 Donc l'angle γ de la figure précédente devient $\pi/2$ et l'angle θ devient l'angle de latitude minoré de l'inclinaison λ de la ligne d'intersection par rapport à l'horizontale (SC sur la figure ci-contre)

λ se calcule par $tg \lambda = \sin \beta \times tg \gamma$

Calcul de l'angle d'équinoxe :

Utiliser le trièdre rectangle **D**, S, N, E où sont connus

$A = \pi/2$,

C, angle dièdre entre le plan et le vertical Nord-Sud se calcule par la formule indiquée dans la part 6, soit :

$$\hat{C} = \pi - \arccos(\cos \beta \cdot \sin \gamma)$$

b complément de $(\phi - \lambda)$

Par application de formule trigo sphérique, on obtient l'angle d'équinoxe :

$$tga = \frac{tgb}{\cos C} = \frac{tg(\frac{\pi}{2} - \phi + \lambda)}{\cos \hat{C}}$$

A partir de SM et SN, calculer SL et SR :à la position d'équinoxe

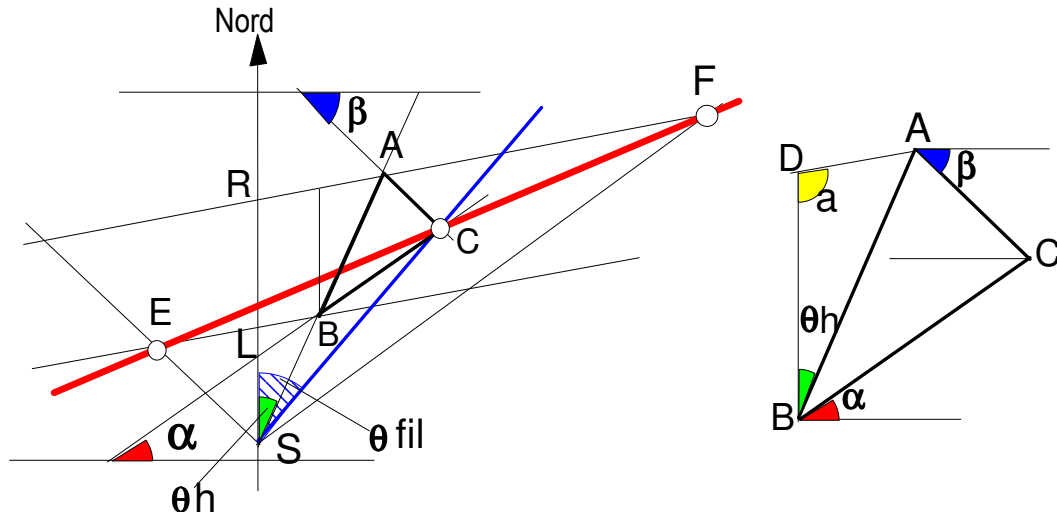
$$SL = \frac{SM}{\cos(\phi - \lambda)} = \frac{l}{\sin(\phi - \lambda) \cdot \cos(\phi - \lambda)}$$

$$RL = \frac{SN - SM}{\cos(\phi - \lambda)} = \frac{d}{\sin(\phi - \lambda) \cdot \cos(\phi - \lambda)}$$

Tracer la figure dans le plan avec les 2 lignes équinoxes en R et L.

A une certaine heure calculer l'angle de cadran θ_h qui conduit au triangle ABC et à la droite SC qui donne l'angle θ_{fil} qui peut être calculé

Quand les angles α et β donnent un dessin de dimensions acceptables, tracer SF // à BC et SE // à AC. La droite EF est la ligne équinoxiale du graphique bifilaire



Les angles du triangle ABC sont connus :

$$\hat{C} = \alpha + \beta \rightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{2} - \theta_h - \alpha \rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2} + \theta_h - \beta$$

En résolvant 3 triangles, on arrive à l'angle qu'il faut ajouter ou retirer à θ_h pour avoir θ_{fil}

ADB donne AB

ABC donne AC

SAC donne l'angle en S

Noter que sur les droites SE et SF les lignes horaires du cadran et du bifilaire sont confondues. Pour le cas de figure on voit qu'à l'intérieur de l'angle ESF la ligne bifilaire est décalée vers la droite par rapport à celle du cadran et que c'est l'inverse en deçà du point E et au-delà du point F.

Recherche des lignes diurnes

A moins d'erreurs de calcul, on a donc réussi à tracer la ligne équinoxiale et les lignes horaires du bifilaire. Le calcul des longueurs d'ombre pour tracer les lignes diurnes est possible mais laborieux.

Heureusement le dessin montre des propriétés intéressantes qui vont permettre de tracer le graphique bifilaire à partir du graphique du cadran polaire.

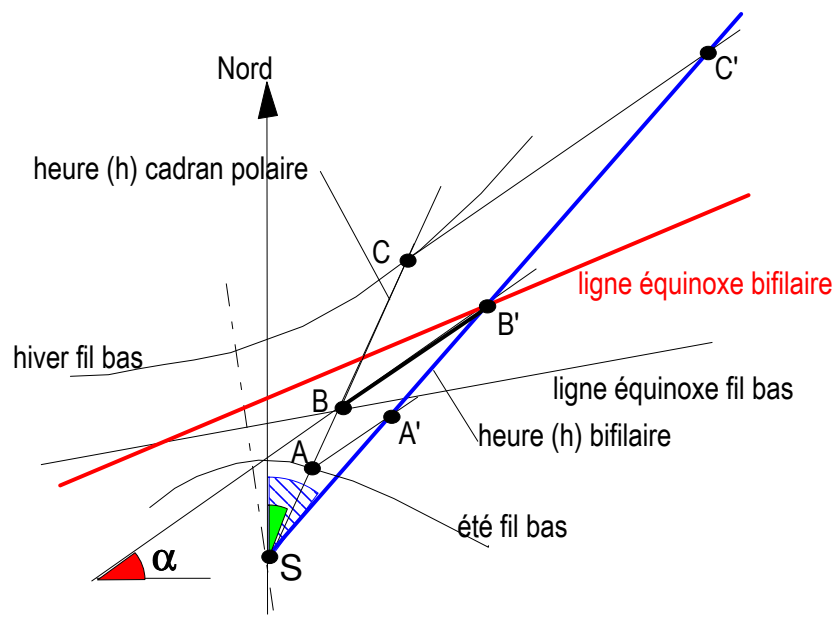
Supposer tracées les lignes horaires et les 2 lignes équinoxiales du cadran polaire

Le tracé de la ligne équinoxiale du bifilaire a été vu précédemment

En traçant le triangle ABC sur chaque ligne horaire, les droites CS sont les lignes horaires du bifilaire.

On observe que la ligne équinoxiale du graphique bifilaire peut se déduire de celle du graphique polaire inférieur en partant du point B sur la ligne (h) du cadran polaire en traçant une parallèle d'angle α qui coupe la ligne horaire de même heure (h) du bifilaire en un point C

Cette propriété se conserve pour les lignes diurnes hyperboliques



Ayant tracé les lignes horaires du cadran polaire et du bifilaire ainsi que le graphique du cadran polaire correspondant au fil inférieur. Utiliser l'angle du fil inférieur pour tracer les parallèles AA', BB', CC' à partir de la ligne horaire (h) du cadran polaire. Les points A', B', C' de rencontre avec la même ligne horaire du bifilaire appartiennent à son graphique.

Comment traiter les cas différents ?

Les considérations précédentes ont traité les cas de plans pas trop inclinés sur l'horizontale et relativement bien orientés vers le Sud.. Quand le plan se rapproche de la verticalité, la théorie se conserve et peut se traiter comme précédemment en se rattachant au cadran polaire vertical.

Les cas impossibles à traiter sont les plans d'inclinaisons proches de celle de l'axe du monde qui rejettent le point S vers l'infini en dehors de l'épure.

Le cas simple du bifilaire orthogonal Est-Ouest sur plan horizontal et dont la plus courte distance des fils est perpendiculaire au plan résiste aussi à cette théorie.

En dehors des cas particuliers de plan horizontaux et verticaux qui sont traités par géométrie et calculs assez simples, la solution la plus générale est probablement l'utilisation des azimuts et hauteurs solaires appliqués à un mat planté d'équerre sur un plan quelconque.

Cas particulier du bifilaire sur un plan contenant une droite parallèle à l'axe du monde

Considérer un plan incliné latéralement d'un angle φ (inférieur à 90 deg.) autour d'un axe de latitude et un mat planté perpendiculaire au plan pour définir les distances des fils.

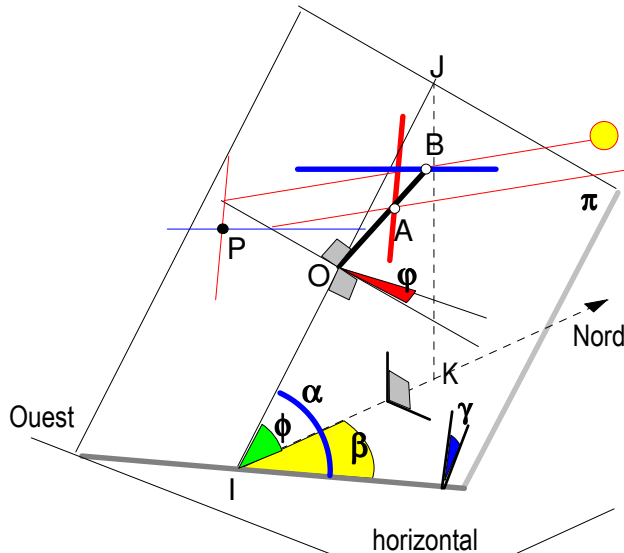
φ : angle d'orientation du plan mesuré dans un plan perpendiculaire à IJ

ϕ : angle de latitude

OA = l

AB = d

Dans le trièdre de sommet I calculer les angles utiles à la construction du support



$$\cos \gamma = \cos \phi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \phi \cdot \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sin \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \sin \phi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\sin \phi}{\operatorname{tg} \varphi}$$

Comme le plan contient IJ axe du monde, , pour un angle horaire H l'ombre d'un point B se déplace sur une ligne B1B2 parallèle à IJ dont l'amplitude dépend de la déclinaison δ

$$OD = OB \cdot \operatorname{tg}(\varphi + \hat{H})$$

$$DB = \frac{OB}{\cos(\varphi + \hat{H})}$$

$$DB1 = DB \cdot \operatorname{tg} \delta = \frac{OB \cdot \operatorname{tg} \delta}{\cos(\varphi + \hat{H})}$$

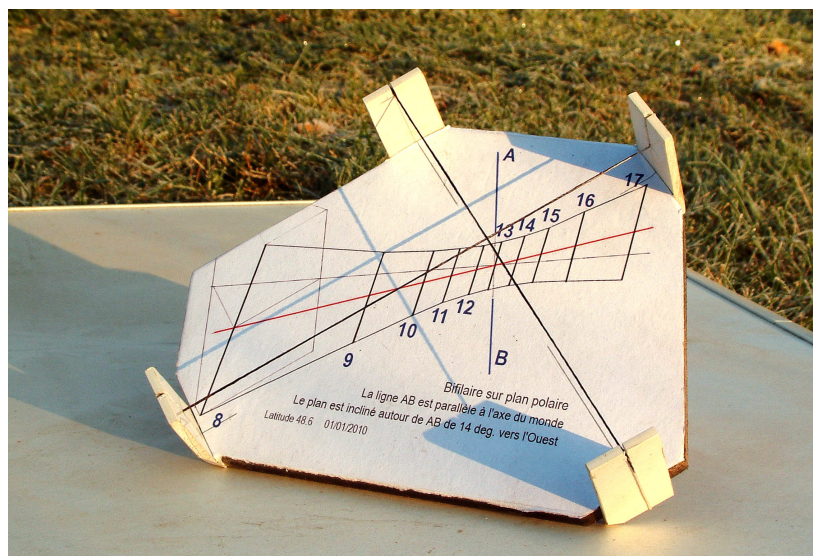
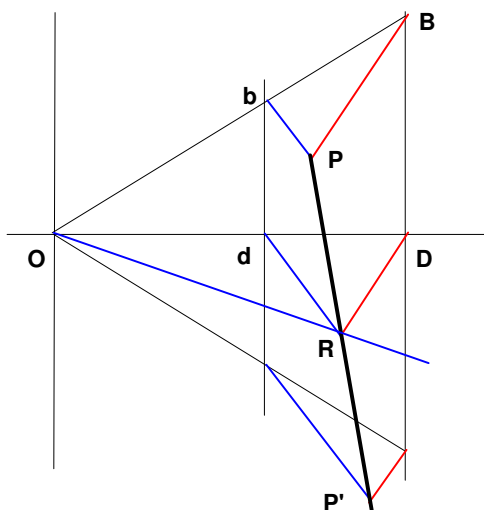
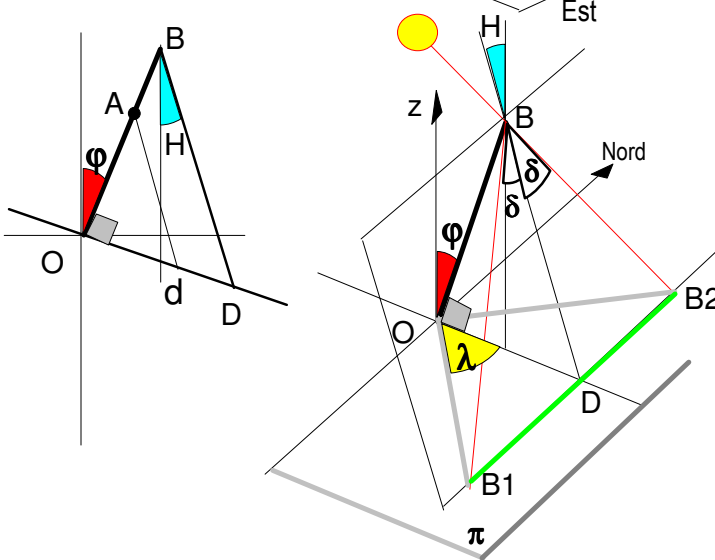
Les points A et B ont des ombres qui se déplacent sur des parallèles à IJ

Pour chaque heure, déterminer les lignes d'ombre des point B et A (distance OD et Od) et les amplitudes de la déclinaison (DB et db).

Tracer les parallèles aux fils pour avoir les points P qui donnent des droites horaires parallèles entre elles, et une droite équinoxe passant toujours par point O.

L'orientation des lignes horaires dépend des orientations des fils.

Le graphique est indépendant de la latitude. Il suffit de bien orienter le plan par rapport à l'axe du monde.



BIBLIOGRAPHIE

- Les ombres des temps ; Yves Opizzo ed. Burillier à Vannes 1998,*
Abc de l'astronomie ; Oliveau, ed. Arthaud 1990
L'astronomie ; au quotidien ; Leblanc & Lomont, ed. Atlas, 1987
Calculs astronomiques pour amateurs ; S. Bouiges, ed. Masson, 1981
Les cadrans solaires ; A. Kaichinger ; revue Arts & Métiers (juin,juil 1979, jan 1980
*Lire le cadran solaire ; C. Moureau ; ed. Maison du cadran solaire à Carcas-
sonne,1966*
*Formulaire des nouvelles tables de Logarithmes, Bouvart & Ratinet, ed. Hachette,
1946*
Cours de Topographie et de Géodésie ; J. F ; Salneuve, ed.J ; Dumaine 1869
Gnomonique graphique ; J. Mollet, ed. Bachelier 1837 (digitized by Google)

SITES INTERNET

www.pakhomoff.net
www.jmbprofessionnel.org
<http://dasypodius.free.fr>
<http://pagesperso-orange.fr/blateyron/sundials>
<http://futura-sciences.com>
<http://olravet.fr>
<http://emile.bodin.free.fr>
<http://laluz.free.fr>
<http://audience.cerma.archi.fr>