
Gnomonique vectorielle

◇
Tra-
duction
pour la Société
Astronomique de
France, Commis-
sion des Ca-
drams So-
laires



Tous

droits réservés.

Composé en L^AT_EX 2 ϵ

06/2006



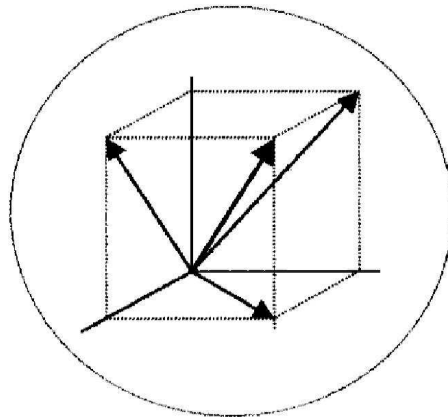
Dominique Collin

Nice, juin 2006.

ASSOCIATION DES AMIS DES CADRANS SOLAIRES

TIRE À PART DU BULLETIN ANALEMA

GNOMONIQUE VECTORIELLE



ANTONIO DE VICENTE CANDEIRA

Mars 2005

Version française :
Dominique COLLIN

$\triangle = \nabla^2$

Société Astronomique de France
Commission des Cadrans Solaires
Juin 2006

Gnomonique vectorielle©

Par ANTONIO DE VICENTE CANDEIRA

Docteur Ingénieur Naval

L'association des amis des cadrans solaires a publié dans son bulletin "Analema" une série d'articles de A. de Vicente sous le titre GNOMONIQUE VECTORIELLE, articles qui sont maintenant regroupés dans ce tiré à part, réédités et corrigés par son auteur.

Comprenons que la présentation de cette méthode vectorielle par le calcul mathématique de toutes les variables et paramètres qui définissent un cadran solaire constitue une nouveauté absolue, et que jusqu'à cette heure il ne s'est élaboré aucune autre méthode de calcul qui résume et synthétise toutes les formules et développements numériques nécessaires au tracé des lignes horaires, des courbes de hauteur, des arcs diurnes, des heures d'ensoleillement et de lever et de coucher, et, en général de toutes les lignes et graphiques nécessaires à la construction de n'importe quel type de cadran solaire (en orientation et en position quelconque). Cette méthode a été développée à l'aide d'un logiciel.

INTRODUCTION

Mouvement de l'ombre

L'étude et le calcul des cadrans solaires, sont basés sur le mouvement apparent du soleil par rapport à la Terre et dont un rayon solaire, passant par l'extrémité d'un style, en respectant certaines conditions, tombe en un point P d'une surface S situé en un certain lieu géographique H . On étudie, par conséquent :

- Le vecteur Rayon Solaire, l'Angle Horaire et la déclinaison du soleil
- Le style et ses coordonnées
- La surface (S), normalement un plan défini par son vecteur \overrightarrow{AH}
- Le point P, issue du Rayon Solaire interceptant la surface (S), exprimé par le vecteur horaire \overrightarrow{PH} , base fondamentale de la gnomonique vectorielle
- Les lignes horaires babyloniennes, italiques et sidérales
- Quelques éléments de gnomonique

Avec ce système vectoriel, on peut calculer un cadran plan quelconque avec un style quelconque, se basant sur les six trièdres orthogonaux et les neuf coefficients de base, pour lesquels les uniques variables, tant dans les formules vectorielles qu'algébriques, sont l'Angle Horaire et la déclinaison du soleil ; et en tenant compte dans ce cas, que les vecteurs Rayon Solaire et Plan de Base, sont seulement fonction des coefficients cités puis que le vecteur horaire est fonction de dix coefficients et des coordonnées du style.

Mais si ce dernier est un vecteur parallèle à l'axe Terrestre ou normal au plan, le vecteur horaire et le reste des derniers éléments du cadran, sont fonction des coefficients déjà mentionnés et dans ce cas aussi de la position de l'autre point géographique K , par rapport à H .

Registre de la propriété intellectuelle
N° M-006415/2.004

Chapitre 1

Trièdres de base

L'étude de la gnomonique commence mathématiquement à travers la géométrie, pour glisser doucement, au fur et à mesure que l'on progresse, vers la trigonométrie, l'algèbre, l'analyse, etc. En apparence, de l'utilisation du calcul vectoriel se détache l'étude de la mécanique rationnelle c'est-à-dire l'étude du mouvement. La gnomonique étant le mouvement d'une ombre (qui n'a pas de masse et par conséquent ne consomme pas d'énergie), la cinématique vectorielle facilite son développement de façon remarquable, s'appuyant sur une série de trièdres orthogonaux et de neuf coefficients qui apparaissent dans toutes les formules vectorielles et algébriques, et qui seront étudiée par la suite.

1.1 Trièdres de base

La matérialisation d'un espace géométrique peut se représenter physiquement au moyen d'un trièdre orthogonal et puisque les éléments gnomoniques appartiennent à des espaces distincts, un ensemble de trièdres convenablement reliés entre eux, permet de rapporter à un trièdre donné, les composantes des autres trièdres à l'aide d'un changement d'axe. C'est une des méthodes qui s'appliquera dans le développement de la gnomonique vectorielle.

Dans ce qui suit, on décrit cinq trièdres de base, et leurs relations à travers divers vecteurs.

1.1.1 Trièdre de base (0)

Il représente l'espace gnomonique fixe, ou le Soleil et la Terre, définissent le plan méridien $Y_0 = 0$, et le plan équatorial $Z_0 = 0$. Les vecteurs de rotation $-\vec{j}_0\delta'$ (déclinaison du soleil) et $-\vec{k}_0\varphi'$ (angle horaire) sont respectivement les vecteurs de base des trièdres (1) et (2). Ses axes sont par conséquent : fig. (1.1) et fig. (1.2)

- Axe X_0H – Intersection du plan méridien déjà cité, avec le plan équatorial céleste
- Axe Y_0H – Normal à l'axe X_0H et est dans le plan équatorial
- Axe Z_0H – Axe de la sphère céleste

1.1.2 Trièdre (1)

Généré par le vecteur de rotation $-\vec{j}\delta'$, défini dans le repère Soleil-Terre, son mouvement relatif est compris entre les limites $\pm 23^\circ 27'$, dont le vecteur de base du vecteur Rayon solaire est $\vec{SH} = -\vec{i}_1$. Les axes sont donnés par : fig (1.1)

- Axe X_1H – ligne Soleil-Terre
- Axe Y_1H – coïncide avec l'axe Y_0H
- Axe Z_1H – normal aux axes précédents

1.1.3 Trièdre (2)

La rotation à partir du vecteur $\vec{k}_0\phi'$ crée ce trièdre, dont le repère est celui de la sphère Locale, dans lequel le point géographique H , repéré par ses coordonnées α (latitude) et λ (longitude), a pour coordonnées ϕ_{hk} et où λ_{hk} est la différence de longitude entre les points H et K . Le vecteur de rotation $\vec{i}_2\alpha'$ en est un vecteur de base. Fig. (1.2) et fig. (1.3).

- Axe X_2H – Rotation de l'axe X_0H de l'angle φ dans le plan équatorial. Origine de la longitude λ
- Axe Y_2H – Rotation de l'axe Y_0H de l'angle φ dans le plan équatorial.
- Axe Z_2H – Axe de la Terre. Coïncide avec l'axe de la sphère céleste.

1.1.4 Trièdre (3)

Celui-ci est généré en appliquant le vecteur de rotation $\vec{i}_2\alpha'$ au trièdre (2) qui est le repère dans lequel se trouve le point géographique H ; le vecteur de rotation $\vec{k}_3\gamma'$ (déclinaison gnomonique) est vecteur de base du repère. Ses axes sont les suivants : fig. (1.1), fig. (1.2) et fig. (1.3)

- Axe X_3H – Coïncide avec l'axe X_2H . Le sens positif indique l'ouest
- Axe Y_3H – Rotation de l'axe Y_2H de l'angle $(90^\circ - \alpha)$. Le sens positif indique le sud
- Axe Z_3H – Rotation de l'axe Z_2H de l'angle $(90^\circ - \alpha)$. Le sens positif coïncide avec la verticale du lieu

1.1.5 Trièdre (A)

Le repère de ce trièdre correspond, dans le trièdre (3), à l'orientation du plan (A) ($Z_a = 0$), comme repère du cadran. Il est défini par son vecteur $\vec{AH}_a = \vec{k}_a$ au moyen des vecteurs de rotation $\vec{k}_3\gamma'$ (déclinaison gnomonique) et $\vec{i}_a\alpha'$ (inclinaison), et dont ce dernier s'applique sur l'axe X_aH du nouveau trièdre. Le vecteur de rotation $\vec{k}_a\phi'$ est en même temps le vecteur de base. Ses axes sont : fig. (1.3)

- Axe X_aH – Trace du plan horizontal $Z_3 = 0$ avec le plan $Z_a = 0$
- Axe Y_aH – Normal à l'axe précédent dans le plan (A)
- Axe Z_aH – Normal au plan (A)

1.1.6 Trièdre (B)

Avec le même repère que précédemment, le trièdre (B) est tel que si $\phi = \varphi_a$ (qui se calculera ultérieurement), alors l'axe Y_bH est parallèle ou coïncide avec l'axe de symétrie du cadran et en plus facilite l'étude de certains types de cadran. Le vecteur de rotation $-\vec{i}_b\Psi$ (angle d'élévation du style) est vecteur de base du repère. Ses axes sont les suivants : fig. (1.3)

- Axe X_bH – Rotation de l'axe X_aH de l'angle ϕ dans le plan $Z_a = 0$
- Axe Y_bH – Rotation de l'axe Y_aH de l'angle ϕ dans le plan $Z_a = 0$
- Axe Z_bH – Coïncide avec l'axe Z_bH

1.2 Vecteurs de base, Angle horaire

Tel que cela a été décrit dans les paragraphes précédents, quatre vecteurs fonction du temps ont été jusqu'à présent présentés : l'angle horaire et la déclinaison du soleil, qui sont des fonctions directes du temps, qui s'étudieront par la suite, et le Rayon solaire et le vecteur Horaire qui le sont à travers les deux précédents.

"L'angle horaire" est généré par le vecteur $\vec{k}_0\varphi'$ dont la valeur est donnée par :

(A-1) $\varphi = 360^\circ / 24^h$, (Degrés / Heure) = Vitesse angulaire de rotation de la Terre = C^{te}

(A-2) $\varphi = 15t + C$ où t est le temps se référant au point géographique H ou au point K , selon le cas à étudier.

Le calcul de C s'effectue de la façon suivante prenant en compte :

1. l'origine de l'Angle Horaire se trouve par définition sur l'axe X_0O : fig. (1.1) et (1.2)
2. les 12^h du point géographique K coïncide avec l'angle $\varphi_{12} = 270^\circ + \varphi_{hk}$ du point géographique H ; avec eux s'établit la relation $\varphi_{hk} = \lambda_h - \lambda_k$

(A-3) $270^\circ + \varphi_{hk} = 15 \times 12_k + C$ et par conséquent, a la formule finale :

(A-4) $\varphi_H = 15t_k + \varphi_{hk} + 90^\circ$: "Angle horaire" du point H , avec l'heure de K .

Si l'on désire l'heure de K en H , avec avance / retard (fuseau horaire), on ajoute à l'angle φ_H le terme $\pm 15T$, où T est le nombre entier qui définit le fuseau à partir du point géographique H .

La valeur de la constante C est fonction de l'origine de l'Angle Horaire pour lequel, en variant la dite origine, nous avons aussi C . Tel est le cas des heures gnomoniques Babyloniques et Italiques, qui s'étudieront en temps voulu.

Quand à la déclinaison solaire, fonction complexe et dépendant du jour, elle ne sera pas calculé dans cette étude, mais se trouvera tabulée dans n'importe quel traité d'astronomie.

1.3 Résumé des Vecteurs de base et des autres Vecteurs

Indépendamment des vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ qui définissent le sens des axes principaux de chaque trièdre, ceux qui suivent sont propres à la gnomonique vectorielle :

- a) Le vecteur unitaire "Rayon solaire" $\overrightarrow{SH} = -\vec{i}_1$. Son origine se trouve dans le Trièdre (1). Il est fonction de la "Déclinaison" du soleil δ , de l'Angle Horaire φ et dans les trièdres (3), (A) et (B), il est fonction des angles α, i, γ , à travers 9 paramètres, dénommés "coefficients trigonométriques de position" d'abréviation "c.t.p", ou "Coefficients", qui seront définis dans le prochain chapitre
- b) Le vecteur "Déclinaison du soleil" $\vec{j}_0\delta'$ appliqué dans le trièdre (0), définit le mouvement apparent du soleil. C'est une fonction du temps
- c) Le vecteur "Angle Horaire" $-\vec{k}_0\varphi'$. Placé dans le trièdre (0), c'est une fonction linéaire du temps. Son origine est l'axe X_0H
- d) Le vecteur de rotation "Latitude Géographique" $\vec{i}_2\alpha'$ est situé dans le trièdre (2), avec $\alpha' = 0$ et par conséquent $\alpha = C^{te}$
- e) Le vecteur de rotation "Longitude Géographique" $\vec{k}_2\lambda'$. Comme le vecteur précédent, il se trouve dans le trièdre (2) et on vérifie que $\lambda = C^{te}$
- f) Le vecteur de rotation "Déclinaison gnomonique" $\vec{k}_3\gamma'$. Sur le trièdre (3), il définit l'angle du vecteur unitaire \overrightarrow{AH} sur le plan horizontal $Z_3 = 0$. Similaire aux cas d) et e), $\gamma = C^{te}$
- g) Le vecteur de rotation "Inclinaison" $\vec{i}_a i'$. Situé dans le trièdre (A), il indique l'élévation du vecteur unitaire \overrightarrow{AH} sur le plan horizontal passant par H . Par conséquent $i = C^{te}$
- h) Le vecteur "Élévation du Style" $-\vec{i}_b\Psi'$ indique l'élévation du Style. Comme vecteur de rotation $\Psi = C^{te}$
- i) Le vecteur $\vec{k}_a\phi'$ correspond à la rotation du trièdre (B) sur le trièdre (A)
- j) Le vecteur unitaire du plan de base $\overrightarrow{AH} = \vec{k}_a$. On définit sa position dans n'importe quel trièdre. Il est fonction des angles α, i , et γ au travers des "c.t.p."
- k) Le vecteur "Style" $\overrightarrow{P_0H}$. Il s'exprime dans n'importe quel trièdre au moyen de ses coordonnées cartésiennes P_x, P_y et P_z par les angles ϕ_a et Ψ ou par les différents "c.t.p."
- l) Le vecteur "Horaire" \overrightarrow{PH} . Il définit le lieu géométrique du point P , et en vérifiant diverses conditions il est fonction de la déclinaison du soleil, de l'angle horaire et des "c.t.p."

Dans ce qui vient d'être exposé, nous avons défini 3 vecteurs de base, 6 vecteurs de rotation de valeur angulaire C^{te} et trois variables supplémentaires.

1.4 Figures

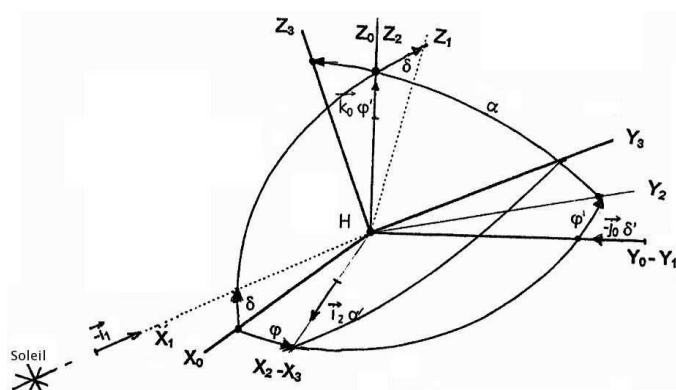


FIG. 1.1 – Trièdres (0), (1), (2) et (3)

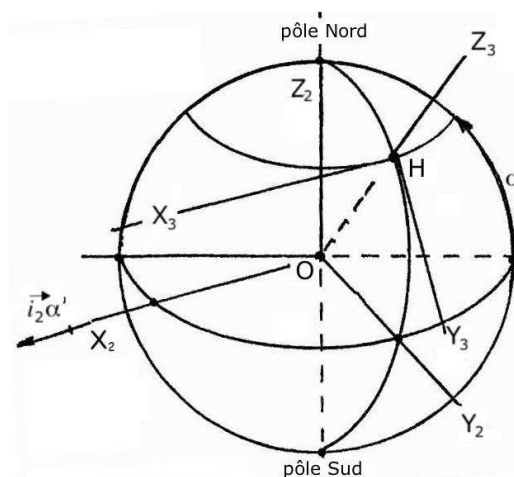


FIG. 1.2 – Trièdres (2) et (3)

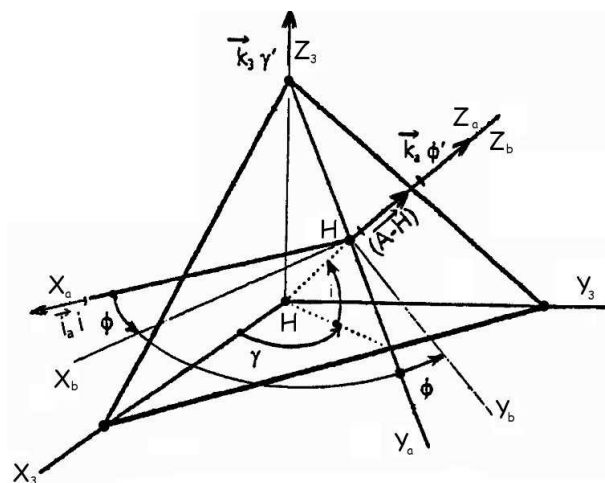


FIG. 1.3 – Trièdres (3), (A) et (B)

Chapitre 2

Équation du rayon solaire et coefficients de base

2.1 Équation du rayon solaire et les "c.t.p."

On a défini le "Rayon solaire" dans le chapitre précédent au moyen du vecteur $\overrightarrow{SH}_1 = -\vec{i}_1$. En le projetant successivement sur les trièdres (2), (3), (A) et (B) on arrive dans le trièdre (B) à l'équation vectorielle :

$$(2.1) \quad (\overrightarrow{SH})_b = \vec{i}_b U_b + \vec{j}_b V_b + \vec{k}_b W_b$$

dont les coordonnées sont :

$$(2.2) \quad \begin{cases} U_b = (-b \sin \phi + n \cos \phi) \sin \varphi \cos \delta + (a \sin \phi - m \cos \phi) \cos \varphi \cos \delta + (j \sin \phi + h \cos \phi) \sin \delta \\ V_b = (-n \sin \phi - b \cos \phi) \sin \varphi \cos \delta + (m \sin \phi + a \cos \phi) \cos \varphi \cos \delta + (-h \sin \phi + j \cos \phi) \sin \delta \\ W_b = -c \sin \phi \cos \delta - d \cos \phi \cos \delta - f \sin \delta \end{cases}$$

Les neuf coefficients de ces formules, appelés «*Coefficients Trigonométriques de position*», en abrégé "c.t.p.", se trouvent dans toutes les formules de la gnomonique vectorielle, comme uniques coefficients dans les variables vectorielles ou algébriques. Leurs valeurs en fonction des angles α , γ , i sont exprimées par :

$$(2.3) \quad \begin{array}{ll} a = -\sin i \cos \gamma & j = \cos \alpha \sin i \sin \gamma + \sin \alpha \cos i \\ b = -\sin \alpha \sin i \sin \gamma + \cos \alpha \cos i & c = -\sin \alpha \cos i \sin \gamma - \cos \alpha \sin i \\ m = \sin \gamma & d = \cos i \cos \gamma \\ n = -\sin \alpha \cos \gamma & f = -\cos \alpha \cos i \sin \gamma + \sin \alpha \sin i \\ h = -\cos \alpha \cos \gamma & \end{array}$$

Dans le cas où le vecteur "Rayon solaire" est situé dans le trièdre (A), cas le plus courant en gnomonique, il doit remplir la condition $\phi = 0$; si on est dans le trièdre (3), les "c.t.p." doivent en plus vérifier que les angles $i = \gamma = 90^\circ$. Et pour finir, dans le trièdre (2), $i = \gamma = \alpha = 90^\circ$. Dans le premier cas (trièdre (A)), l'expression du vecteur et de ses coordonnées sont respectivement :

$$(2.4) \quad (\overrightarrow{SH})_a = \vec{i}_a U_a + \vec{j}_a V_a + \vec{k}_a W_a$$

$$(2.5) \quad \begin{cases} U_a = n \sin \varphi \cos \delta - m \cos \varphi \cos \delta + h \sin \delta \\ V_a = -b \sin \varphi \cos \delta + a \cos \varphi \cos \delta + j \sin \delta \\ W_a = -c \sin \varphi \cos \delta - d \cos \varphi \cos \delta - f \sin \delta \end{cases}$$

Les relations entre les coefficients "c.t.p." se déterminent en appliquant trois théorèmes vectoriels sur les équations de passage entre les trièdres (2) et (A), qui ont la particularité d'être seulement fonction de ces coefficients "c.t.p.", propriété qui sera souvent utilisé. En projetant le vecteur d'un trièdre à l'autre (on omettra les détails de ce calcul),

on trouve les formules suivantes :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \vec{i}_2 = \vec{i}_a m - \vec{j}_a a + \vec{k}_a d \\ \vec{j}_2 = \vec{i}_a n - \vec{j}_a b - \vec{k}_a c \\ \vec{k}_2 = -\vec{i}_a h - \vec{j}_a j + \vec{k}_a f \end{cases}$$

$$(2.7) \quad \begin{cases} \vec{i}_a = \vec{i}_2 m + \vec{j}_2 n - \vec{k}_2 h \\ \vec{j}_a = -\vec{i}_2 a - \vec{j}_2 b - \vec{k}_2 j \\ \vec{k}_a = \vec{i}_2 d - \vec{j}_2 c + \vec{k}_2 f \end{cases}$$

De ces équations on en déduit :

1. Chaque vecteur d'un trièdre est défini dans un autre trièdre par trois "c.t.p." qui à leur tour sont des cosinus directeurs ; la somme de leurs carrés est égale à l'unité. En l'appliquant à ces deux trièdres, on a :

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccc|ccc} m^2 & +a^2 & +d^2 & = & 1 & m^2 & +n^2 & +h^2 & = & 1 \\ n^2 & +b^2 & +c^2 & = & 1 & a^2 & +b^2 & +j^2 & = & 1 \\ h^2 & +j^2 & +f^2 & = & 1 & d^2 & +c^2 & +f^2 & = & 1 \end{array}$$

2. Le produit scalaire des deux vecteurs est nul, c'est-à-dire $\vec{i}_2 \cdot \vec{j}_2 = 0$, etc., par conséquent :

$$(2.9) \quad \begin{array}{ccc|ccc} -mn & -ab & +cd & = & 0 & -ma & -mb & +hj & = & 0 \\ nh & -bj & +cf & = & 0 & ad & -bc & +jf & = & 0 \\ -mh & +aj & +df & = & 0 & -md & +nc & +hf & = & 0 \end{array}$$

3. Le produit vectoriel de deux vecteurs du repère de base est égal au troisième. Son équation est :

$$(2.10) \quad \vec{i}_2 \wedge \vec{j}_2 = \vec{k}_2 \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \vec{k}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i}_a & \vec{j}_a & \vec{k}_a \\ m & -a & d \\ n & -b & c \end{vmatrix} = -\vec{i}_a h - \vec{j}_a j + \vec{k}_a f$$

En appliquant la formule précédente aux autres vecteurs restant du repères de base des trièdres (2) et (A), on arrive, en double, aux expressions suivantes :

$$(2.11) \quad \begin{array}{ll} a = nf - ch & j = -mc - nd \\ b = -mf - dh & c = -ah - mj \\ m = -bf - cj & d = -bh - nj \\ n = af - dj & f = an - bm \\ h = -ac - bd & \end{array}$$

On peut aussi déduire de la même façon le calcul de chacun d'eux à partir des relations suivantes :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\partial d}{\partial i} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial b}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial j}{\partial \gamma} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial i \partial \gamma} \\ b = \frac{\partial j}{\partial \alpha} = -\frac{\partial c}{\partial i} \\ m = \frac{1}{\sin i} \frac{\partial a}{\partial \gamma} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial n}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\cos i} \frac{\partial d}{\partial \gamma} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial h}{\partial \gamma} \\ n = \frac{1}{\cos i} \frac{\partial c}{\partial \gamma} = -\frac{\partial h}{\partial \alpha} = -\tan \alpha \frac{1}{\sin i} \frac{\partial j}{\partial \gamma} \\ h = \frac{1}{\cos i} \frac{\partial f}{\partial \gamma} = \frac{\partial n}{\partial \alpha} \\ j = -\frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial i} \\ c = \frac{\partial b}{\partial i} = -\frac{\partial f}{\partial \alpha} \\ d = -\frac{\partial i}{\partial i} = -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial f}{\partial \gamma} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial c}{\partial \gamma} \\ f = \frac{\partial c}{\partial \alpha} = -\frac{\partial j}{\partial i} \end{array} \right.$$

En résumé, on a 21 relations algébriques reliées entre elles et aux 9 "c.t.p.", ce qui facilite notablement le calcul gnomonique, et 24 dérivées partielles.

2.2 Représentation graphique

Le triangle de position, fig. (2.1), est défini par les sommets suivants :

- PN : pôle nord, zénith du trièdre (2), de coordonnées $(0, 0, 1)_2$; vecteur unitaire \vec{k}_2
- Z : zénith du point géographique H du trièdre (3), de coordonnées $(0, 0, 1)_3$; vecteur unitaire \vec{k}_3
- A : zénith du trièdre (A), de coordonnées $(0, 0, 1)_a$, les côtés du triangle de position étant $PN-Z = (90^\circ - \alpha)$ et $Z-A = (90^\circ - i)$; le vecteur unitaire \vec{k}_a
- $A-PN = (90^\circ - \Psi_0)$ (ou Ψ_0 est l'angle complémentaire du côté $A-PN$)

Pareillement on connaît les angles $Z = (90^\circ - \gamma)$ et $A = \varphi_a$ (donné par $\tan \varphi_a = -\frac{h}{j}$).

En prolongeant les côtés $PN-Z$ et $A-Z$ respectivement, avec les valeurs angulaires α et i , on construit trois triangles numérotés (2), (3) et (4), avec les sommets $Q(0, -1, 0)_a$ et $S(0, 1, 0)_2$. Ces triangles forment le quadrilatère sphérique $PN-Q-S-A$ appelé K , dont les diagonales sont égales à 90° , et qui jouit des propriétés suivantes :

1. En calculant les côtés du quadrilatère K par l'intermédiaire des triangles cités précédemment, on arrive au résultat suivant :

$$(2.13) \quad \begin{cases} \cos PNQ = j & \text{Les cosinus des côtes du quadrilatère} \\ \cos QS = b & K \text{ coïncident avec la valeur} \\ \cos SA = -c & \text{de 4 coefficients "c.t.p."} \\ \cos APN = f \end{cases}$$

2. Les hauteurs correspondant aux triangles (2) et (3) (qui coïncident avec les distances mesurée depuis les sommets du quadrilatère K à ses diagonales), ont les valeurs suivantes, données par ses sinus :

$$(2.14) \quad \begin{cases} \sin PNPN = -h \\ \sin QQ_1 = -a & \text{Les sinus des hauteurs des triangles (2) et (3)} \\ \sin SS_1 = -n & \text{sont égaux à 4 coefficients "c.t.p."} \\ \sin AA_1 = d \end{cases}$$

Pour résumer, les expressions mathématiques des "c.t.p." peuvent se diviser en trois groupes :

1. Un roupe binôme formé par les b, c, j et f ; ils sont fonctions des angles α, γ, i
2. Un groupe monôme avec les a, n, h et d ; ils sont fonction des angles α, γ ou i, γ
3. Un groupe monoparamètre qui appartient au "c.t.p." m , fonction uniquement de l'angle γ

En développant les divers chapitres de la "Gnomonique Vectorielle", il apparaîtra d'autres groupes, formés normalement de trois "c.t.p.", définissant chacun d'eux, les coordonnées des vecteurs, les équations, les éléments de base ; par exemple le groupe " h, j, f ", apparaît comme les coordonnées uniques du vecteur "Style parallèle à l'axe de la Terre" et en ses corollaires. Les relations existantes entre les divers "c.t.p." et les angles des quatre triangles déjà cités ne seront pas considérées dans cette étude.

2.3 Annexe – Passer d'un trièdre à un autre, en changeant les angles α, i, γ dans les "c.t.p."

étant donné les équations (2.6) et (2.7) :

$$\begin{cases} \vec{i}_2 = \vec{i}_a m - \vec{j}_a a + \vec{k}_a d \\ \vec{j}_2 = \vec{i}_a n - \vec{j}_a b - \vec{k}_a c \\ \vec{k}_2 = -\vec{i}_a h - \vec{j}_a j + \vec{k}_a f \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{i}_a = \vec{i}_2 m + \vec{j}_2 n - \vec{k}_2 h \\ \vec{j}_a = -\vec{i}_2 a - \vec{j}_2 b - \vec{k}_2 j \\ \vec{k}_a = \vec{i}_2 d - \vec{j}_2 c + \vec{k}_2 f \end{cases}$$

on calcule les vecteurs de n'importe quel trièdre en fonction de certaines valeurs prises par les angles α, i, γ de la façon suivante : Par exemple :

- A partir des formules (2.6) et (2.7) :

1. $\vec{k}_2 = -\vec{i}_a h - \vec{j}_a j + \vec{k}_a$. Du trièdre (2) au trièdre (A)
2. Si $\gamma = i = 90^\circ$. Du trièdre (2) au trièdre (3), $\vec{k}_2 = -\vec{j}_3 \cos \alpha + \vec{k}_3 \sin \alpha$

3. Si $\alpha = 90^\circ$. Du trièdre (3) au trièdre (A), $\vec{k}_2 = \vec{k}_3 = -\vec{j}_a \cos i + \vec{k}_a \sin i$

4. Si $\gamma = i = \alpha = 90^\circ$. Du trièdre (2) au trièdre (2), $\vec{k}_2 = \vec{k}_2$

- 1. $\vec{k}_a = \vec{i}_2 d - \vec{j}_2 c + \vec{k}_2 f$. Du trièdre (A) au trièdre (2)
- 2. Si $\gamma = i = 90^\circ$. Du trièdre (3) au trièdre (2), $\vec{k}_a = \vec{k}_3 = \vec{j}_2 \cos \alpha + \vec{k}_2 \sin \alpha$
- 3. Si $\alpha = 90^\circ$. Du trièdre (A) au trièdre (3), $\vec{k}_a = \vec{i}_3 \cos i \cos \gamma + \vec{j}_3 \cos i \sin \gamma + \vec{k}_3 \sin i$
- 4. Si $\gamma = i = \alpha = 90^\circ$. Du trièdre (A) au trièdre (A), $\vec{k}_a = \vec{k}_a$

2.4 Figures

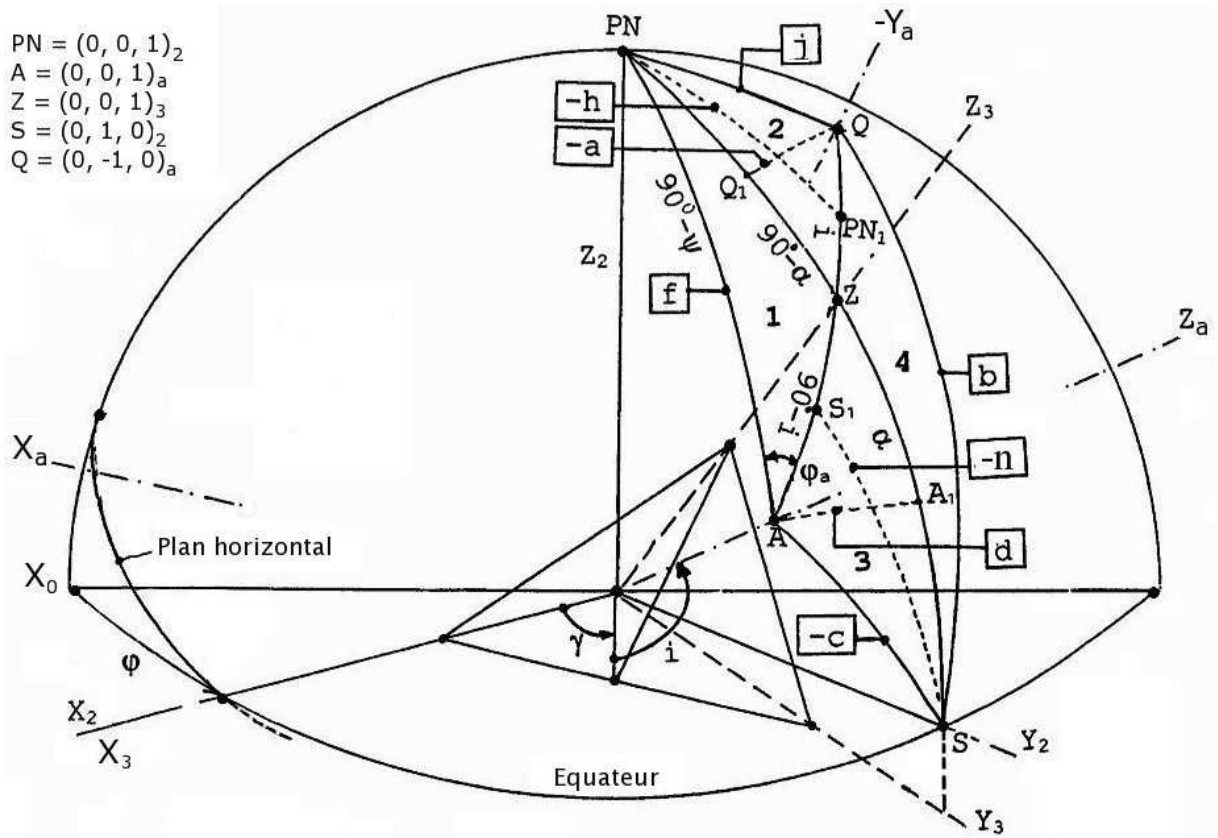


FIG. 2.1 – Quadrilatère K sur la sphère céleste

Chapitre 3

Plan de base et style du cadran

3.1 Base du cadran solaire

Dans le chapitre I on a défini le plan de base comme étant $Z_a = 0$ à partir du vecteur \overrightarrow{AH} et dont l'équation dans les trièdres (A), (B) et (2) est respectivement, fig. (3.1) :

$$(3.1) \quad \overrightarrow{AH}_b = \overrightarrow{AH}_a = \vec{k}_b = \vec{k}_a$$

$$(3.2) \quad \overrightarrow{AH}_2 = \vec{i}_2 d - \vec{j}_2 c + \vec{k}_2 f$$

3.2 Style

Le style est un vecteur situé dans un trièdre quelconque en un point géographique H ayant pour origine le point H et pour extrémité le point P_0 par où passe le "Rayon Solaire" tombant en P sur le plan de Base. Ce vecteur a pour équation :

$$(3.3) \quad \overrightarrow{P_0 H} = \vec{i} P_x + \vec{j} P_y + \vec{k} P_z$$

On exprime aussi ce vecteur dans les trièdres (A) et (B) à travers les angles ϕ (lequel est défini par l'axe $Y_a H$ et la sous-stylaire $Y_b H$ et Ψ (hauteur du style sur le plan horizontal). Fig. (3.2).

3.2.1 Calcul des angles ϕ et Ψ

En projetant le vecteur $\vec{k}_a \wedge (\overrightarrow{P_0 H})_a$, normal à la sous-stylaire, sur les axes $X_a H$ et $Y_a H$ du trièdre (A), et en cherchant son quotient on arrive à l'équation suivante :

$$(3.4) \quad \tan \phi = \frac{(\overrightarrow{AH})_a \wedge (\overrightarrow{P_0 H})_a \cdot \vec{j}_a}{(\overrightarrow{AH})_a \wedge (\overrightarrow{P_0 H})_a \cdot \vec{i}_a} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ P_{xa} & P_{ya} & P_{za} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ P_{xa} & P_{ya} & P_{za} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{P_{xa}}{P_{ya}}$$

3.2.2 Style parallèle à l'axe de la Terre (vecteur \vec{k}_2 ou $-\vec{k}_2$)

3.2.2.1 Trièdre (A)

Il convient de souligner que la direction du style possède deux sens définis par les vecteurs \vec{k}_2 et $-\vec{k}_2$ composant respectivement le nord et le sud et dont les équations vectorielles sont : fig. (3.3)

$$(3.5) \quad (\overrightarrow{P_0 H})_a = \vec{k}_2 = -\vec{i}_a h - \vec{j}_a j + \vec{k}_a f$$

$$(3.6) \quad (\overrightarrow{P_0 H})_a = -\vec{k}_2 = \vec{i}_a h + \vec{j}_a j - \vec{k}_a f$$

Le point P_0 doit être situé sur le plan de base de sorte que, d'après les formules précédentes, si $P_{za} = f > 0$, alors P_0 se trouve sur \vec{k}_2 et si $P_{za} = f < 0$, alors il devrait être sur $-\vec{k}_2$. Dans le cas où $f = 0$, le plan de base est parallèle à l'axe de la Terre d'après (3.2), et il faudra effectuer un calcul pour résoudre ce cas (cas du cadran polaire). On en déduit de plus que :

$$(3.7) \quad \sin \Psi = f$$

La valeur de l'angle $\varphi = \varphi_a$ correspond à l'angle entre la ligne de plus grande pente du plan (A) (axe $Y_a H$) et la sous-style (axe $Y_b H$), d'où :

$$(3.8) \quad \tan \phi_a = -\frac{h}{j}$$

3.2.2.2 Trièdre (B) – Détermination du style

Les équations du style se déterminent par projection des vecteurs du Trièdre (A), donnés par les formules (3.5) et (3.6), sur le trièdre (B), d'après les formules de changement d'axe :

$$(3.9) \quad \begin{cases} \vec{i}_a = \vec{i}_b \cos \phi - \vec{j}_b \sin \phi \\ \vec{j}_a = \vec{i}_b \sin \phi + \vec{j}_b \cos \phi \\ \vec{k}_a = \vec{k}_b \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$(3.10) \quad (\overrightarrow{P_0 H})_b = \vec{k}_2 = -\vec{i}_b(j \sin \phi + h \cos \phi) + \vec{j}_b(h \sin \phi - j \cos \phi) + \vec{k}_b f \quad (\text{avec } f > 0)$$

$$(3.11) \quad (\overrightarrow{P_0 H})_b = -\vec{k}_2 = \vec{i}_b(j \sin \phi + h \cos \phi) - \vec{j}_b(h \sin \phi - j \cos \phi) - \vec{k}_b f \quad (\text{avec } f < 0)$$

L'utilisation de (3.4) est immédiate. Si $\phi = \varphi_a$, alors le trièdre (A) devient le trièdre (B_a) d'axe $Y_b H$, maintenant la sous-style, et axe de symétrie du cadran. Pour finir, les formules du style se transforment de la façon suivante en tenant compte de l'égalité (2.8) : $h^2 + j^2 + f^2 = 1$

$$(3.12) \quad (\overrightarrow{P_0 H})_b = -\vec{j}_b \sqrt{1 - f^2} + \vec{k}_b f \quad (\text{avec } f > 0)$$

$$(3.13) \quad (\overrightarrow{P_0 H})_b = -\vec{j}_b \sqrt{1 - f^2} - \vec{k}_b f \quad (\text{avec } f < 0)$$

Comme dans le cas précédent, si $f = 0$ alors il faut effectuer le calcul.

3.2.3 Style normal au plan de base

L'équation du style perpendiculaire au plan du cadran dans les trièdres (A), (B) et (2) est respectivement :

$$(3.14) \quad (\overrightarrow{P_0 H})_a = (\overrightarrow{P_0 H})_b = \vec{k}_a = \vec{k}_b$$

$$(3.15) \quad (\overrightarrow{P_0 H})_2 = (\overrightarrow{A H})_2 = \vec{i}_2 d - \vec{j}_2 c + \vec{k}_2 f$$

3.3 Figures

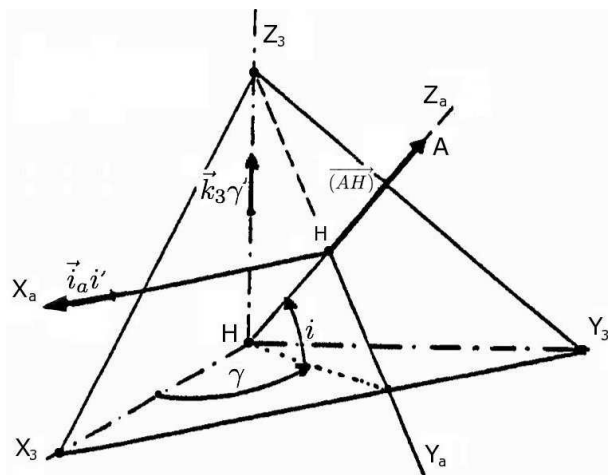


FIG. 3.1 – Le point H a été dédoublé afin de faciliter la compréhension de la figure

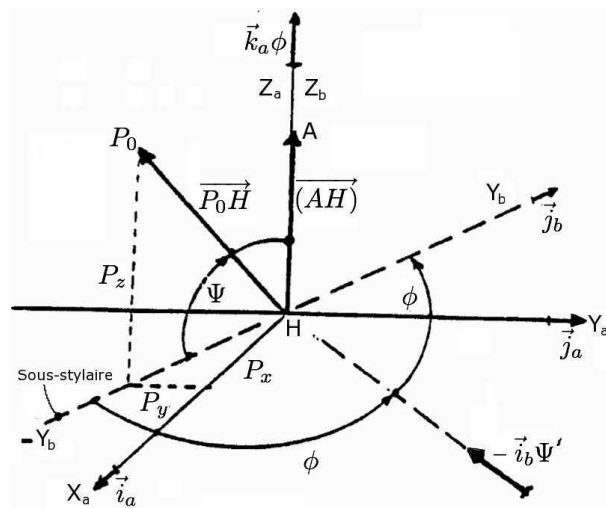


FIG. 3.2 -

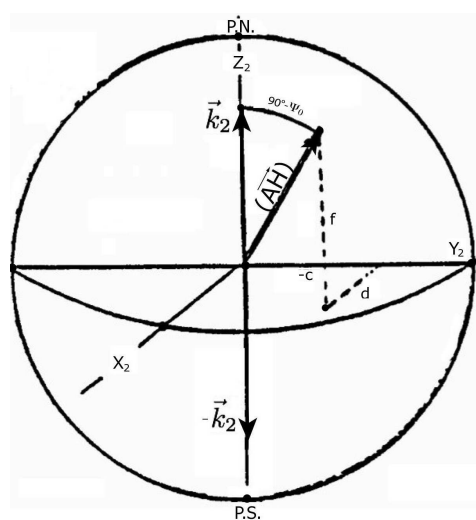


FIG. 3.3 –

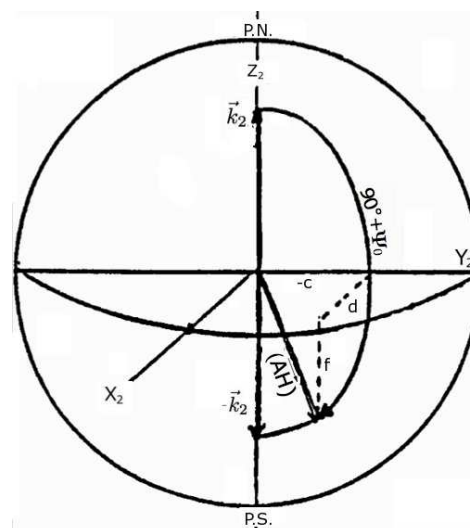


FIG. 3.4 –

Les figures (3.3) et (3.4) sont la représentation du vecteur du plan (A) sur la sphère Terrestre.

Chapitre 4

Vecteur horaire

4.1 Vecteur horaire

Le rayon solaire passant par l'extrémité P_0 du style coupe le plan de base (A) en un point P . Le vecteur généré par le point P et le point origine centre des trièdres, définit le "vecteur horaire"¹. Son expression vectorielle générale s'exprime dans le trièdre (B) dans lequel se déterminent les autres formules, fig. (4.1). Si l'on désire passer au trièdre (A), on doit vérifier que l'on a $\Psi = 0$, pour le trièdre (3) on doit vérifier que $i = \gamma = 90^\circ$ et pour le trièdre (2) que $\alpha = i = \gamma = 90^\circ$.

$$(4.1) \quad (\overrightarrow{PH})_b = (\overrightarrow{P_0H})_b + (\overrightarrow{PP_0})_b$$

Du second membre on connaît :

1. Le style étudié dans le chapitre III :

$$(4.2) \quad (\overrightarrow{P_0H})_b = \vec{i}_b P_{xb} + \vec{j}_b P_{yb} + \vec{k}_b P_{zb}$$

2. Le vecteur $(\overrightarrow{PP_0})_b$ sur le support du "Rayon Solaire" (chapitre III) :

$$(4.3) \quad (\overrightarrow{PP_0})_b = -\vec{i}r = \vec{i}_b r U_b + \vec{j}_b r V_b + \vec{k}_b r W_b$$

Avec ces valeurs, l'équation (4.1) devient :

$$(4.4) \quad (\overrightarrow{PH})_b = (\overrightarrow{P_0H})_b + (\overrightarrow{PP_0})_b = \vec{i}_b (P_{xb} + r U_b) + \vec{j}_b (P_{yb} + r V_b) + \vec{k}_b (P_{zb} + r W_b)$$

Par définition, le point P doit se trouver dans le Plan de Base, lieu qui doit être tel que sa coordonnée sur le plan horizontal Z_b soit nulle :

$$(4.5) \quad P_{zb} + r W_b = 0$$

Et en éliminant " r " dans (4.4), on établit :

$$(4.6) \quad (\overrightarrow{PH})_b = \vec{i}_b \left(P_{xb} + \frac{P_{zb} U_b}{-W_b} \right) + \vec{j}_b \left(P_{yb} + \frac{P_{zb} V_b}{-W_b} \right)$$

Pour terminer, en substituant les coordonnées du "vecteur Rayon Solaire" par leurs valeurs données dans les formules (2.2), on obtient finalement l'équation générale du "vecteur horaire" qui est l'élément fondamental de la gnomonique vectorielle :

$$(4.7) \quad (\overrightarrow{PH})_b = \vec{i}_b \frac{A_b \sin \varphi + B_b \cos \varphi + H_b \tan \delta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \tan \delta} + \vec{j}_b \frac{M_b \sin \varphi + N_b \cos \varphi + J_b \tan \delta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \tan \delta}$$

¹Il s'agit du vecteur \overrightarrow{HP} , ou \overrightarrow{PH} si l'on respecte la notation vectorielle de l'auteur et qui ne semble pas être la même que celle adoptée en France (qui s'écrit dans le sens : point origine-point extrémité).

et où les *coefficients du vecteur horaire* (abréviation "**c.v.h.**") sont donnés par :

$$(4.8) \quad \begin{cases} A_b = (-b \sin \phi + n \cos \phi) P_{zb} + c P_{xb} \\ B_b = (a \sin \phi - m \cos \phi) P_{zb} + d P_{xb} \\ M_b = (-n \sin \phi - b \cos \phi) P_{zb} + c P_{yb} \\ N_b = (m \sin \phi + a \cos \phi) P_{zb} + d P_{yb} \\ H_b = (j \sin \phi + h \cos \phi) P_{zb} + f P_{xb} \\ J_b = (-h \sin \phi + j \cos \phi) P_{zb} + f P_{yb} \end{cases}$$

qui sont à la fois fonction :

- a) de l'angle ϕ
- b) des "c.t.p."
- c) des coordonnées correspondant à chaque style

En développant ces coefficients dans les trièdres (A) et (B), on obtient respectivement :

1. Dans le trièdre (B).

On étudie seulement le cas du trièdre (B₀) (avec $\phi = \varphi_a$)

$$(4.9) \quad \begin{cases} A_{b0} = \frac{-d}{\sqrt{1-f^2}} P_{zb} + c P_{xb} \\ B_{b0} = \frac{c}{\sqrt{1-f^2}} P_{zb} + d P_{xb} \\ M_{b0} = \frac{-cf}{\sqrt{1-f^2}} P_{zb} + c P_{yb} \\ N_{b0} = \frac{-df}{\sqrt{1-f^2}} P_{zb} + d P_{yb} \\ H_{b0} = f P_{xb} \\ J_{b0} = \sqrt{1-f^2} P_{zb} + f P_{yb} \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} \frac{-fd}{\sqrt{1-f^2}} \\ \frac{fc}{\sqrt{1-f^2}} \\ -c \\ \frac{-d}{\sqrt{1-f^2}} \\ \sqrt{1-f^2} \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \frac{-d}{\sqrt{1-f^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{1-f^2}} \\ -fc \\ \frac{-d}{\sqrt{1-f^2}} \\ \sqrt{1-f^2} \\ 0 \\ \sqrt{1-f^2} \end{cases}$$

et dans lesquels les numéros des groupes équations définissent :

- (4.9).... Les coefficients dans le trièdre (B₀) en fonction de P_{xb}, P_{yb}, P_{zb}
- (4.10).... Idem avec le style parallèle à l'axe de la Terre \vec{k}_2
- (4.10bis).... Idem avec le style parallèle à l'axe de la Terre $-\vec{k}_2$ changeant le signe de $\sqrt{1-f^2}$
- (4.11).... Idem avec le style perpendiculaire au plan de base

2. Dans le trièdre (A).

Sauf exception, c'est le trièdre normal pour le calcul des plans de base et du cadran. Ses coefficients sont :

$$(4.12) \quad \begin{cases} A_a = n P_{za} + c P_{xa} \\ B_a = -m P_{za} + d P_{xa} \\ M_a = -b P_{za} + c P_{ya} \\ N_a = a P_{za} + d P_{ya} \\ H_a = h P_{za} + f P_{xa} \\ J_a = j P_{za} + f P_{ya} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} a \\ b \\ m \\ n \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} n \\ -m \\ -b \\ a \\ h \\ j \end{cases}$$

dans lesquels :

- (4.12).... Les coefficients dans le trièdre (A) en fonction de P_{xa}, P_{ya} et P_{za}
- (4.13).... Idem avec le style parallèle à l'axe de la Terre \vec{k}_2 ($f > 0$). Ils sont fonction des coefficients "c.t.p."

- (4.13bis).... Idem avec le style parallèle à l'axe de la Terre $-\vec{k}_2$ ($f < 0$) en changeant le signes des coefficients "c.v.h." et par conséquent des coefficients "c.t.p." a, b, m, n, h, j
- (4.14).... Le style normal au plan de base. ($P_{za} = 1$). Ils sont fonction des coefficients "c.t.p."

Si $f < 0$ et le style est parallèle à l'axe de la Terre ($-\vec{k}_2$), alors on se trouve dans le cas des cadrans solaires verticaux dans l'hémisphère nord ; il faut changer le signe des coefficients "c.t.p." exceptés les c, d, f dans le trièdre (A) et celui de $\sqrt{1-f^2}$ dans le trièdre (B₀).

En partant du "vecteur horaire" on déduit les lignes d'arc-diurnes et les lignes horaires en éliminant ou bien "l'angle horaire" φ , ou bien la "déclinaison du soleil" δ , en résolvant le "vecteur horaire" comme une équation paramétrique. On écrit : $(\vec{PO}) = i\vec{F}_1(\varphi, \delta) + j\vec{F}_2(\varphi, \delta)$, d'où $X = F_1(\varphi, \delta)$ et $Y = F_2(\varphi, \delta)$.

4.2 Lignes d'arc diurnes

C'est le lieu géométrique décrit par le point P lorsqu'on fait varier l'angle horaire φ . L'équation générale des arcs-diurnes s'exprime en fonction de δ , des coefficients "c.t.p." et des variables x et y ; fig. (4.2), (4.3) et (4.4).

$$(4.15) \quad \begin{aligned} & [x(-cJ_b + fM_b) + y(-fA_b + cH_b) + (-M_bH_b + A_bJ_b)]^2 \tan^2 \delta \\ & + [x(-dJ_b + fN_b) + y(-fB_b + dH_b) + (-N_bH_b + B_bJ_b)]^2 \tan^2 \delta \\ & - [x(cN_b - dM_b) + y(dA_b - cB_b) + (B_bM_b - A_bN_b)]^2 = 0 \end{aligned}$$

Le déplacement du point P est limité par les arcs-diurnes correspondant à la déclinaison du soleil comprise entre $\pm 23^\circ 27'$. Il existe d'autres limitations, étudiés un peu plus loin : la première dans le cas où le rayon solaire ne tombe pas sur le plan du cadran et la seconde lorsque le point P se trouve à l'extrémité P_0 du style.

La formule précédente exprimée dans le trièdre (A), en se basant sur les relations (4.7), (4.8) etc... et les relations (2.8), (2.9) et (2.10), (2.11), (2.12) du chapitre II puis en fonction des coordonnées du style, devient :

$$(4.16) \quad \begin{aligned} & (mx - ay - mP_{xa} + aP_{ya} - dP_{za})^2 \tan^2 \delta \\ & + (nx - by - nP_{xa} + bP_{ya} + cP_{za})^2 \tan^2 \delta \\ & = (hx + jy - hP_{xa} - jP_{ya} + fP_{za})^2 \end{aligned}$$

4.2.1 Coniques des arc-diurnes

Le type de coniques correspondant aux lignes d'arc-diurnes sont indépendantes du trièdre de référence et on démontre par la géométrie analytique que les coefficients des variables du second degré $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ vérifie la condition :

$$(4.17) \quad B^2 - 4AC \begin{cases} \leq 0 & \text{Ellipse} \\ = 0 & \text{Parabole} \\ > 0 & \text{Hyperbole} \end{cases}$$

En appliquant ce théorème à l'équation (4.20) où à la formule générale (4.15), on arrive aux relations suivantes :

$$(4.18) \quad \cos^2 \delta \begin{cases} \leq f^2 & \text{Ellipse} \\ = f^2 & \text{Parabole} \\ > f^2 & \text{Hyperbole} \end{cases}$$

Le "c.t.p." f détermine, avec la déclinaison solaire δ , le type de conique correspondant aux arcs diurnes.

4.2.2 Exemples d'arcs diurnes

Dans le Trièdre (A), style parallèle à l'axe de la Terre, avec $f < 0$ ($-\vec{k}_2$) :

$$(4.19) \quad (h^2 - \sin^2 \delta) x^2 + (j^2 - \sin^2 \delta) y^2 + 2(hj)xy - 2(h \cos^2 \delta)x - 2(j \cos^2 \delta)y + \cos^2 \delta = 0$$

Dans le Trièdre (A), style normal au plan (A) :

$$(4.20) \quad (h^2 - \sin^2 \delta) x^2 + (j^2 - \sin^2 \delta) y^2 + 2(hj)xy + 2(hf)x + 2(jf)y + f^2 - \sin^2 \delta = 0$$

Dans le Trièdre (B_0), style parallèle à l'axe de la Terre :

$$(4.21) \quad \sin^2 \delta x^2 + (f^2 - \cos^2 \delta) y^2 - 2\sqrt{1-f^2} \cos^2 \delta y - \cos^2 \delta = 0$$

Dans le Trièdre (B_0), style normal au plan (A) :

$$(4.22) \quad \sin^2 \delta x^2 + (f^2 - \cos^2 \delta) y^2 - 2f\sqrt{1-f^2} y - f^2 + \sin^2 \delta = 0$$

Dans le Trièdre (B_0), cadran polaire, style normal au plan (A) :

$$(4.23) \quad \tan^2 \delta x_b^2 - y_b^2 + \tan^2 \delta = 0$$

Dans le cadran polaire ($f = 0$), pour les arc-diurnes, d'après (4.18) on a $\cos^2 \delta > 0$. Se sont des hyperboles.

On rappelle que le centre des coniques est donné par les équations :

$$(4.24) \quad f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(y) = 0$$

4.2.3 Équinoxiale

Si $\delta = 0$ dans toutes les expressions précédentes, comme par exemple dans le nouveau "Vecteur Horaire" dont son expression algébrique est donnée juste après, on obtient :

$$(4.25) \quad (\overrightarrow{PH})_b = \vec{i}_b \frac{A_b \tan \varphi + B_b}{c \cot \varphi + d} + \vec{j}_b \frac{M_b \tan \varphi + N_b}{c \cot \varphi + d}$$

$$(4.26) \quad (cN_b - dM_b)x + (dA_b - cB_0)y + (B_bM_b - A_bN_b) = 0$$

et il en résulte dans le trièdre (A) :

$$(4.27) \quad (hx + jy - hP_{xa} - jP_{ya} + fP_{za}) = 0$$

et en fonction de chaque style, dans chaque trièdre et en tenant compte des relations déjà cités entre les "c.t.p." étudiées dans le chapitre II, on arrive à :

$$(4.28) \quad y = \frac{-1}{\sqrt{1-f^2}} \quad \text{avec le style parallèle à l'axe de la Terre. Trièdre } (B_0)$$

$$(4.29) \quad y = \frac{-f}{\sqrt{1-f^2}} \quad \text{avec le style au plan (A). Trièdre } (B_0)$$

$$(4.30) \quad hx + jy + 1 = 0 \quad \text{avec le style parallèle à l'axe de la Terre. } \vec{k}_2 (f > 0) \text{ Trièdre (A)}$$

$$(4.31) \quad hx + jy + f = 0 \quad \text{avec le style normal au plan (A). Trièdre (A)}$$

Si l'angle de la droite équinoxiale $\tan \phi = -\frac{h}{j} < 0$, le plan est orienté vers l'est ($\gamma > 90^\circ$) et les "c.t.p." h et j ont le même signe; et si $\tan \phi = -\frac{h}{j} > 0$, l'orientation est vers l'ouest ($\gamma < 90^\circ$), et les "c.t.p." h et j ont des signes distincts.

4.3 Lignes horaires

Le lieu géométrique décrit par le point P lorsque la déclinaison du soleil δ varie est un faisceau de droites, ou "ligne horaire", d'intersection le point H_0 , qui est fonction de φ et des "c.v.h.", et des variables x et y . Son équation générale est (fig. (4.2)) :

$$(4.32) \quad y_b = x_b \frac{fR_b - J_bT}{fS_b - H_bT} + \frac{C_b}{fS_b - H_bT}$$

où

$$(4.33) \quad \begin{cases} R_b = M_b \sin \varphi + N_b \cos \varphi \\ S_b = A_b \sin \varphi + B_b \cos \varphi \\ T = c \sin \varphi + d \cos \varphi \\ C_b = (A_b J_b - M_b H_b) \sin \varphi + (B_b J_b - N_b H_b) \cos \varphi \end{cases}$$

On détermine les coordonnées du point H_0 en égalant à zéro les coefficients de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ de l'équation (4.33) et en résolvant les équations correspondantes.

Dans le trièdre (A) avec un style normal au plan de base, on a les exemples (4.3.1) suivants :

4.3.1 Exemples dans le trièdre (A)

4.3.1.1 ★Style normal au plan de base

$$\begin{cases} R_a = -b \sin \varphi + a \cos \varphi \\ S_a = n \sin \varphi - m \cos \varphi \\ C_a = -d \sin \varphi + c \cos \varphi \\ T = c \sin \varphi + d \cos \varphi \end{cases}$$

venant de la ligne horaire suivante :

$$(4.34) \quad (m \tan \varphi + n) x - (a \tan \varphi + b) y - d \tan \varphi + c = 0$$

Le point H_0 a pour coordonnées : $H_0 \left(\frac{h}{f}, \frac{j}{f} \right)$.

4.3.1.2 ★Style parallèle à l'axe de la Terre

$$(4.35) \quad (m \tan \varphi + n) x - (a \tan \varphi + b) y = 0$$

Le point H_0 a pour coordonnées : $H_0 (0, 0)$.

Il coïncide avec les directions du vecteur horaire et est indépendant de la déclinaison du soleil δ .

Si $f = 0$, cas du cadran polaire, alors l'équation de la ligne horaire prend la forme :

$$(4.36) \quad y = \frac{J_b}{H_b} x - \frac{C_b}{H_b T}$$

c'est-à-dire que les lignes de ce faisceau sont parallèles et le terme indépendant est fonction de φ . Fig. (4.4).

4.3.1.3 ★Style normal au plan dans le trièdre (A)

$$\begin{cases} J_a = j \\ H_a = h \\ C_a = -d \sin \varphi + c \cos \varphi \\ T = c \sin \varphi + d \cos \varphi \end{cases}$$

Par conséquent,

$$(4.37) \quad y_a = \frac{j}{h} x_a - \frac{1}{h \tan(\varphi + \varphi_a)}$$

avec $\tan \varphi_h = \frac{d}{c}$.

Si de plus $H_b = 0$, le trièdre (B) devient le trièdre (B₀) et la ligne horaire a pour équation :

$$(4.38) \quad x = \frac{C_{b0}}{T} = \frac{1}{\tan(\varphi + \varphi_h)}$$

avec : $C_{b0} = -d \sin \varphi + c \cos \varphi$, $J_{0b} = 1$ et ou $\tan \varphi_h = \frac{d}{c}$ est l'angle entre la sous-stylaire et l'axe $Y_{b0}H$. Si celui-ci se déplace sur cet axe d'une longueur HH_n , il générera un plan de hauteur unité et de la même façon le point P , parcourra les segments horaires parallèles à HH_n limité entre les hyperboles extrêmes aux points H et H_n ; voir fig. (4.4)

4.3.2 Ligne d'horizon

C'est par définition la trace de l'intersection du plan de base (A) avec le plan parallèle à l'horizon passant par l'extrémité P_0 du style. Pour qu'il y ait éclaircissement, le "Rayon solaire" doit réaliser deux conditions : il doit se couper sur le plan (A) et sur le plan horizontal du lieu géographique du point H , et il doit rendre négatives ses coordonnées sur \vec{k}_a et \vec{k}_3 .

1. Sur le plan (A) dans le trièdre (A), on vérifie :

$$(4.39) \quad (\overrightarrow{PH})_a \cdot \vec{k}_a < 0$$

$$(4.40) \quad W_a = -c \sin \varphi \cos \delta - d \cos \varphi \cos \delta - f \sin \delta < 0 \text{ selon la relation (2.2) du chapitre II}$$

2. Dans le plan horizontal, dans le trièdre (3), la composante du style sur l'axe Z_3 c'est-à-dire P_{z3} est défini par sa projection sur cet axe (produit scalaire) : $(\overrightarrow{P_0H})_a \cdot \vec{k}_3$

De cette façon, pour qu'il y ait éclaircissement, l'ordonnée de la Ligne d'horizon sur l'axe y_{Ha} doit être plus petite que celle du "vecteur horaire" y_a . Fig. (4.5) et (4.6) donné par :

$$(4.41) \quad y_{Ha} = -\frac{P_{z3}}{\cos i} = -\frac{(\overrightarrow{P_0H})_a \cdot \vec{k}_3 \cos \gamma}{\cos i \cos \gamma} = \frac{dP_{ya} + aP_{za}}{d} = \frac{N_a}{d}$$

ou $\vec{k}_3 = -\vec{j}_a \cos i + \vec{k}_a \sin i$ (2.6) avec $\alpha = 90^\circ$, chapitre II; $(\overrightarrow{P_0H})_a = \vec{i}_a P_{xa} + \vec{j}_a P_{ya} + \vec{k}_a P_{za}$ (3.3) chapitre III et $dP_{ya} + aP_{za} = N_a$ (4.12) du chapitre IV.

En développant la formule (4.41) dans le trièdre (3) avec un style parallèle à l'axe de la Terre (avec $N_a = n$ ou $N_a = a$ si le style est parallèle au plan de base, c'est-à-dire avec les valeurs : $m = 1$, $n = 0$, $f = \sin \alpha$, $c = -\cos \alpha$), on arrive à :

$$(4.42) \quad y_a = \frac{-\sin \varphi}{-\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \tan \delta} > \frac{n}{d}$$

En utilisant la même relation (4.40), on arrive à :

$$(4.43) \quad \sin \varphi < \tan \alpha \tan \delta$$

Il y a éclaircissement lorsque les conditions : (4.40) et (4.41) ou (4.42) sont satisfaites.

4.3.3 Équation du temps. Calcul de la lemniscate

Le temps moyen t_{mk} est distinct du temps solaire vrai t_k parce que les principes de base de la gnomonique n'utilisent pas les lois de Képler, et la différence entre ces temps en chaque instant est connue sous le nom d'"Equation du temps".

$$(4.44) \quad t_{mk} - t_k = "EqT"$$

Ces valeurs se trouvent publiées dans n'importe quel traité d'Astronomie ou de Gnomonique et sa représentation graphique est donnée en fig. (4.8) qui est la somme de deux sinusoides : l'équation du centre (EcT) et l'équation de l'obliquité de l'écliptique. L'Angle Horaire Vrai en fonction du temps Moyen t_{mk} en heures, de "EqT" en minutes de temps et de φ_{hk} en degrés, s'exprimera par :

$$(4.45) \quad \varphi_h = 15(t_{mk} - EqT) + \varphi_{hk} + 90^\circ = 15t_{mk} + \varphi_{hk} + 90^\circ - \frac{EqT}{4}$$

Dans un cadran solaire, si on utilise les heures de temps moyen, l'extrémité P du vecteur horaire au lieu de décrire pour une heure déterminé et durant l'année, une droite du réseau horaire, décrit une courbe en forme de huit appelée "Lemniscate" (4.7). Son équation vectorielle définie pour un "vecteur horaire" quelconque en fonction de l'angle horaire est :

$$\begin{aligned} \varphi_{mk} &= 15(t_k + EqT) + \varphi_{hk} + 90^\circ \\ (4.46) \quad \varphi_{mk} &= 15t_k + \varphi_{hk} + \frac{EqT}{4} \end{aligned}$$

4.4 Figures

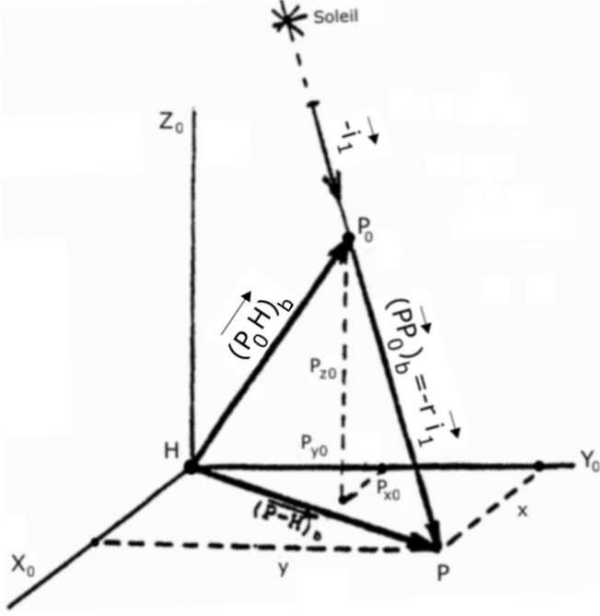


FIG. 4.1 -

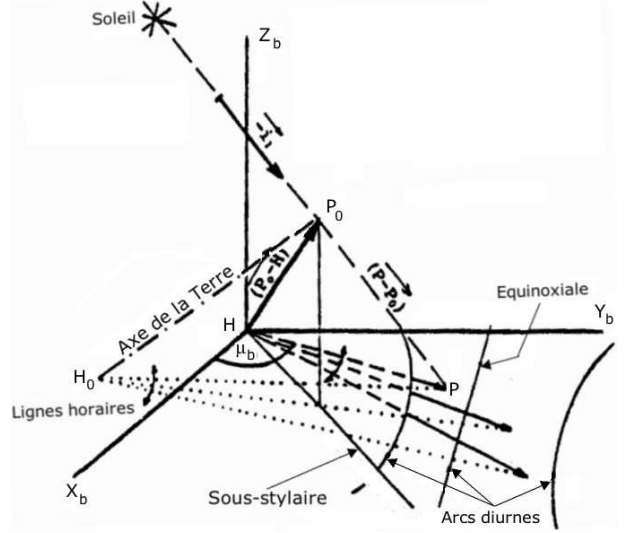


FIG. 4.2 -

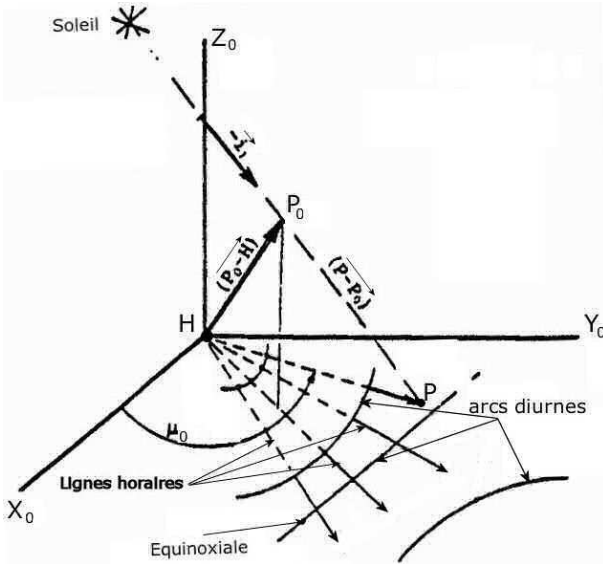


FIG. 4.3 -

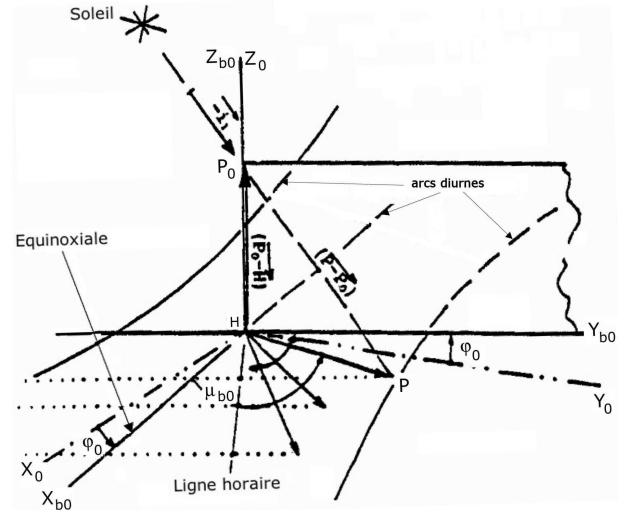


FIG. 4.4 -

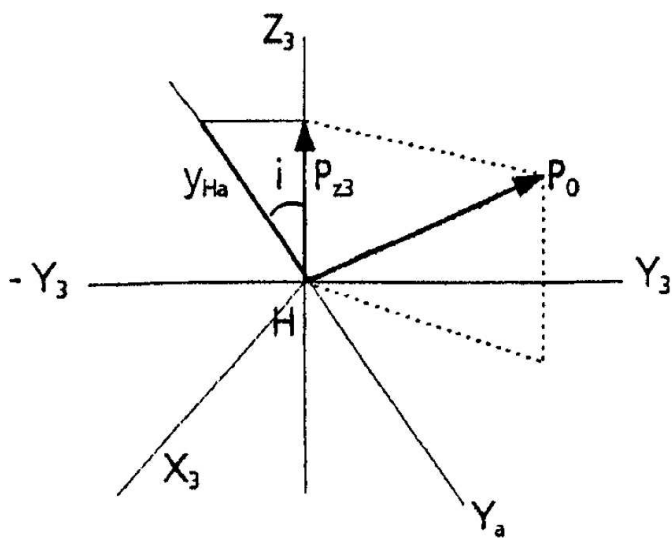


FIG. 4.5 – Ordonnée y_{Ha} – Ligne d'horizon, trièdre (A)

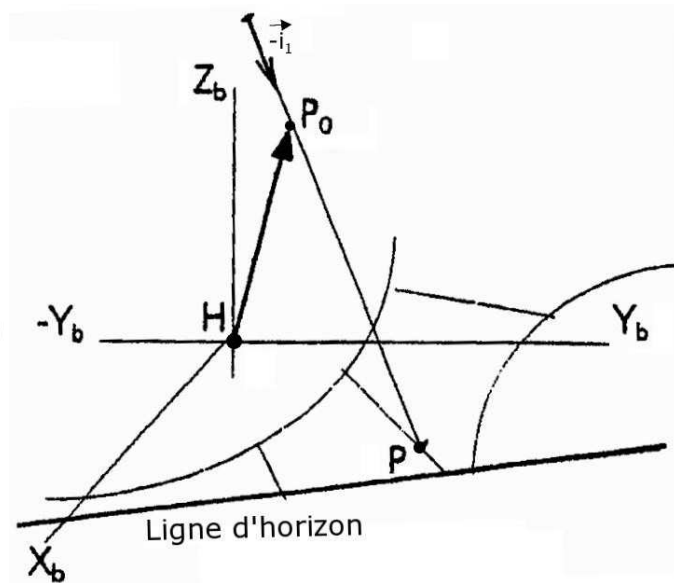


FIG. 4.6 – Ligne d'horizon dans le trièdre (B)

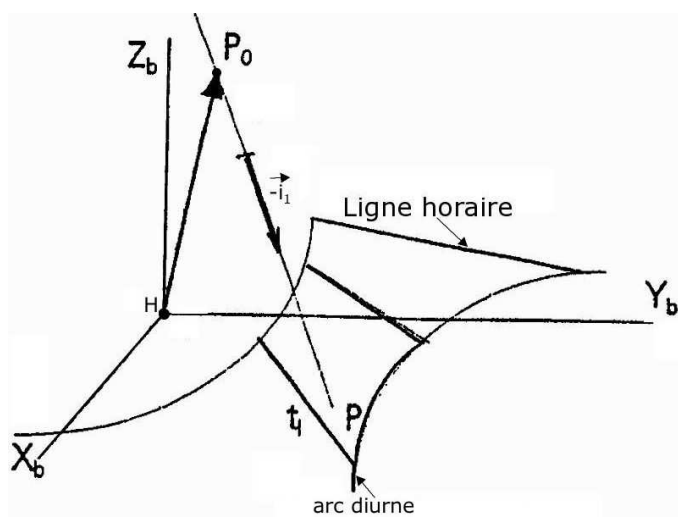
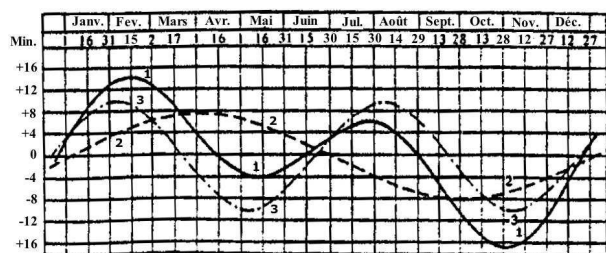


FIG. 4.7 – courbe en huit sur la ligne horaire t_i



Courbe 1 : Équation du Temps
 Courbe 2 : Équation du Centre
 Courbe 3 : Équation de l'obliquité de l'écliptique

FIG. 4.8 – Courbe de l'équation du temps

Chapitre 5

Co-déclinaison et inclinaison d'un plan

(à partir d'un cadran solaire, contrairement à d'autres méthodes)

Soit un plan (A) donné, dans lequel on ne connaît ni la co-déclinaison¹ (γ) ni l'inclinaison (i). On peut les déterminer en faisant coïncider l'ombre d'un style normal au plan de base, c'est-à-dire, le vecteur horaire, avec une direction préalablement choisie, en un jour et heure donnés.

Il s'ensuivra deux processus : le premier en prenant l'angle horaire de valeurs : $\mu_0 = 90^\circ, 0^\circ$, ou 180° selon le paramètre calculé. Il a l'avantage d'être simple, mais a l'inconvénient de disposer d'un seul instant par jour dans le cas de la co-déclinaison et d'un ou deux dans le cas de l'inclinaison ; la seconde méthode, demandant un processus de calcul plus complexe, peut s'appliquer en n'importe quel moment.

5.1 Calcul de la co-déclinaison (1ère méthode)

Dans le trièdre (A), considérons un style normal au plan de base (A) qui se coupe sur un plan auxiliaire normal à ce dernier, avec la trace de l'axe Y_aH (qui peut se définir comme le côté d'une équerre tournant sur l'autre qui se trouve sur l'axe X_aH), et dont l'intersection avec (A) définit le "vecteur horaire". Fig. (5.1). Son équation est :

$$(5.1) \quad (\overrightarrow{P_0H})_a = \vec{k}_a P_z$$

On note l'heure légale t_0 lorsque le "vecteur horaire", c'est-à-dire l'aiguille² du cadran solaire coïncide avec l'axe Y_aH (avec $\mu_0 = 90^\circ$ où $(\overrightarrow{P_0H})_a \cdot \vec{i}_a = 0$)

$$(5.2) \quad (\overrightarrow{P_0H})_a \cdot \vec{i}_a = A \sin \varphi_0 + B \cos \varphi_0 + H \tan \delta = n \sin \varphi_0 - m \cos \varphi_0 + h \tan \delta = 0$$

avec :

$$\begin{cases} n = -\sin \alpha \cos \gamma \\ m = \sin \gamma \\ h = -\cos \alpha \cos \gamma \end{cases}$$

et pour lequel l'angle horaire est donné par :

$$(5.3) \quad \varphi_0 = 15 t_0 + \varphi_{hk} + 90^\circ - \frac{EqT}{4} - 15 N$$

En isolant $\tan \gamma$ avec ces données du "vecteur horaire", on trouve :

$$(5.4) \quad \tan \gamma = -\frac{\sin \alpha \sin \varphi_0 + \cos \alpha \tan \delta}{\cos \varphi_0} = -\frac{f_0 \sin \varphi_0 - c_0 \tan \delta}{\cos \varphi_0}$$

¹Il s'agit du complémentaire de la déclinaison gnomonique habituellement adoptée en France, comme étant l'angle dièdre orienté, compté depuis le Sud, entre le plan méridien et le plan normal au cadran. L'auteur prend donc l'angle orienté, compté depuis l'ouest, entre la trace du premier vertical (Plan est-Ouest) et la trace du plan du cadran sur le plan horizontal

²Le mot "aiguille" est une traduction mot pour mot. Il est clair qu'il faut entendre par là que l'ombre du style (\overrightarrow{HP}) sur le plan du cadran agit comme l'aiguille d'une montre. C'est cette image qu'à voulu rendre l'auteur. Elle sera conservée telle quelle, même si elle n'est pas très heureuse en français.

(f_0 et c_0 correspondent à f et c lorsque $i = 90^\circ$).

Conséquence immédiate : la co-déclinaison d'un plan est indépendante de son inclinaison. Donc la co-déclinaison d'une droite serait comme la trace d'un plan horizontal prenant le temps Légal t_0 au moment où le vecteur horaire est normal à cette droite, et avec le style situé sur un plan vertical de trace l'axe Y_3H ... Fig. (5.2).

Le même résultat se produit en considérant la valeur de μ_0 et φ_0 correspondante, quand le "vecteur horaire" est horizontal, c'est-à-dire :

$$(5.5) \quad \tan \mu_0 = \frac{-b \sin \varphi_0 + a \cos \varphi_0 + j \tan \delta}{n \sin \varphi_0 - m \cos \varphi_0 + h \tan \delta} \rightarrow \infty$$

5.2 Calcul de l'inclinaison (1ère méthode)

Suivant ce dernier raisonnement, le plan auxiliaire se définit comme formé par une équerre qui tourne autour de l'autre côté situé sur l'axe Y_aH , fig. (5.3). Son équation étant :

$$(5.6) \quad (\overrightarrow{P_0H})_a = \vec{j}_a P_z$$

On note l'heure légale t_0 lorsque le "vecteur horaire", c'est-à-dire l'aiguille du cadran, coïncide avec l'axe X_aH (avec $\mu_0 = 0^\circ$ où $(\overrightarrow{PH})_a \cdot \vec{j}_a$), donnera comme résultat :

$$(5.7) \quad (\overrightarrow{PH})_a \cdot \vec{j}_a = -b \sin \varphi_0 + a \cos \varphi_0 + j \tan \delta = 0$$

Multipliant le numérateur et le dénominateur par $\cos \gamma$ et prenant en compte les relations déjà cités entre les coefficients "c.t.p." du chapitre I, alors l'inclinaison sera donné par :

$$(5.8) \quad \tan i = \frac{h \sin \varphi_0 - n \tan \delta}{mn \sin \varphi_0 + (1 - m^2) \cos \varphi_0 + mh \tan \delta}$$

ou il est nécessaire de la connaître en fonction de γ (par exemple avec la formule (5.13)).

5.3 Exemple numérique

Trouver la co-déclinaison et l'inclinaison d'un plan placé en un point géographique H de latitude $40^\circ 29'N$ et de longitude $-3^\circ 52'$ le 01-02-1998 ; fig. (5.4)

Les DONNÉES :

Latitude Nord	$\alpha = 40^\circ 29' = 40.483^\circ$	$(\sin \alpha = 0.6467; \cos \alpha = 0.7628)$
Déclinaison du soleil	$\delta = -17.074^\circ$	$\tan \delta = -0.3071$
Equation du temps	$EqT = 13^m 35^s = 13.583^m$	$\frac{EqT}{4} = 3.396^\circ$
Différence de longitude	$\varphi_{hg} = -3^\circ 52' = 3.87^\circ$	
Style normal au plan de base		

5.3.1 Calcul de la co-déclinaison γ

L'heure légale au moment où le "vecteur horaire" est sur l'axe Y_aH est : $t_0 = 12^h 11^m 10^s = 12.186^h$.

L'angle horaire correspondant :

$$(5.9) \quad \varphi_0 = 15t_0 + \varphi_{hk} + 90^\circ - \frac{EqT}{4} - 15^\circ = 250.524^\circ \quad (\sin \varphi_h = -0.9428; \cos \varphi_h = -0.3334)$$

et la co-déclinaison est :

$$(5.10) \quad \tan \gamma = -\frac{\sin \alpha \sin \varphi_0 + \cos \alpha \tan \delta}{\cos \varphi_0} = -2.53 \quad \text{c'est-à-dire : } \boxed{\gamma = 111.55^\circ}$$

5.3.2 Calcul de l'inclinaison i

L'heure légale lorsque le "vecteur horaire" est sur l'axe parallèle à $X_a H$ est : $t_g = 18^h 20^m 30^s = 18.341^h$. L'angle horaire correspondant :

$$(5.11) \quad \varphi_0 = 15t_0 + \varphi_{hk} + 90^\circ - \frac{EqT}{4} - 15^\circ = 342.8495^\circ$$

Les valeurs des coefficients "c.t.p." sont :

$$\begin{cases} \alpha = 40^\circ 29' \\ \gamma = 111.55^\circ \\ m = 0.9301 \\ n = 0.2385 \\ h = 0.2794 \end{cases}$$

et donc :

$$(5.12) \quad \tan i = \frac{h \sin \varphi_0 - n \tan \delta}{mn \sin \varphi_0 + (1 - m^2) \cos \varphi_0 + m \tan \delta} = 0.5644 \quad \text{et} \quad \boxed{i = 29.44^\circ}$$

5.4 Calcul de la co-déclinaison d'une droite ou d'un plan (2e méthode)

On choisi dans le trièdre (3) (pour autant que les angles valent : $i = \gamma = 90^\circ$ et les coefficients "c.t.p." : $a = 0$, $b = -\sin \alpha = -f_0$, $m = 1$, $n = 0$, $h = 0$, $j = \cos \alpha = -c_0$), l'angle horaire φ_0 et le style, tous deux similaires aux cas déjà étudié. En un instant t_0 , le "vecteur horaire" coïncidant avec une droite auxiliaire QH , fig. (5.5) correspondant au "vecteur horaire" d'un cadran horizontal, forme avec la direction est-ouest l'angle μ_0 . Cet angle est donné par :

$$(5.13) \quad \tan \mu_0 = \frac{-b \sin \varphi_0 + a \cos \varphi_0 + j \tan \delta}{n \sin \varphi_0 - m \cos \varphi_0 + h \tan \delta} = -\frac{f_0 \sin \varphi_0 - c_0 \tan \delta}{\cos \varphi_0}$$

Cette formule est identique à (5.4) en changeant γ par μ_0 , et en faisant coïncider les deux angles sur le plan de base Z_3 , avec l'angle horaire correspondant égal à (5.3) et distinct de t_0 . De là on en déduit :

1. La direction nord ou ligne méridienne, se détermine à partir de la droite QH en additionnant l'angle $-(\mu_0 + 90^\circ)$
2. La co-déclinaison γ d'une droite quelconque RH ou bien la trace d'un plan qui forme l'angle ν avec la droite QH , a pour l'expression : $\gamma = \mu_0 + \nu + 90^\circ$. Fig. (5.5)

5.5 Calcul de la co-déclinaison d'un plan vertical

Si le plan de base est vertical, on vérifie que $i = 0$ et dans ce cas on choisi le trièdre (A). Comme la co-déclinaison d'un mur vertical n'est pas vraiment uniforme par construction, on se doit de réaliser les mesures sur une planche qui sera plus tard remplacé par le cadran solaire. Pour vérifier cette méthode, et à des dates donnés, on prend le même style que précédemment, qui est le côté qu'une équerre, dans des conditions similaires aux cas précédents, trace sur l'axe $Y_a H$, à l'instant t_0 , l'angle φ_0 correspondant ; Fig. (5.6).

L'angle μ_0 de l'heure est donné par :

$$(5.14) \quad \tan \mu_0 = \frac{-b \sin \varphi_0 + a \cos \varphi_0 + j \tan \delta}{n \sin \varphi_0 - m \cos \varphi_0 + h \tan \delta} = \frac{c_0 \sin \varphi_0 + f_0 \tan \delta}{-f_0 \cos \gamma \sin \varphi_0 - \sin \gamma \cos \varphi_0 + c_0 \cos \gamma \tan \delta}$$

Résolvant l'équation en $\sin \gamma$ et en $\cos \gamma$, on obtient :

$$(5.15) \quad A_1 \sin i + B_1 \cos i + C_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \cos i = \frac{-B_1 C_1 + A_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2 - C_1^2}}{A_1^2 + B_1^2}$$

avec
$$\begin{cases} A_1 = \tan \mu_0 \cos \varphi_0 \\ B_1 = \tan \mu_0 (f_0 \sin \varphi_0 - c_0 \tan \delta) \\ C_1 = c_0 \sin \varphi_0 + f_0 \tan \delta \end{cases}$$

Discussion

1. Si $\mu_0 = 0^\circ$, $C_1 = 0$ et par conséquent $\sin \varphi_0 = \tan \alpha \tan \delta$. Cette formule s'étudiera un peu plus loin (Heure de lever et de coucher)
2. Si $\mu_0 = 90^\circ$, $\tan \gamma = -\frac{A}{B} = -\frac{f_0 \sin \varphi_0 - c_0 \tan \delta}{\cos \varphi_0}$

5.6 Calcul de l'inclinaison d'un plan

Connaissant la co-déclinaison " γ " à partir de l'une des méthodes précédentes, l'inclinaison se déduit en choisissant dans l'équation (5.16) le paramètre i suivant le même procédé appliqué précédemment pour les mêmes données. Fig. (5.7). L'angle μ_0 est donné par :

$$(5.16) \quad \tan \mu_0 = \frac{-b \sin \varphi_0 + a \cos \varphi_0 + j \tan \delta}{n \sin \varphi_0 - m \cos \varphi_0 + h \tan \delta}$$

Afin de simplifier les calculs on développe les "c.t.p." en fonction de $\sin i$, $\cos i$, f_0 et c_0 , on obtient alors :

$$(5.17) \quad A_2 \sin i + B_2 \cos i + C_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \cos i = \frac{-B_2 C_2 + A_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - C_2^2}}{A_2^2 + B_2^2}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} A_2 = f_0 \sin \gamma \sin \varphi_0 - \cos \gamma \cos \varphi_0 - c_0 \sin \gamma \tan \delta \\ B_2 = c_0 \sin \varphi_0 + f_0 \tan \delta \\ C_2 = (f_0 \cos \gamma \sin \varphi_0 + \sin \gamma \cos \varphi_0 - c_0 \cos \gamma \tan \delta) \tan \mu_0 \end{cases}$$

Discussion

1. Si $\mu_0 = 0^\circ$, $\tan i = -\frac{B_2}{A_2}$ qui est la même relation que (5.12) en divisant le numérateur et le dénominateur par $\cos \gamma$.
Avec $i = 0^\circ$, $\sin \varphi_0 = \tan \alpha \tan \delta$.
Et si $i = 90^\circ$ on trouve la formule de la déclinaison de la normale à la droite QH , inverse de la relation (5.4) :

$$(5.18) \quad \tan \gamma = \frac{\cos \varphi_0}{f_0 \sin \varphi_0 - c_0 \tan \delta}$$

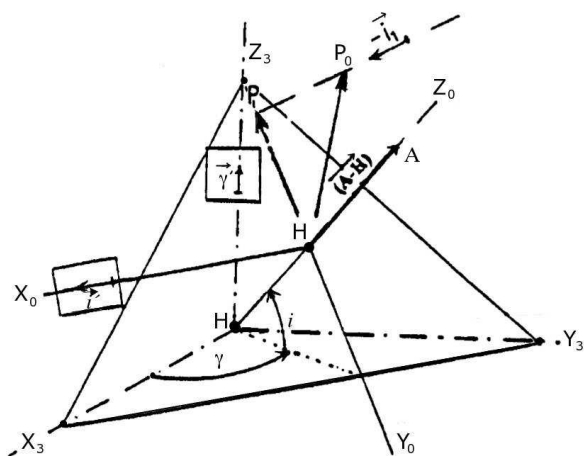
2. Si $\mu_0 = 90^\circ$ et $i = 90^\circ$, alors le plan de base est horizontal et $C_2 = 0$: on trouve la formule (5.4)
Avec $i = 0^\circ$ on trouve la relation étudiée en §5.5.

Note

- Temps solaire moyen : $t_M = \text{Temps solaire Vrai} + EqT = t_h + EqT$
- Temps Universel : $t_u = t_g + \frac{\lambda_h}{15} = t_h \left(\frac{\lambda_h}{15}\right)$, fuseau horaire en heures entières)
- Temps Légal : $t_0 = t_u + N$ (N valant 1 en hiver et 2 en été)
- Temps solaire Vrai au point géographique H , en fonction de l'heure de Greenwich t_g :

$$t_h = t_g + \frac{\varphi_{hg}}{15} - EqT - \frac{\lambda_h}{15} = t_0 + \frac{\varphi_{hg}}{15} - \frac{EqT}{4} - \frac{\lambda_h}{15} - N$$

5.7 Figures



Le point H a été dédoublé afin de faciliter la compréhension de la figure

FIG. 5.1 -

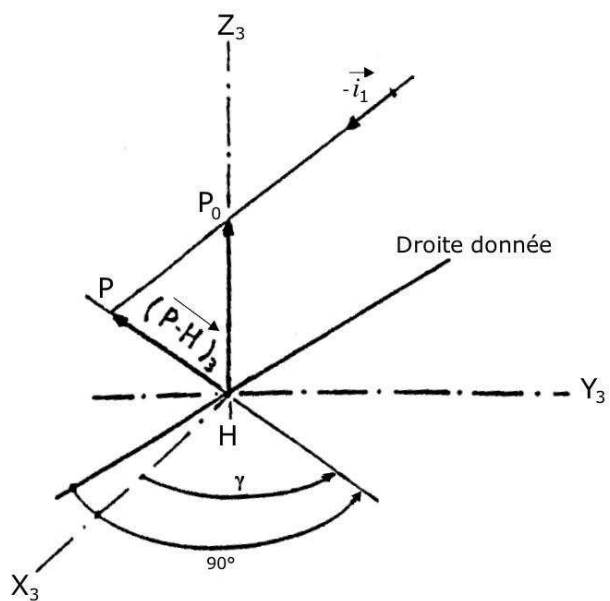
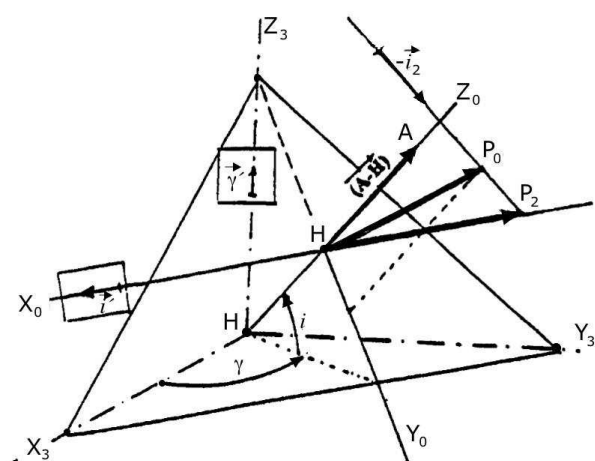
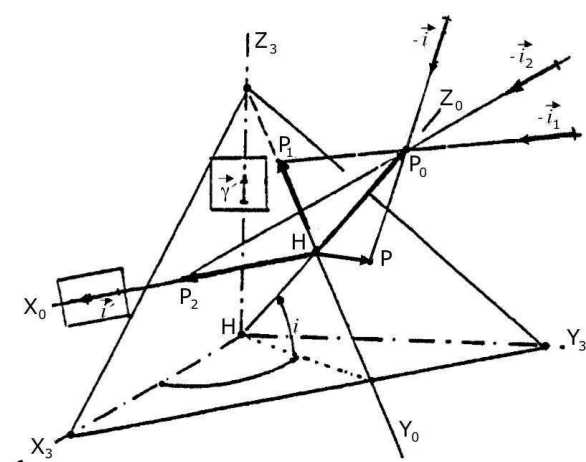


FIG. 5.2 -



Le point H a été dédoublé afin de faciliter la compréhension de la figure

FIG. 5.3 -



Le point H a été dédoublé afin de faciliter la compréhension de la figure

FIG. 5.4 –

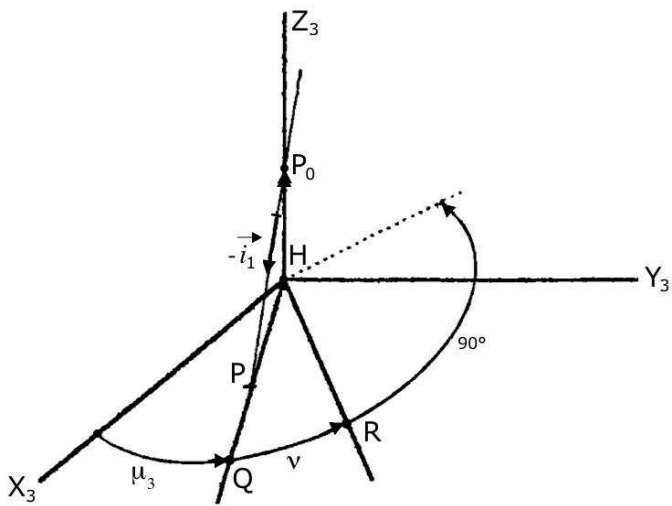


FIG. 5.5 -

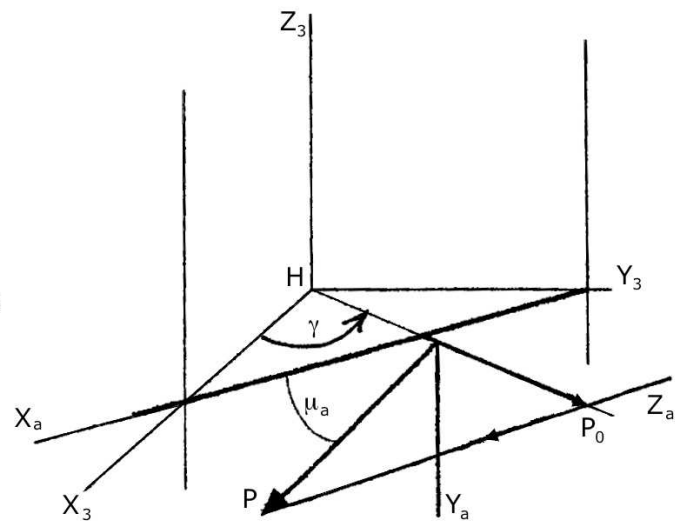


FIG. 5.6 -

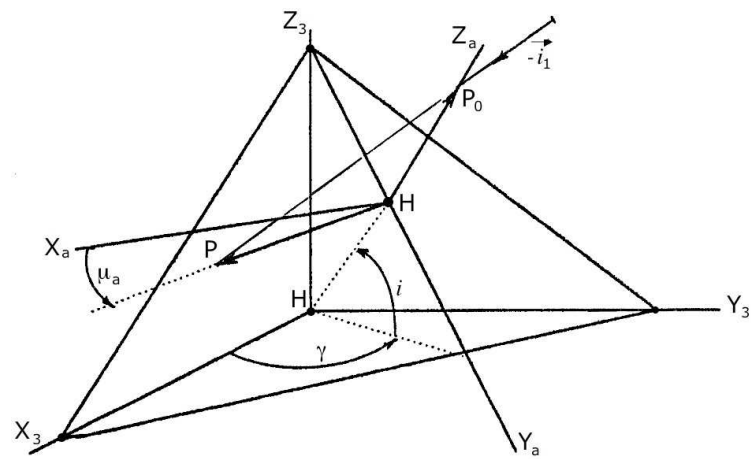


FIG. 5.7 -

Chapitre 6

Cadran solaire bifilaire

Ce cadran solaire se définit par l'intersection d'un "rayon solaire" $-\vec{i}_1$ s'appuyant sur des droites perpendiculaires entre elles appelées $Q \begin{cases} y_b = 0 \\ z_b = N_0 \end{cases}$ et $R \begin{cases} x_b = 0 \\ z_b = M_0 \end{cases}$ et coupant le plan de Base (B) au point P extrémité du "vecteur horaire"; cette équation se calcule de la manière suivante. Le vecteur de base du rayon solaire est donné par :

$$(6.1) \quad -r\vec{i}_1 = \vec{i}_b r U_b + \vec{j}_b r V_b + \vec{k}_b r W_b$$

En s'appuyant sur la droite R , le vecteur "rayon solaire" doit respecter les deux conditions suivantes :

1. Si pour $r = r_1$, la base du rayon solaire a pour composante k_b égal à M_0 , alors on doit vérifier :

$$(6.2) \quad -\vec{i}_b r_1 \cdot \vec{k}_b = -M_0 = r_1 W_b$$

à partir de laquelle on déduit la valeur de r_1 :

$$(6.3) \quad r_1 = \frac{M_0}{-W_b}$$

avec $\varphi = \varphi_1$ selon (6.4)

2. Si la composante X_b du dit rayon est nulle, alors :

$$(6.4) \quad V_b = 0; \text{ avec } \varphi = \varphi_1$$

Réciproquement, s'il s'appuie sur la droite Q :

Pour la valeur $r = r_2$

$$(6.5) \quad r_2 = \frac{M_0}{-W_b}$$

et

$$(6.6) \quad U_b = 0; \text{ avec } \varphi = \varphi_2$$

Par conséquent, la base du rayon solaire est définie par l'équation vectorielle :

$$(6.7) \quad -\vec{i}_1 r = \vec{i}_b \frac{M_0 U_b}{-W_b} + \vec{j}_b \frac{N_0 V_b}{-W_b}$$

et son intersection avec le plan de base $Z_b = 0$ définit le vecteur horaire du cadran bifilaire.

$$(6.8) \quad (\overrightarrow{PH})_b = \vec{i}_b \frac{M_0 U_b}{-W_b} + \vec{j}_b \frac{N_0 V_b}{-W_b}$$

En développant cette équation (chapitre II) on obtient finalement le vecteur horaire dans le trièdre (B) :

$$(6.9) \quad \boxed{(\overrightarrow{PH})_b = \vec{i}_b M_0 \frac{A_b \sin \varphi + B_b \cos \varphi + H_b \tan \delta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \tan \delta} + \vec{j}_b N_0 \frac{M_b \sin \varphi + N_b \cos \varphi + J_b \tan \delta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \tan \delta}}$$

et pour laquelle les coefficients du "vecteur horaire" sont respectivement dans les trièdres (B) et (A) :

$$(6.10) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trièdre (B)} \\ A_b = (-b \sin \phi + n \cos \phi) \\ B_b = (a \sin \phi - m \cos \phi) \\ M_b = (-n \sin \phi - b \cos \phi) \\ N_b = (m \sin \phi + a \cos \phi) \\ H_b = (j \sin \phi + h \cos \phi) \\ J_b = (-h \sin \phi + j \cos \phi) \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trièdre (A)} \\ A_a = n \\ B_a = -m \\ M_a = -b \\ N_a = a \\ H_a = h \\ J_a = j \end{array} \right|$$

qui coïncident avec ceux du cadran à style normal au plan de base en multipliant chacune de ses composantes par le scalaire qui définit la hauteur de chaque fil. Si $M_0 = N_0 = 1$, on est dans le cas du cadran à style normal au plan de base. Comme conséquence, le développement du "vecteur horaire" est influencé par les scalaires M_0 et N_0 tel comme cela sera étudié dans ce qui suit.

6.1 Coniques d'arc-diurnes

Dans ce cas, la valeur des inconnues X et Y dans les formules algébriques, s'expriment par : $\frac{X}{M_0}$ et $\frac{Y}{N_0}$, qui, développées, sont multipliées par :

$$(6.11) \quad \begin{array}{lll} \text{Le coefficient de } X^2 : \dots\dots N_0^2 & \text{Le coefficient de } XY : \dots\dots M_0 N_0 & \text{Le coefficient de } Y^2 : \dots\dots M_0^2 \\ \text{Le coefficient de } X : \dots\dots N_0^2 M_0 & \text{Le coefficient de } Y : \dots\dots M_0^2 N_0 & \text{terme constant : } \dots\dots M_0^2 N_0^2 \end{array}$$

Par exemple dans le trièdre (A), l'équation donnée en (4.19) devient pour le cadran biflaire :

$$(6.12) \quad N_0^2 (h^2 - \sin^2 \delta) x^2 + M_0^2 (j^2 - \sin^2 \delta) y^2 + 2N_0 M_0 h f x y + 2N_0^2 M_0 h f x + 2N_0 M_0^2 j f y + M_0^2 N_0^2 (f^2 - \sin^2 \delta) = 0$$

6.2 Lignes horaires

Suivant la même méthode précédente, la ligne horaire est celle de (4.32) en multipliant les coefficients des variables X et Y par les facteurs suivants :

$$(6.13) \quad \text{Le coefficient de } X : \dots\dots N_0^2 \quad \text{Le coefficient de } Y : \dots\dots M_0 \quad \text{Le coefficient indépendant : } \dots\dots N_0 M_0$$

ou finalement la ligne horaire du cadran biflaire s'exprime dans les trièdres (B) et (A) respectivement par :

$$(6.14) \quad y_b = \frac{N_0 (f R_b - J_b T)}{M_0 (f S_b - H_b T)} x_b + \frac{c_0}{f S_b - H_b T} N_0$$

$$(6.15) \quad y_a = \frac{N_0 (m \tan \varphi + n)}{M_0 (a \tan \varphi + b)} x_a + \frac{-d \tan \varphi + c}{a \tan \varphi + b} N_0$$

en rappelant que les coefficients de ces équations donnés dans les séries de formules (4.33) du chapitre IV, sont :

$$(6.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_b = M_b \sin \varphi + N_b \cos \varphi \\ S_b = A_b \sin \varphi + B_b \cos \varphi \\ T = c \sin \varphi + d \cos \varphi \\ C_b = (A_b J_b - M_b H_b) \sin \varphi + (B_b J_b - N_b H_b) \cos \varphi = -d \sin \varphi + c \cos \varphi \\ R_a = -b \sin \varphi + a \cos \varphi \\ S_a = n \sin \varphi - m \cos \varphi \\ C_a = -d \sin \varphi + c \cos \varphi \end{array} \right.$$

Discussion dans les trièdres (B) et (A)

1. Si $H_b = J_b = 0$ où $h = j = c = d$; d'après (2.8) et $f = 1$. C'est le cas du cadran solaire équatorial.

$$(6.17) \quad \text{Dans le trièdre (B) : } y_b = \frac{N_0 R_b}{M_0 S_b} x_b$$

$$(6.18) \quad \text{Dans le trièdre (A) : } y_a = \frac{N_0 (-b \tan \varphi + a)}{M_0 (n \tan \varphi - m)} x_a$$

2. Si $f = 0$, le cadran est polaire :

$$(6.19) \quad \text{Dans le trièdre (B) : } y_b = \frac{N_0 J_b}{M_0 H_b} x_b - N_0 \frac{C_b}{H_b T} = \frac{N_0}{M_0} \cdot \frac{1}{\tan(\phi + \phi_H)} x_b - \frac{N_0}{H_b} \cdot \frac{1}{\tan(\phi + \phi_H)}$$

$$(6.20) \quad \text{Dans le trièdre (A) : } y_a = \frac{N_0 j}{M_0 H} x_a - \frac{N_0}{h \tan(\phi + \phi_H)}$$

$$\text{avec } \tan \varphi_H = \frac{d}{c} \text{ et } \tan \phi_H = \frac{h}{j}.$$

3. Si $H_b = f = 0$, il en résulte $\tan \phi = -\frac{h}{j}$ d'après (4.8) le cadran solaire est polaire dans le trièdre (B₀).

Si $h = f = 0$, le cadran solaire est polaire avec des lignes horaires parallèles à l'axe $Y_a H$ dans le trièdre (A).

$$(6.21) \quad x_b = M_0 \frac{C_b}{T} = \frac{M_0}{\tan(\varphi + \varphi_H)}$$

$$(6.22) \quad x_a = \frac{M_0}{\tan(\varphi + \varphi_H)}$$

$$\text{avec } \tan \varphi_H = \frac{d}{c}.$$

4. Le point de concours H_0 des lignes horaires se détermine en résolvant les équations obtenues en égalant à zéro les coefficients de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ dans la relation (6.14), c'est-à-dire :

$$(6.23) \quad x_0 = M_0 \frac{j \sin \phi + h \cos \phi}{f} \quad \text{et} \quad y_0 = N_0 \frac{-h \sin \phi + j \cos \phi}{f}$$

Et dans le trièdre (B₀) :

$$(6.24) \quad x_0 = 0 \quad \text{et} \quad y_0 = -N_0 \frac{\sqrt{1-f^2}}{f}$$

(Les heures Babyloniques, Italiques et Sidérales dans ce type de cadran solaire, s'étudieront dans le chapitre X).

6.3 Figures

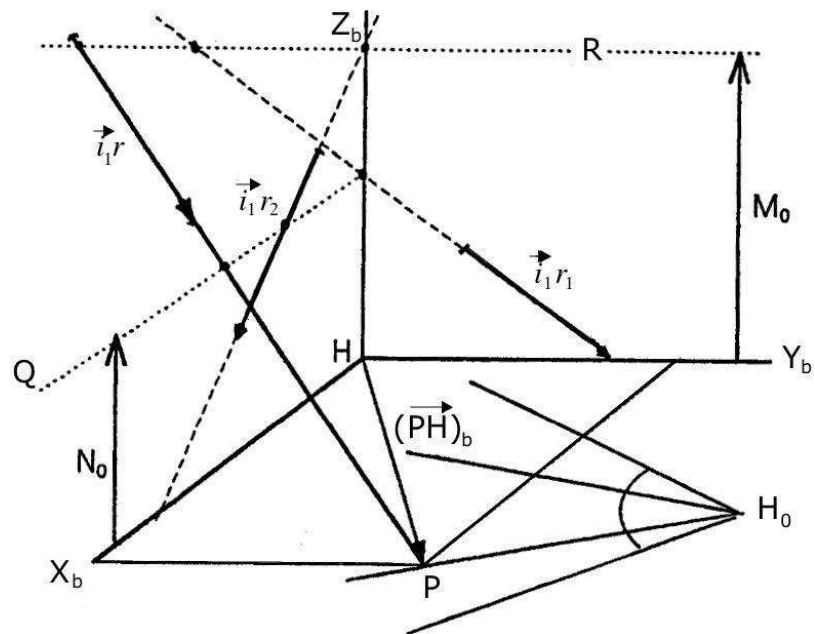


FIG. 6.1 – Cadran bifilaire

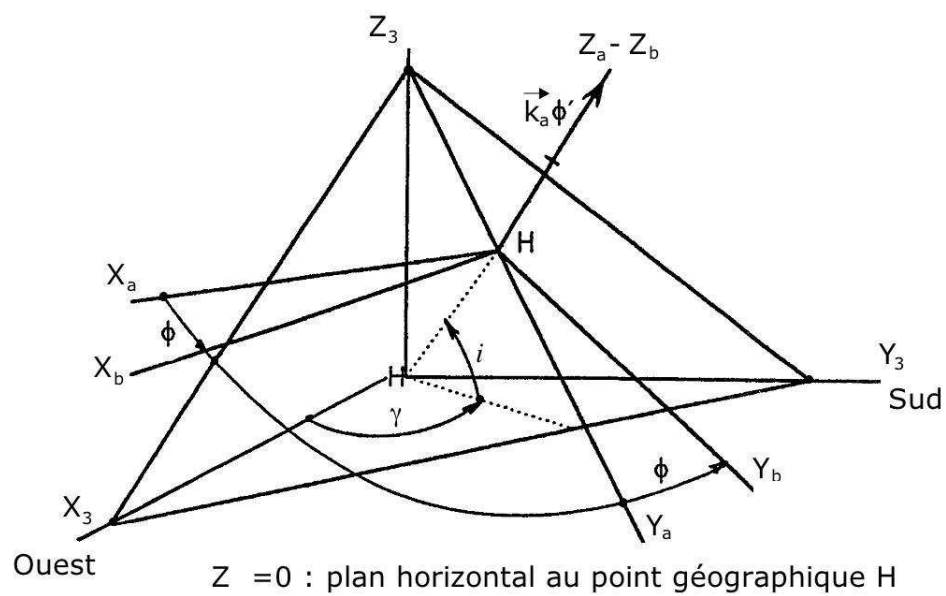


FIG. 6.2 –

Chapitre 7

Hauteur et azimut du soleil

En prenant comme base le trièdre (3), on définit respectivement la hauteur du soleil θ comme l'angle entre le plan horizontal et le rayon solaire, et l'azimut β comme la mesure sur le plan horizontal de l'angle compté depuis l'axe HY_3 (direction sud) vers la composante horizontale du rayon solaire.

Le Rayon Solaire dans ce trièdre et en fonction des neufs variables est :

$$(7.1) \quad -\vec{i}_1 = \vec{i}_3 U_3 + \vec{j}_3 V_3 + \vec{k}_3 W_3$$

dont les coefficients, d'après ce qui se déduit de la figure (7.1), sont donnés par (7.2), et les φ et δ sont donnés par 7.3, fig. (7.2).

$$(7.2) \quad \begin{cases} U_3 = \cos \theta \sin \beta \\ V_3 = \cos \theta \cos \beta \\ W_3 = -\sin \theta \end{cases}$$

$$(7.3) \quad \begin{cases} U_2 = -\cos \delta \sin \varphi = U_3 & \text{avec } \alpha = 90^\circ \\ V_2 = \cos \delta \sin \varphi = V_3 & \text{avec } \alpha = 90^\circ \\ W_2 = -\sin \delta = W_3 \end{cases}$$

En comparant ces groupes de coefficients, on arrive à la conclusion suivante : ceux-ci définissent le "rayon solaire" avec des variables distinctes, et où θ joue le rôle¹ de δ et où $\beta + 90^\circ$ joue le rôle de φ , et cela se vérifie si le trièdre (3) est confondu avec le trièdre (2), c'est-à-dire si $\alpha = 90^\circ$; fig. (7.2) et (7.3).

Dans le trièdre (A), le rayon solaire $-\vec{i}_1$ passant par le sommet P_0 d'un style tombe sur le plan de base ($Z_a = 0$) en un point P et génère le "vecteur de hauteur-azimut" $(\overrightarrow{PH})_a$ qui est semblable au "vecteur horaire" et dont le calcul a été fait au chapitre IV. Celui-ci diffère du précédent en ce qu'il :

1. définit le même point P du "vecteur horaire" avec des variables distinctes
2. que dans les coefficients "c.t.p." on utilise $\alpha = 90^\circ$ (par conséquent le "c.t.p." $h = 0$)
3. soit indépendant de la date
4. que la "hauteur du soleil" θ s'exprime sur une échelle linéaire graduée, et contrairement à δ , varie durant le jour entre $0^\circ < \theta < 90^\circ - \alpha + 23^\circ 27'$ selon la latitude du point géographique H , base du cadran, avec un maximum de 90°

Par conséquent, dans ce chapitre se répète ce qui a déjà été cité au chapitre IV, avec les conditions déjà précisées.

Par conséquent, et en évitant de réitérer les calculs, le "vecteur de hauteur-azimut" a pour équation :

$$(7.4) \quad \boxed{(\overrightarrow{PH})_a = \vec{i}_a \frac{A_a \sin \varphi + B_a \cos \varphi + H_a \tan \theta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \tan \theta} + \vec{j}_a \frac{M_a \sin \varphi + N_a \cos \varphi + J_a \tan \theta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \tan \theta}}$$

et suivant le style, les valeurs de ses coefficients sont donnés dans le chapitre IV (relation (4.8)), avec les mêmes propriétés que le "vecteur horaire" déjà étudié.

¹Dans la relation vectorielle fondamentale (4.7)

7.1 Courbes de hauteur

Comme pour les lignes diurnes, on forme les courbes de hauteur, lieu géométrique du point P , en faisant varier β , et par conséquent, pour un style quelconque, l'équation algébrique en fonction de θ , des coefficients "c.t.p." et des variables x et y , est (comme (4.16)) :

$$(7.5) \quad \begin{aligned} & (mx_a - ay_a - mP_{xa} + aP_{ya} - dP_{za})^2 \tan^2 \theta \\ & + (nx_a - by_a - nP_{xa} + bP_{ya} + cP_{za})^2 \tan^2 \theta \\ & = (jy_a - jP_{ya} + fP_{za})^2 \end{aligned}$$

Le type de conique est déterminé par la formule (comme (4.18)) :

$$(7.6) \quad \cos^2 \theta \begin{cases} \leq f^2 & \text{Ellipse} \\ = f^2 & \text{Parabole} \\ > f^2 & \text{Hyperbole} \end{cases}$$

1. Ligne de hauteur pour un style normal au plan de base ($P_{xa} = P_{ya} = 0$; $P_{za} = 1$) (comme pour (4.20)).

$$(7.7) \quad \sin^2 \theta x_a^2 - (j^2 - \sin^2 \theta) y_a^2 - 2jf y_a - f^2 + \sin^2 \theta = 0$$

2. Ligne de hauteur pour un style parallèle à l'axe Terrestre T . (\vec{k}_2) (comme pour (4.19))

$$(7.8) \quad \sin^2 \theta x_a^2 - (j^2 - \sin^2 \theta) y_a^2 - 2j \cos^2 \theta y_a - f^2 - \cos^2 \theta = 0$$

Si le style est $-\vec{k}_2$ et le "c.t.p." $f < 0$, il faut changer le signe du "c.t.p." j selon la relation (4.13bis)

Discussion

1. Si $f = 1$ alors $h = 0$ et il s'ensuit que $j = 0 = \cos i$; $i = 90^\circ$ et le cadran est horizontal.

$$(7.9) \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{\tan^2 \theta}$$

La parallèle à l'axe de la Terre sera la normale au plan horizontal au point géographique H , en conséquence de l'artifice qui consiste à poser $\alpha = 90^\circ$.

2. Si $f = 0$, alors $j = 1 = \cos i$ et $\alpha = 0^\circ$: cadrans verticaux et dans ce cas polaires. Le style choisi est perpendiculaire au plan de base, comme dans le chapitre IV. Exemple dans le trièdre (B_0) :

$$(7.10) \quad \tan^2 \theta x_b^2 - y_b^2 + \tan^2 \theta = 0$$

et vu que $\cos^2 \theta > 0$ les courbes de hauteur sont hyperboliques.

7.2 Courbes d'azimut

Comme pour les lignes horaires, prenons l'expression suivante en éliminant θ dans le "vecteur hauteur-azimut" (comme la relation (4.32)).

$$(7.11) \quad y_a = \frac{fR_a - J_a T}{fS_a - H_a T} x_a + \frac{C_a}{fS_a - H_a T}$$

et les coefficients ont pour expression :

$$(7.12) \quad \begin{cases} R_a = -N_a \sin \beta + M_a \cos \beta \\ S_a = -B_a \sin \beta + A_a \cos \beta \\ T = -d \sin \beta + c \cos \beta \\ C_a = -(B_a J_a - N_a H_a) \sin \beta + (A_a J_a - M_a H_a) \cos \beta \end{cases}$$

- Si le style est parallèle à l'axe de la Terre et $f > 0$, comme en (4.13) ou (4.13bis) alors $A_a = a$ etc... et $C_a = 0$.
- Si le style est parallèle à l'axe de la Terre et $f < 0$, comme en (4.13) ou (4.13bis) alors $A_a = -a$ etc... et $C_a = 0$.

– Si le style est perpendiculaire au plan, comme en (4.14), alors $A_a = n$ etc... et $C_a = -c \sin \beta - d \cos \beta$. Les courbes d'azimut avec un style perpendiculaire au plan, comme dans l'équation (4.34) on a :

$$(7.13) \quad (n \tan \beta - m) x_a - (b \tan \beta - a) y_a + c \tan \beta + d = 0$$

et les coordonnées de leur pôle² H_0 :

$$(7.14) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{h}{f} = 0 \\ y_0 = \frac{j}{f} = \frac{\sqrt{1-f^2}}{f} = \frac{1}{\tan i} \end{cases}$$

Discussion

1. Si $f = 1$, alors $H_a = J_a = 0$, et le style est parallèle à l'axe de la Terre. Et le point d'intersection H_0 du réseau de courbe est le point H .
Comme dans (7.1), $j = 0 = \cos i$; $i = 90^\circ$ et le cadran est horizontal.

$$(7.15) \quad y_a = \frac{R_a}{S_a} = -\tan(\beta + \gamma) x_a$$

2. Si $f = 0$, alors on est dans le cas des cadrans solaire polaires et verticaux avec un style perpendiculaire au plan de base, comme dans la relation (4.36).

$$(7.16) \quad x_a = \frac{C_a}{J_a} T = \frac{1}{\tan(\beta + \gamma)}$$

3. Si $H_a = J_a = 0$, alors le style est parallèle à l'axe de la Terre, et le pôle du faisceau des lignes d'azimut et le point H . On trouve (comme dans la relation (4.38)) :

$$(7.17) \quad y_a = \frac{R_a}{S_a} x = -\frac{\tan(\beta + \gamma) x_a}{\sin i}$$

Si $i = 90^\circ$ (comme en (7.15)), alors le cadran est horizontal.

On omet, excepté les cas comme ceux de l'exemple précédent, d'exprimer les formules gnomoniques en fonction des variables i et γ .

7.3 Conclusion

Grâce à l'artifice qui consiste à prendre $\alpha = 90^\circ$, sans tenir compte de la latitude réelle du point géographique H où se trouve le plan de base, et en le situant au pôle, autant la hauteur du soleil que son azimut avec $\gamma = C^{\text{te}}$, sont fonction de l'inclinaison i et de la co-déclinaison γ . Par conséquent, par exemple, le style parallèle à l'axe de la Terre passe pour être perpendiculaire au plan horizontal en un quelconque point géographique H .

²C'est le point d'intersection des courbes d'azimut

7.4 Figures

Afin de mieux comprendre les figures, on suppose que le pôle H_0 des courbes d'azimut coïncide avec l'origine H des trièdres.

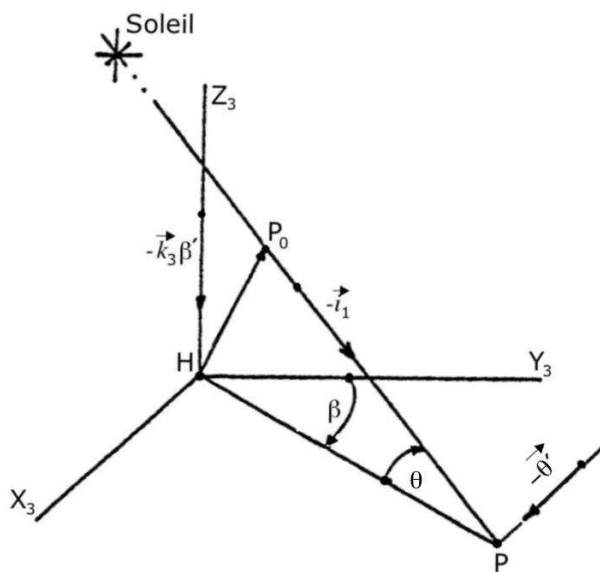


FIG. 7.1 –

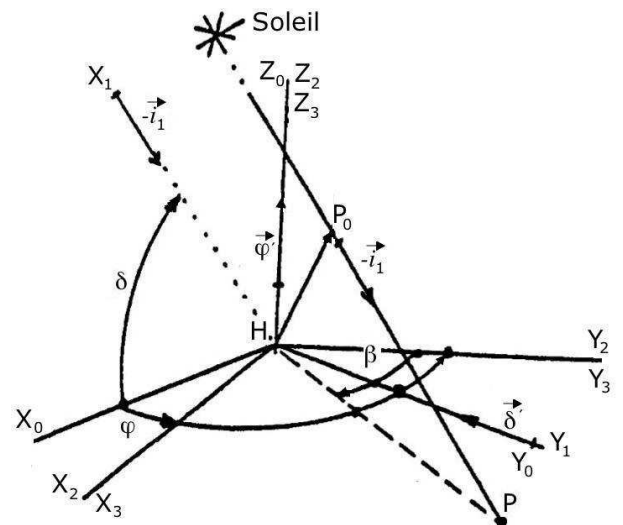


FIG. 7.2 –

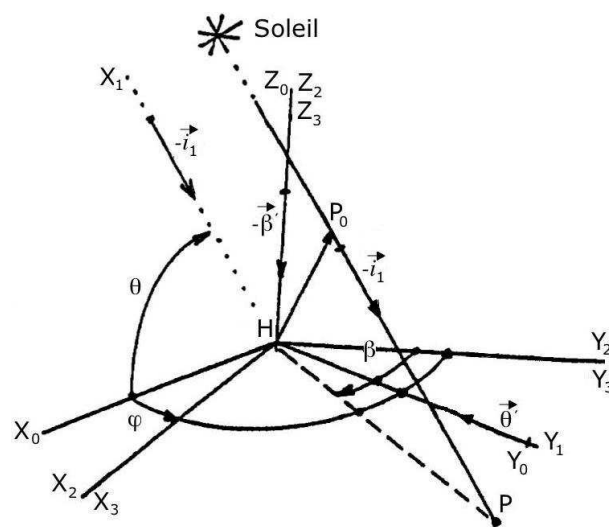


FIG. 7.3 –

Chapitre 8

Éclairement d'un cadran

8.1 Durée d'éclairement d'un cadran solaire

Dans ce qui suit, on calcule le temps d'éclairement d'un plan donné. De ce qui a été dit dans les chapitres précédents, on a le vecteur "Rayon Solaire" $(\vec{SH})_a = -\vec{i}_2$, le vecteur du plan (A) $\vec{k}_a = (\vec{AH})_a$ et ω l'angle entre ces deux vecteurs. Pour obtenir l'éclairement d plan, on doit respecter les deux conditions suivantes dans le développement du "vecteur horaire"; fig. (8.1) :

1. que le soleil rencontre le plan horizontal, au point géographique H , c'est-à-dire que la composante \vec{k}_3 du vecteur $(\vec{SH})_a$ soit négative (éclairement de l'horizon)

$$(8.1) \quad W_3 < 0$$

(i et γ ont pour valeur $i = \gamma = 90^\circ$ dans les coefficients "c.t.p.") où selon (8.1) $\sin \varphi < \tan \alpha_0 \tan \delta$ qui est la même formule que (4.42) du chapitre IV. Le lever et le coucher du soleil sur ce plan correspond aux angles donnés par :

$$(8.2) \quad \sin \varphi_{h\alpha\omega} = \tan \alpha_h \tan \delta$$

2. Que le soleil éclaire le plan (A) $_H$ et comme précédemment, que la composante \vec{k}_a du vecteur $(\vec{SH})_a$ soit négative, pour laquelle :

$$(8.3) \quad W_a = (\vec{SH})_a \wedge \vec{k}_a = \cos \omega = -(c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \tan \delta) \cos \delta < 0$$

$$(8.4) \quad \text{d'où : } \omega > 90^\circ$$

Par conséquent, le lever et le coucher sur le plan, se produit pour $\omega = 90^\circ$ avec les solutions φ_α et φ_ω

$$(8.5) \quad (c \sin \varphi_{h\alpha\omega} + d \cos \varphi_{h\alpha\omega} + f \tan \delta) = 0$$

que l'on développe pour extraire la tangente, ce qui donne :

$$(8.6) \quad \tan \varphi_{\alpha\omega} = \frac{-cd \pm f \tan \delta \sqrt{1 - \frac{f^2}{\cos^2 \delta}}}{c^2 - f^2 \tan^2 \delta}$$

En appliquant les conditions d'éclairement en un point géographique H , de latitude α_h , on vérifie que :

1. Si le lever dans le plan horizontal est antérieur à celui du plan (A) $_H$, l'éclairement s'effectue entre le lever de (A) $_H$ et le coucher dans le plan horizontal
2. Si le lever dans le plan (A) $_H$ est antérieur à celui de du plan horizontal, l'éclairement s'effectue entre le lever dans le plan horizontal et le coucher dans le plan (A) $_H$

Indépendamment des conditions déjà cités, la durée d'éclairement t_i sera la même dans des plans parallèles (voir chapitre XI) fig. (8.2), et dans le cas particulier du plan horizontal (A) $_k$ en un point géographique K , elle sera exprimée par :

$$(8.7) \quad t_i = t_{k\omega} - t_{k\alpha} = \frac{\varphi_{k\omega} - \varphi_{k\alpha}}{15} \quad \text{en heures}$$

NOTE. Partant de (8.2), $\sin \alpha_{h\alpha\omega} = \tan \alpha_h \tan \delta$. Pour le lever et le coucher dans le trièdre (3) on vérifie que les valeurs de l'angle horaire sont :

1. Si $\sin \varphi > 0$, alors φ_α (Lever) $> \varphi_\omega$ (coucher). Fig. (8.3)
2. Si $\sin \varphi < 0$, alors φ_α (Lever) $< \varphi_\omega$ (coucher). Fig. (8.4)

8.2 Temps mis par le disque solaire pour franchir un plan déterminé

Le soleil n'est pas un élément ponctuel, c'est pourquoi, dans son mouvement apparent, le disque solaire met un temps t_0 pour traverser un plan quelconque (A) et où son centre (C) parcourt une distance dans la direction normale au plan, égale à son diamètre, quelque soit sa trajectoire. Ce temps peut être exprimé par $t_0 = t_1 - t_2$ dans lesquels t_1 et t_2 sont respectivement les positions correspondantes (1) et (2) où le disque solaire est tangent au plan (A).

Le calcul de t_1 et t_2 s'effectue de la façon suivante.

1. Le plan (A) est donné dans le trièdre (A) par son équation $Z_a = 0$
2. Le temps t_0 recherché est le même dans des plans parallèles ; afin de faciliter le calcul on prend un plan horizontal $(A)_k$ passant par le point géographique K et pour lequel : $f_h = f_k = \sin \alpha_k$ et $c_k = -\cos \alpha_k$ et dans ce cas :

$$W_a = -c_k \sin \varphi \cos \delta - t_h \sin \delta = \cos \alpha_k \sin \varphi \cos \delta - \sin \alpha_k \sin \delta$$

3. La distance moyenne Terre-Soleil est de $d_0 = 149.5 \times 10^6$ km ; le diamètre du soleil est $D = 1.4 \times 10^6$ km.
4. En position (1). C'est l'instant où le centre du soleil (C) se trouve à la distance $D/2$ du plan (A) ; voir fig. (8.5), d'ou :

$$(8.8) \quad W_{a1} = \frac{D}{2d_0}$$

5. En position (2). En faisant le même raisonnement on obtient :

$$(8.9) \quad W_{a2} = -\frac{D}{2d_0}$$

6. En développant les formules précédentes on trouve :

$$(8.10) \quad \sin \varphi_1 = \left[\frac{D}{2d_0 \cos \delta} + f_h \tan \delta \right] \frac{1}{\sqrt{1 - f_h^2}} = \frac{D}{2d_0 \cos \delta \cos \alpha_k} + \tan \alpha_k \tan \delta$$

$$(8.11) \quad \sin \varphi_2 = \left[\frac{-D}{2d_0 \cos \delta} + f_h \tan \delta \right] \frac{1}{\sqrt{1 - f_h^2}} = \frac{-D}{2d_0 \cos \delta \cos \alpha_k} + \tan \alpha_k \tan \delta$$

En utilisant ces équations en φ_1 et en φ_2 , le temps recherché sera égal à :

$$(8.12) \quad \boxed{t_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{15}}$$

8.3 Temps de passage de l'ombre du disque solaire en un point P du "vecteur horaire" pour un cadran solaire donné

8.3.1 Calcul de t_0

1. Soit (A) le plan en H dans lequel se trouve le point P défini par le "vecteur horaire" à l'instant t_0 de l'angle horaire φ_h ; on choisit, pour simplifier, un style perpendiculaire au plan (A).
2. Comme précédemment, dans le plan $(A)_k$, parallèle au plan (A) et horizontal au point géographique K , le temps t_0 recherché est le même ainsi que le vecteur horaire mais avec différents coefficients "c.t.p." et pour lequel l'angle horaire est :

$$(8.13) \quad \varphi_k = 15 t_h + \lambda_k + 90^\circ - \frac{EqT}{4} - 15 N$$

si t_0 est l'heure légale et $\lambda_h = 0$

3. Dans le plan $(A)_k$ se trouve l'angle μ_k entre le vecteur horaire et l'axe $X_a K$ (fig. (8.6))

$$(8.14) \quad \tan \mu_k = -\frac{f_0 \sin \varphi_k - c_0 \tan \delta}{\cos \varphi_k}$$

avec $f_0 = \sin \alpha_k = f_h$ et $c_0 = -\cos \alpha_k$

4. Le vecteur du plan (A_1) formé par le style normal et son "vecteur horaire" a pour expression :

$$(8.15) \quad (\overrightarrow{A_1 K})_a = -\vec{i}_a \sin \mu_k + \vec{j}_a \cos \mu_k$$

voir fig. (8.6), et qui prend dans le trièdre (2), d'après les formules (2.7), l'expression : valeur :

$$(8.16) \quad (\overrightarrow{A_1 K})_2 = -\vec{i}_2 \sin \mu_k + \vec{j}_2 f_0 \cos \mu_k + \vec{k}_2 c_0 \cos \mu_k$$

5. Le plan que doit traverser le disque solaire est le plan (A_2) parallèle au précédent et horizontal au point K_3 , cas qui a été étudié précédemment avec la valeur $f_2 = c_0 \cos \mu$ et par conséquent, en appliquant les formules étudiées (8.10) et (8.11) on trouve :

$$(8.17) \quad \sin \varphi_1 = \frac{D}{2d_0 \cos \delta} + c_0 \cos \mu_k \tan \delta \frac{1}{\sqrt{1 - c_0^2 \cos^2 \mu_k}}$$

$$(8.18) \quad \sin \varphi_2 = \frac{-D}{2d_0 \cos \delta} + c_0 \cos \mu_k \tan \delta \frac{1}{\sqrt{1 - c_0^2 \cos^2 \mu_k}}$$

alors le temps recherché est :

$$(8.19) \quad t_0 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{15} \quad \text{temps en heures}$$

8.3.2 Discussion

1. Si $f_h = f_k = 1$, $\alpha_k = 90^\circ$ et $c_0 = \cos \alpha_k = 0$, alors le plan (A) est parallèle au plan équatorial et les formules précédentes deviennent :

$$(8.20) \quad \sin \varphi_1 = \frac{D}{2d_0 \cos \delta} = C^{\text{te}}$$

La durée t_0 est constante pour n'importe quel point P et est fonction de δ

$$(8.21) \quad \sin \varphi_2 = \frac{-D}{2d_0 \cos \delta} = C^{\text{te}}$$

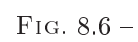
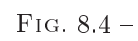
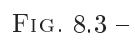
2. Supposons que $f_h = f_k = 0$, $\alpha_k = 0^\circ$ et $c_0 = 1$, alors on est dans le cas d'un cadran solaire polaire. Si de plus, $\mu_k = 0$, alors les valeurs des formules des sinus ne seront plus valables. Motif : le plan (A_3) sera parallèle à l'équateur et le disque solaire, qui se déplace sur la sphère céleste sur un parallèle, ne le coupera pas.

8.4 Exemples de calcul

1. Temps mis par le soleil pour traverser des plans parallèles en diverses latitudes pour différentes valeurs de la déclinaison du soleil :

α	$\delta = 23.44^\circ$	$\delta = 0^\circ$
00.00°	2 ^m 19 ^s	2 ^m 08 ^s
40.40°	3 ^m 16 ^s	2 ^m 48 ^s
62.00°	8 ^m 34 ^s	4 ^m 32 ^s
66.00°	26 ^m 14 ^s	5 ^m 14 ^s

2. Calcul du temps que met l'ombre d'un disque solaire pour couper le point P d'un cadran solaire situé au point géographique H (42°) pour une inclinaison et une co-déclinaison respectivement égales à $i = \gamma = 80^\circ$, le 1^{er} septembre à 12^h légales.



Chapitre 9

Lignes horaires

9.1 Relations entre les trièdres (1) et (A)

L'intersection de plans parallèles aux plans $Y_1 = 0$ et $X_1 = 0$ du trièdre (1) avec ceux du trièdre (A) génère dans celui-ci les plans C et D qui donnent lieu aux cas gnomoniques suivant :

1. l'ensemble des plans C passant par un style parallèle à l'axe de la Terre coupe une surface quelconque $S_a(X, Y, Z) = 0$ en des points P qui définissent les lignes horaires dans des plans, des cylindres, des cônes, des sphères, etc...
2. l'ensemble des plans D , tangent à un cône droit d'axe parallèle à l'axe de la Terre et ayant son sommet à l'extrémité d'un style, coupe une surface quelconque $S_a(X, Y, Z) = 0$ en des points P qui définissent les lignes horaires Babyloniques ou Italiques ; et si un plan D est de plus parallèle à l'écliptique, les lignes seront des lignes horaires Sidérales.

9.2 Lignes horaires (fig. (9.1) et(9.3))

1. Par projection successive de la variable Y_1 sur les trièdre (2), (3) et (A), on trouve dans le trièdre (A) l'expression des plans C en fonction de l'angle horaire φ et des coefficients "c.t.p."

$$(9.1) \quad (m \sin \varphi + n \cos \varphi) X_a - (a \sin \varphi + b \cos \varphi) Y_a + (d \sin \varphi - c \cos \varphi) Z_a = 0$$

2. La surface à étudier S_a en coordonnées paramétriques, aura son équation correspondante en fonction d'une ou plusieurs variables. On les étudie dans les cas suivants

9.2.1 Lignes horaires sur un plan

L'équation du plan de base est

$$(9.2) \quad Z_a = 0$$

Et l'intersection avec les plans C est :

$$(9.3) \quad Y_p = \frac{m \tan \varphi + n}{a \tan \varphi + b} X_p$$

Le réseau de lignes horaires sur un plan coïncide avec la relation (4.35)

9.2.2 Lignes horaires sur un cylindre

La base du cylindre se trouve sur le plan $Z_a = 0$ et son équation est :

$$(9.4) \quad \begin{cases} X_a = F_1(\omega) \\ Y_a = F_2(\omega) \\ Z_a = Z_p \end{cases}$$

dans lesquels ω est une fonction quelconque. La côte Z_p , intersection avec le plan C , est exprimée par :

$$(9.5) \quad Z_p = \frac{(m \sin \varphi + n \cos \varphi) F_1(\omega) - (a \sin \varphi + b \cos \varphi) F_2(\omega)}{-(d \sin \varphi - c \cos \varphi)}$$

et où la valeur de Z_p dans $f(\varphi, \omega)$ défini avec la relation (9.4) les points P

9.2.3 Lignes horaires sur un cône

Un cône est défini par sa hauteur L et son sommet V et par l'équation paramétrique de sa base sur le plan $Z_a = 0$:

$$(9.6) \quad \begin{array}{l} \text{Sommet : } V(0, 0, L) \\ \text{Base } \begin{cases} X_a = F_1(\omega) \\ Y_a = F_2(\omega) \end{cases} \end{array}$$

L'équation d'un point $P(X_p, Y_p)$ sur une génératrice :

$$\frac{X_p}{-X_a} = \frac{Y_p}{-Y_a} = \frac{Z_p - L}{L}$$

ce qui donne en coordonnées paramétriques :

$$(9.7) \quad \begin{cases} X_p = -F_1(\omega) \frac{Z_p - L}{L} \\ Y_p = -F_2(\omega) \frac{Z_p - L}{L} \end{cases}$$

Son intersection avec le plan C (en éliminant la variable Z_p)

$$(9.8) \quad Z_p = L \frac{(m \sin \varphi + n \cos \varphi) F_1(\omega) - (a \sin \varphi + b \cos \varphi) F_2(\omega)}{(m \sin \varphi + n \cos \varphi) F_1(\omega) - (a \sin \varphi + b \cos \varphi) F_2(\omega) - L (d \sin \varphi - c \cos \varphi)}$$

qui avec les formules (9.6) défini chacun des points P dans $f(\varphi, \omega)$.

Afin de faciliter la construction géométrique, soit Z_q la distance depuis le point P à la base du cône. On a :

$$(9.9) \quad Z_q = \frac{Z_p}{\cos \mu} = \frac{Z_p}{\sqrt{1 + \tan^2 \mu}} = \frac{L Z_p}{\sqrt{F_1^2(\omega) + F_2^2(\omega) + L^2}}$$

Pour simplifier la construction du cadran solaire, la projection du point P sur le plan $Z_a = 0$, se trouve sur la droite dont la pente est donnée par :

$$(9.10) \quad \tan \Omega = \frac{F_2(\omega)}{F_1(\omega)}$$

9.2.4 Lignes horaires sur une sphère (fig. (9.5))

L'équation paramétrique de la sphère est la suivante :

$$(9.11) \quad \begin{cases} X_a = R \sin \psi \cos \omega \\ Y_a = R \sin \psi \sin \omega \\ Z_a = R \cos \psi \end{cases}$$

L'intersection avec les plans C est donnée par l'équation :

$$(9.12) \quad \frac{(m \tan \varphi + n) \cos \omega - (a \tan \varphi + b) \sin \omega + d \tan \varphi - c}{\tan \psi} = 0$$

équation qui relie les trois variables définissant le point P dans la fonction $f(\varphi, \omega, \psi) = 0$; la solution pour les angles :

- A chaque valeur de $\psi = \text{Cte}$, pour chaque valeur de ω , correspond une valeur de φ (Parallèles)
- A chaque valeur de $\omega = \text{Cte}$, pour chaque valeur de ψ , correspond une valeur de φ (Méridiens)

Le style On se base sur le fait que le style est parallèle à l'axe de la Terre et que dans le trièdre (A) (selon le chapitre III) celui-ci est donné par les formules :

$$(9.13) \quad (\overrightarrow{PH})_a = -\vec{i}_a h - \vec{j}_a j + \vec{k}_a f \quad ; \text{ si } f > 0$$

$$(9.14) \quad (\overrightarrow{PH})_a = \vec{i}_a h + \vec{j}_a j - \vec{k}_a f \quad ; \text{ si } f < 0$$

où les angles sont donnés par :

$$(9.15) \quad \tan \varphi_a = -\frac{h}{J}$$

$$(9.16) \quad \sin \psi = f$$

9.2.5 Exemples

1. Cylindre parabolique avec la base dans le plan horizontal ($\gamma = i = 90^\circ$: trièdre (3))

La base se trouve sur le plan $Z_3 = 0$ et son équation dans le trièdre (3) est :

$$(9.17) \quad \begin{cases} X_3 = 2p \tan^2 \omega \\ Y_3 = 2p \tan \omega \\ Z_3 = 0 \end{cases}$$

La côte Z_p , intersection des plans C , est donnée par :

$$(9.18) \quad Z_p = \frac{-2p}{\cos \alpha} (\tan^2 \omega \tan \varphi + \tan \omega \sin \alpha)$$

étant donné dans ce cas : $a = 0$, $b = -\sin \alpha$, $m = 1$, $n = 0$, $d = 0$, $c = -\cos \alpha$.

Les lignes horaires sont données par (9.17) et (9.18)

2. Cône avec une base elliptique dans le plan horizontal ($\gamma = i = 90^\circ$: trièdre (3))

La base se trouve dans le plan $Z_3 = 0$ et son équation dans le trièdre (3) est :

$$(9.19) \quad \begin{cases} X_3 = \sin \omega \\ Y_3 = 2 \cos \omega \\ Z_3 = 0 \\ \text{et } L = 9 \end{cases}$$

La côte Z_p , intersection des plans C , est donnée par :

$$(9.20) \quad Z_p = 9 \frac{\sin \omega \tan \varphi + 2 \sin \alpha \cos \omega}{\sin \omega \tan \varphi + 2 \sin \alpha \cos \omega - 9 \cos \alpha}$$

La valeur de Z_q du point P à la base du cône étant :

$$(9.21) \quad Z_q = \frac{81 (\sin \omega \tan \varphi + 2 \sin \alpha \cos \omega)}{\sqrt{3 \cos^2 \omega + 82 (\sin \omega \tan \varphi + 2 \sin \alpha \cos \omega - 9 \cos \alpha)}}$$

Les lignes horaires se trouveront en utilisant (9.19) et (9.21).

3. La sphère. Elle s'étudie sur le plan vertical non déclinant $i = 0^\circ$ et $\gamma = 90^\circ$.

De l'équation de la sphère figurant en (9.11) et de l'intersection avec les plans C , il en résulte :

$$(9.22) \quad \tan \psi (\cos \omega \tan \varphi - \cos \alpha \sin \omega) = -\sin \alpha$$

et dans un tel cas : $a = 0$, $b = \cos \alpha$, $m = 1$, $n = 0$, $d = 0$, $c = -\sin \alpha$.

9.3 Figures

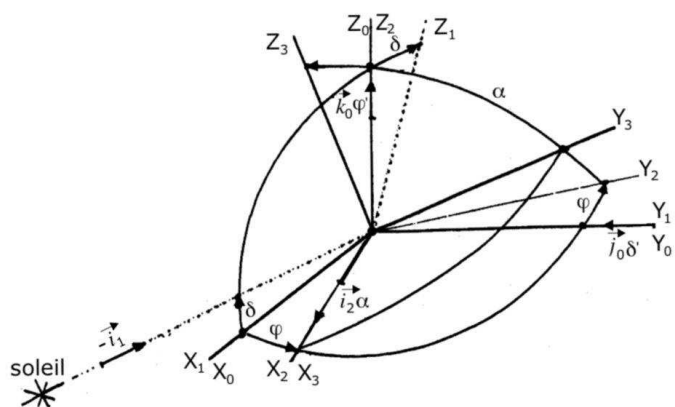


FIG. 9.1 - Trièdres (0), (1), (2) et (3)

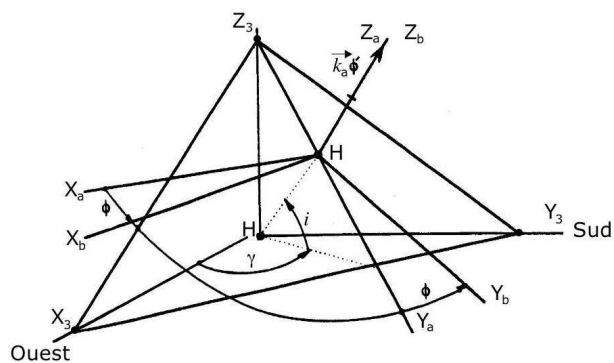


FIG. 9.2 - Z_3 : Plan horizontal au point géographique H

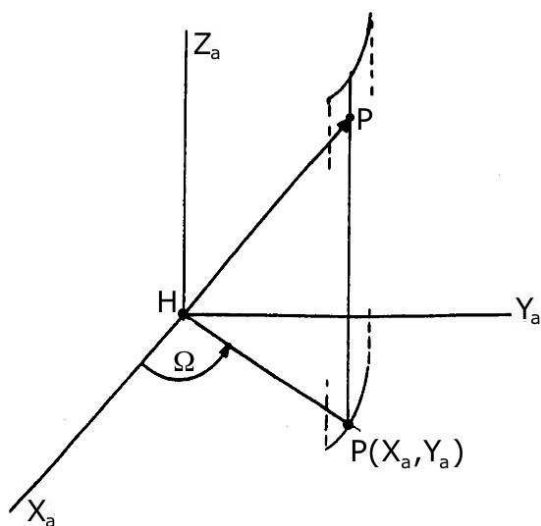


FIG. 9.3 -

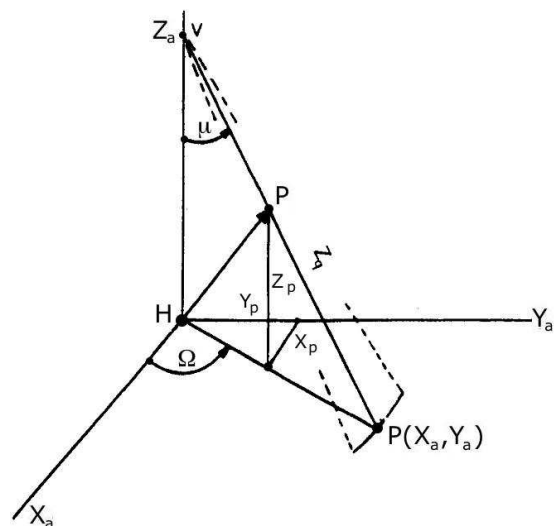


FIG. 9.4 -

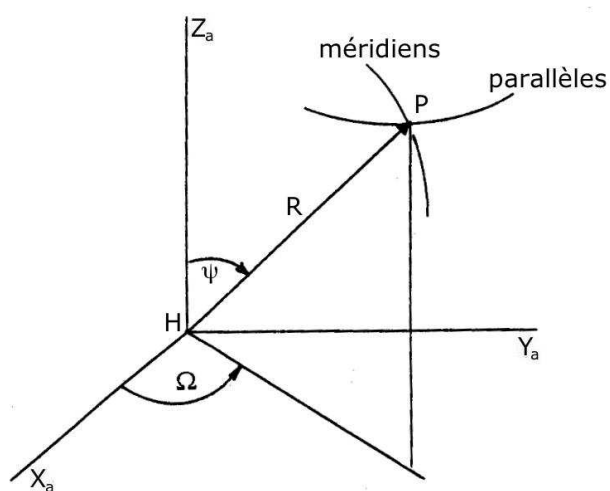


FIG. 9.5 -

Chapitre 10

Lignes horaires Babyloniques, Italiques et Sidérales

En substituant, dans le trièdre (1), le vecteur "déclinaison du soleil" $-\vec{j}_0\delta'$ par celui de la latitude géographique du point K (de vecteur $-\vec{j}_0\alpha'_k$), on crée le plan $X_1 = 0$; maintenant le plan D_1 coupe la sphère Terrestre selon des grands cercles, représenté par le trièdre (2) au moyen des plans D_2 et qui ont les caractéristiques suivantes :

1. Ce sont des cercles horaires car ils sont situés dans le trièdre (2)
2. Ils s'appuient sur des parallèles de latitude $(90^\circ - \alpha_k)$
3. Ils sont parallèles au plan de l'horizon des points géographiques K , (α_k, λ_k) compris entre les latitudes $90^\circ - \epsilon > \alpha_k > -(90^\circ + \epsilon)$
4. Son enveloppe est un cône droit dont l'axe est celui de la Terre, avec le sommet en son centre et de demi-angle au sommet α_k
5. Les plans D ($X_1 + Cte = 0$) du trièdre (1), parallèles aux plans précédents et translatés dans le trièdre (A) passent par le sommet d'un style donné et avec des angles horaires distincts, coupent une surface quelconque $S_a(X, Y, Z) = 0$ selon des lignes horaires Babyloniques, Italiques, Sidérales ou Equinoxiales
6. L'étude de ces lignes correspondant au point K , s'effectue pour le point H , de latitude α_H en fonction des coefficients "c.t.p." et de la latitude α_k
7. Si $\alpha_k = \alpha_H$, les lignes se réfèrent au plan passant par H
8. Si $\alpha_k = 90^\circ - \epsilon$, on crée les lignes Sidérales, avec leur propre angle horaire
9. Si $\alpha_k = 0$, le cône, enveloppe des plans D_2 , devient une droite parallèle à l'axe de la Terre. Par conséquent, on génère un faisceau qui coupe un plan quelconque, selon des lignes équinoxiales, avec d'autres angles horaires, en faisant coïncider, par définition, le plan D_1 avec le plan $X_0 = 0$, c'est-à-dire, que les plans D_2 sont perpendiculaires à l'équateur et ceux-ci coupent la sphère Terrestre selon les méridiens. Ce cas est le même que celui du faisceau de plan C (chapitre IX), générés par le plan $Y_1 = 0$ et qui diffère des nouveaux angles horaires qui seront étudié par la suite.

10.1 Angles horaires (fig. (10.3))

Les nouveaux angles horaires se définissent, comme l'équinoxiale φ dans le trièdre (0), et ses origines définies dans le trièdre (3) par la formule (8.2) $\sin \varphi = \tan \alpha_k \tan \delta$, sont dans le trièdre (0) avec $\alpha_k = 0$, (8.2), $\sin \varphi = 0$. De l'origine des deux résulte : l'angle horaire babylonique φ_b sur l'axe $-Y_0H$ et l'angle horaire φ_i (ou son inverse l'angle horaire φ_0) sur l'axe Y_0H . En acceptant le fait que les heures babyloniennes et italiques ont la même durée que les

équinoxiales, les relations qui existent entre les deux sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
(10.1a) \quad & \varphi_i = \varphi - 90^\circ \\
(10.1b) \quad & \varphi_0 = 360^\circ - \varphi_i \\
(10.1c) \quad & \varphi_b = \varphi + 90^\circ \\
(10.1d) \quad & \varphi_b = \varphi_i + 180^\circ \\
(10.1e) \quad & \varphi_i = 15 t_i \\
(10.1f) \quad & \varphi_b = 15 t_b \\
(10.1g) \quad & \varphi = 15 t + 90^\circ
\end{aligned}$$

On en déduit qu'étant donné que ces nouveaux angles sont fonction de l'équinoxiale :

1. Les sinus et cosinus des lignes babyloniennes et italiques ont le même coefficient et ont des signes distincts
2. Les sinus des équations des italiques ont le même coefficient et avec des signes distincts, et les cosinus ont le même coefficient.

10.2 Equation des plans D

Les équations du plan D_1 dans le trièdre (1) : $X_1 = 0$, se trouvent dans le trièdre (A) : $X_1 = U_a x + V_a y + W_a Z = 0$, grâce aux formules (2.4) et (2.5) du chapitre II. Ce plan génère les plans D à partir des gnomons et Angles horaires correspondant à chaque ligne à étudier. Les équations sont les suivantes :

$$(10.2) \quad (x - P_{0x}) U_a + (y - P_{0y}) V_a + (z - P_{0z}) W_a = 0$$

ou bien la formule générale :

$$(10.3) \quad U_a x + V_a y + W_a z + Q_a = 0$$

$$(10.4) \quad \text{avec : } Q_a = -(U_a P_{0x} + V_a P_{0y} + W_a P_{0z})$$

D'où :

1. Si le style est parallèle à l'axe de la Terre ($f > 0$) :

$$\begin{aligned}
(10.5) \quad & \vec{k}_2 = -\vec{i}_a h - \vec{j}_a j + \vec{k}_a f \\
& Q_a = \sin \alpha_k
\end{aligned}$$

2. Si le style est parallèle à l'axe de la Terre ($f < 0$) :

$$\begin{aligned}
(10.6) \quad & -\vec{k}_2 = -\vec{i}_a h + \vec{j}_a j - \vec{k}_a f \\
& Q_a = -\sin \alpha_k
\end{aligned}$$

(On se rappelle que dans ce cas, en accord avec ce qui précède, on doit changer le signe des "c.t.p." a, b, m, n, h, j d'après (4.13bis) (excepté dans les coefficients du gnomon); mais changer de la même façon la valeur de Q , les formules résultantes seront égales dans les deux cas. Les valeurs de Q se calculent en tenant compte des formules (2.8) et (2.9) du chapitre II)

3. Si le style est perpendiculaire au plan de base, \vec{k}_a , on a :

$$(10.7) \quad Q_a = -W_a$$

(Valable seulement dans le cas du style linéaire sur le plan $Z_a = 0$)

10.3 Lignes horaires babyloniennes et Italiques sur un plan

Son intersection avec la surface $S_a(X, Y, Z) = 0$, actuellement $Z_a = 0$, génère les équations des lignes Babyloniennes et Italiques sur ce plan, base du cadran.

$$(10.8) \quad U_a x + V_a y + Q_a = 0$$

Avec Q_a et φ correspondant à chaque ligne, c'est-à-dire :

10.3.1 Heures babyloniennes (avec l'angle horaire φ_b)

Le style est parallèle à l'axe de la Terre avec le vecteur \vec{k}_2 et $Q_a = \sin \alpha_k$, alors l'équation des lignes horaires babyloniennes est :

$$(10.9) \quad (-m \sin \varphi_b - n \cos \varphi_b + h \tan \alpha_k) x + (a \sin \varphi_b + b \cos \varphi_b + j \tan \alpha_k) y + \tan \alpha_k = 0$$

Le style est normal au plan de base et a pour vecteur \vec{k}_a et $Q_a = -c \sin \varphi \cos \alpha_k - d \cos \varphi_b \cos \alpha_k - f \sin \alpha_k$, alors l'équation des lignes horaires babyloniennes est :

$$(10.10) \quad (-m \sin \varphi_b - n \cos \varphi_b + h \tan \alpha_k) x + (a \sin \varphi_b + b \cos \varphi_b + j \tan \alpha_k) y + d \sin \varphi_b - c \cos \varphi_b + f \tan \alpha_k = 0$$

10.3.2 Heures italiques (avec l'angle horaire φ_i)

Le style est parallèle à l'axe de la Terre de vecteur \vec{k}_2 et $Q_a = \sin \alpha_k$, alors l'équation des lignes horaires italiques est :

$$(10.11) \quad (m \sin \varphi_i + n \cos \varphi_i + h \tan \alpha_k) x + (-a \sin \varphi_i - b \cos \varphi_i + j \tan \alpha_k) y + \tan \alpha_k = 0$$

Le style est parallèle à l'axe de la Terre avec le vecteur \vec{k}_2 (avec l'angle horaire φ_0), alors l'équation des lignes horaires italiques est :

$$(10.12) \quad (-m \sin \varphi_0 + n \cos \varphi_0 + h \tan \alpha_k) x + (a \sin \varphi_0 - b \cos \varphi_0 + j \tan \alpha_k) y + \tan \alpha_k = 0$$

10.3.3 Enveloppes des lignes babyloniennes et italiques sur un plan

Elles se déterminent en éliminant la variable φ dans les équations de ces lignes et de sa dérivé :

$$(10.13) \quad (x - P_{0x}) U_a + (y - P_{0y}) V_a + (z - P_{0z}) W_a = 0$$

$$(10.14) \quad \text{et} \quad (x - P_{0x}) U'_a + (y - P_{0y}) V'_a + (z - P_{0z}) W'_a = 0$$

dont le résultat dans le trièdre (A), est :

$$(10.15) \quad (mx - ay - mP_{xa} + aP_{ya} - dP_{za})^2 + (nx - by - nP_{xa} + bP_{ya} + cP_{za})^2 - \tan^2 \alpha_k (hx + jy - hP_{xa} - jP_{ya} + fP_{za})^2 = 0$$

équation semblable à l'équation (4.16) du chapitre IV en remplaçant δ par $(90^\circ - \alpha_k)$.

Enveloppe dans le trièdre (A) avec un style perpendiculaire au plan de base (vecteur \vec{k}_a).

$$(10.16) \quad (h^2 - \cos^2 \alpha_k) x^2 + (j^2 - \cos^2 \alpha_k) y^2 + 2hjsx + 2hfx + 2jfy + f^2 - \cos^2 \alpha_k = 0$$

Type de conique de l'enveloppe

$$(10.17) \quad \sin^2 \alpha_k \begin{cases} \geq f^2 & \text{Ellipse} \\ & \text{Parabole} \\ < f^2 & \text{Hyperbole} \end{cases}$$

10.4 Lignes horaires babyloniennes et Italiques sur un cylindre (10.4)

Dans un tel cas, la fonction $S_a = 0$ est celle d'un cylindre dont la base se trouve dans le plan $Z_a = 0$ et a pour équation caractéristique :

$$(10.18) \quad \begin{cases} X_a = F_1(\omega) \\ Y_a = F_2(\omega) \\ Z_a = Z_p \end{cases}$$

et dans laquelle ω est une fonction quelconque. La côte Z_p qui défini le point P , intersection avec le plan D est donné par :

$$(10.19) \quad U_a X_p + V_a Y_p + W_a Z_p + Q_a = 0$$

qui avec les équations (10.18) on exprime les lignes babyloniennes et italiques en fonction de Q_a et φ :

$$(10.20) \quad Z_p = \frac{F_1(\omega) U_a + F_2(\omega) V_a + Q_a}{W_a}$$

10.5 Lignes horaires babyloniennes et Italiques sur un cône (10.5)

Le cône se défini par la hauteur L du sommet V et par l'équation paramétrique de sa base dans le plan $Z_a = 0$, c'est-à-dire :

$$(10.21) \quad \begin{array}{l} \text{Sommet } V(0, 0, L) \\ \text{Données du cône : Base } \begin{cases} X_a = F_1(\omega) \\ Y_a = F_2(\omega) \end{cases} \end{array}$$

L'équation du point $P(X_p, Y_p)$ sur une génératrice :

$$\frac{X_p}{-X_a} = \frac{Y_p}{-Y_a} = \frac{Z_p - L}{L}$$

il en résulte sous forme paramétrique :

$$(10.22) \quad \begin{cases} X_p = -F_1(\omega) \frac{Z_p - L}{L} \\ Y_p = -F_2(\omega) \frac{Z_p - L}{L} \end{cases}$$

Son intersection avec les plans D en utilisant les expressions (10.19) et (10.22), prend la forme avec Q_a et φ correspondants :

$$(10.23) \quad Z_p = L \frac{F_1(\omega) U_a + F_2(\omega) V_a + Q_a}{F_1(\omega) U_a + F_2(\omega) V_a - W_a L}$$

Afin de faciliter la construction géométrique, comme dans le chapitre précédent, soit Z_q la distance depuis le point P à la base du cône, on a :

$$(10.24) \quad Z_q = \frac{Z_p}{\cos \mu} = \frac{Z_p}{\sqrt{1 + \tan^2 \mu}} = \frac{L Z_p}{\sqrt{F_1^2(\omega) + F_2^2(\omega) + L^2}}$$

10.6 Lignes horaires Sidérales

On défini le jour sidéral par le temps écoulé entre deux passages consécutifs du point Vernal au méridien du point géographique K . Comme il est impossible de matérialiser le point Vernal, on peut prendre une étoile fixe comme référence, ou bien prendre en compte que le plan horizontal D_1 au point K en un instant donné, tourne sur lui-même après une rotation de la terre de 360° . Si ce plan est parallèle au plan de l'écliptique, dont la position du soleil n'est pas importante, et si le point K se trouve sur le parallèle terrestre $\alpha_k = 90^\circ - \epsilon$, alors le faisceau des plans D génère les lignes sidérales. Le procédé est le même que celle des babyloniennes et italiques avec l'angle horaire φ_s calculé dans ce qui suit et qui indique, avec la condition imposé par la latitude, la différence avec ces dernières.

10.6.1 Angle horaire sidéral (10.3)

Dans le trièdre (0), le plan $Z_0 = 0$ est la base des angles gnomoniques ; on peut choisir l'origine de n'importe quelle ligne horaire selon les circonstances, tel est le cas des lignes babyloniennes ou italiques, en partant des axes qui définissent les points de lever et de coucher. Et bien maintenant, pour des raisons astronomiques et par souci de

simplicité, on choisit comme origine de l'heure sidérale zéro, celle définie par l'intersection du plan méridien du point K , qui passe par le point vernal, avec le plan $Z_0 = 0$. C'est-à-dire qu'elle se trouve sur l'axe X_0H , qui est de plus l'origine des heures équinoxiales. Ainsi ce plan donne lieu, d'après la formule 10.26e, à la ligne babylonique de 18^h de ce point. Par conséquent, les relations entre les différents angles horaires sont donnés par :

$$\begin{aligned} (10.25a) \quad & \varphi_i = \varphi - 90^\circ \\ (10.25b) \quad & \varphi_b = \varphi + 90^\circ \\ (10.25c) \quad & \varphi = 15 t_e + 90^\circ \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (10.26a) \quad & \varphi_s = \varphi_i + 90^\circ \\ (10.26b) \quad & \varphi_s = \varphi_b + 270^\circ \\ (10.26c) \quad & \varphi_s = 15 t_s \\ (10.26d) \quad & \boxed{t_s = t_i + 6^h} \\ (10.26e) \quad & \boxed{t_s = t_b + 18^h} \end{aligned}$$

Les lignes horaires sidérales correspondent aux lignes horaires babyloniennes augmentées de 18^h et réciproquement correspondent aux heures italiques augmentées de 6^h . En résumé les lignes horaires sidérales sont des babyloniennes ou italiques rapportées à un point du cercle polaire avec un angle horaire distinct ; par conséquent, tout ce qui a été indiqué précédemment peut s'appliquer dans ce cas comme règle (ou principe).

10.6.2 Heures Sidérales

Style parallèle à l'axe de la Terre : $-\vec{k}_2$ ($\epsilon = 23^\circ 27'$).

$$(10.27) \quad \begin{aligned} & U_a x_p + V_a y_p + Q_a = 0 \\ \text{avec} \quad & \begin{cases} \varphi_s = 15 t_s \\ Q_a = -\sin(90^\circ - \epsilon) \end{cases} \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$(10.28) \quad \left(n \sin \varphi_s - m \cos \varphi_s + \frac{h}{\tan \epsilon} \right) x + \left(-b \sin \varphi_s + a \cos \varphi_s + \frac{j}{\tan \epsilon} \right) y + \frac{1}{\tan \epsilon} = 0$$

Par conséquent, les coefficients "c.t.p." correspondant aux sinus et cosinus des angles horaires des babyloniennes et italiques, ont des signes distincts, et celui des lignes horaires sidérales égal à ceux du rayon solaire, exceptés les coefficients c , d , f .

10.7 Relations entre les diverses heures

10.7.1 Relations entre les heures équinoxiales et les heures Babyloniennes – Trièdre (A)

Pour simplifier, l'étude se fait dans le plan horizontal d'un point géographique H avec un style parallèle à l'axe de la Terre \vec{k}_2 . Donc les "c.t.p." ont pour valeur : $a = n = h = d = 0$, $b = -\sin \alpha_H$, $m = 1$, $c = \cos \alpha_H$, $f = \sin \alpha_H$.

$$(10.29) \quad y_e = x_e \frac{\tan \varphi_e}{\sin \alpha_H} \quad \text{— Ligne équinoxiale (Chapitre IV)}$$

$$(10.30) \quad -\sin \varphi_b x_b + \sin \alpha_H (-\cos \varphi_b + 1) y_b + \tan \alpha_H = 0 \quad \text{— Ligne Babylonique}$$

L'abscisse x_0 de son intersection doit être égal à celle du vecteur horaire, c'est-à-dire celle sur l'arc diurne de déclinaison δ .

$$(10.31) \quad x_0 = \sin \varphi_e + \frac{\cos \varphi_e \tan \alpha_H}{\sin(\varphi_e - \varphi_b)} = -\frac{\sin \alpha_H \cos \varphi_e}{-\cos \alpha_H \sin \varphi_e + f \tan \delta}$$

En résolvant l'égalité précédente et les valeurs des angles φ_e et φ_b en fonction des temps correspondant, on trouve :

$$(10.32) \quad \cos(15(t_e - t_b)) = \tan \alpha_H \tan \delta$$

1. La différence des angles horaires ou des temps est constante pour chaque déclinaison du soleil
2. Ces lignes se coupent sur la conique définie pour la déclinaison δ donnée en (10.32)
3. si $\cos(15(t_e - t_b))_1 = \cos(15(t_e - t_b))_2$, on vérifie que :

$$(10.33) \quad 15(t_e - t_b)_1 = 15(t_e - t_b)_2 \quad (t_e - t_b)_1 + (t_e - t_b)_2 = 24^h$$

La somme des deux heures différentes étudiées, pour une déclinaison du soleil constante, est de 24^h

Exemple. Heures babyloniennes à "Las Rozas" ($\alpha_K = \alpha_H = 40.49^\circ$) : L'intersection entre les lignes horaires babyloniennes et équinoxiales dont la différence horaire $(t_e - t_b)$ est de 5^h est :

$$(10.34) \quad \tan \delta = 1.1713 \cos(15(t_e - t_b)) = 1.1713 \cos 75^\circ$$

L'intersection se trouve sur l'arc diurne $\delta = 16.86^\circ$ et selon l'équation (10.33) se trouve aussi sur la différence horaire $(t_e - t_b) = 19^h$. Cet exemple est validé dans ce cas.

10.7.2 Relations entre les heures équinoxiales et les heures Italiques – Trièdre (A)

En divisant la formule (10.32) $\cos 15(t_e - t_b) = \tan \alpha_H \tan \delta$, et en se rappelant la relation entre les angles horaires des lignes de l'épigraphe (10.1c) $\varphi_b = \varphi_i + 90^\circ$ on trouve les mêmes résultats que dans le cas précédent.

$$(10.35) \quad \cos 15(t_e - t_i) = \tan \alpha_H \tan \delta$$

$$(10.36) \quad (t_e - t_i)_1 + (t_e - t_i)_2 = 24^h$$

10.7.3 Relations entre les heures équinoxiales et les heures Sidérales – Trièdre (A)

De la même manière que précédemment, on a $\alpha_K = (90^\circ - \epsilon)$, (10.26b) : $\varphi_s = \varphi_b + 90^\circ$, et la différence :

$$(10.37) \quad (t_e - t_s) = AR \quad \text{Ascension droite}$$

On arrive à :

$$(10.38) \quad \sin(15(t_e - t_s)) = \frac{\tan \delta}{\tan \epsilon} \quad \text{où} \quad \sin(15 AR) = \frac{\tan \delta}{\tan \epsilon}$$

$$(10.39) \quad 15(t_e - t_s)_1 = 180^\circ - 15(t_e - t_s)_2 \quad \text{où} \quad AR_1 + AR_2 = \frac{180^\circ}{15} = 12^h$$

Exemple. Heures sidérales à Las Rozas ($\alpha_K = \alpha_H = 40.49^\circ$) : L'intersection entre les heures sidérales et équinoxiales dont la différence horaire $(t_b - t_e)$ est de 15^h , a lieu sur l'arc diurne de déclinaison :

$$(10.40) \quad \tan \delta = \sin 75^\circ \tan \epsilon = 0.420$$

$\delta = 22.79^\circ$ et selon la relation (10.39) correspond aussi à la différence horaire $(t_e - t_b) = AR = 7^h$.

10.8 Propriétés des lignes horaires Babyloniennes, Italiques et Sidérales

1. Condition pour que les lignes babyloniennes et italiques soient symétriques par rapport à la sous-stylaire. Les pentes dans le plan $Z_a = 0$ des lignes babyloniennes et italiques sont :

$$(10.41) \quad \tan \mu_b = \frac{\sin \varphi_b}{\sin \alpha (1 - \cos \varphi_b)}$$

$$(10.42) \quad \tan \mu_i = \frac{-\sin \varphi_i}{\sin \alpha (1 - \cos \varphi_i)}$$

équations semblables mais l'origine est distincte. Pour que ces lignes soient symétriques par rapport à la sous-styloire, on doit vérifier que $\tan \mu_b = -\tan \mu_i$. Il en résulte une augmentation de l'angle φ_i de 180° (ou t_i de 12^h), dans le but que les heures italiques à partir de 12^h se trouvent dans la partie visible du plan $(A)_H$.

$$\frac{\sin \varphi_b}{\sin \alpha (1 - \cos \varphi_b)} = \frac{\sin \varphi_i}{\sin \alpha (1 + \cos \varphi_i)} = \frac{\sin(\varphi_i + 180^\circ)}{\sin \alpha (1 + \cos(\varphi_i + 180^\circ))} = \frac{-\sin \varphi_i}{\sin \alpha (1 - \cos \varphi_i)}$$

équation qui se vérifie pour :

$$(10.43) \quad \varphi_b + \varphi_i = 360^\circ$$

$$(10.44) \quad (t_e + t_i) = 24^h$$

La somme des heures babyloniennes et italiques des lignes symétriques par rapport à la sous-styloire est de 24^h .

Puisque $\varphi_b = \varphi_i + 180^\circ$, les heures italiques à partir de 12^h coïncident avec les babyloniennes des mêmes heures. De la même façon, si on traite des heures sidérales, $\tan \mu_{s1} = -\tan \mu_{s2}$, c'est-à-dire :

$$\frac{-\cos \varphi_{s1}}{\cos \alpha \sin \varphi_{s1} + \sin \alpha \tan(90^\circ - \epsilon)} = \frac{-\cos \varphi_{s2}}{\cos \alpha \sin \varphi_{s2} + \sin \alpha \tan(90^\circ - \epsilon)}$$

On vérifie que :

$$(10.45) \quad \varphi_{s1} + \varphi_{s2} = 180^\circ \quad \text{ou} \quad 440^\circ$$

$$(10.46) \quad \text{et} \quad (t_{s1} + t_{s2}) = 12^h \quad \text{ou} \quad (t_{s1} + t_{s2}) = 36^h$$

2. Si $\cos(15(t_e - t_b)) = -\cos(15(t_e - t_i)) = \tan \alpha \tan \delta$, alors d'après (10.32) et (10.35) on vérifie que :

$$(10.47) \quad 2t_e = t_b + t_i$$

3. Si $\delta = 0^\circ$, alors $\cos(15(t_e - t_b)) = 1$ et $\cos(15(t_e - t_i)) = -1$, et par conséquent, $15(t_e - t_b) = 90^\circ$, etc...

$$(10.48) \quad t_e - t_b = 6^h \quad \text{et} \quad t_e - t_i = -6^h$$

Pour les lignes sidérales : $\sin(15(t_e - t_s)) = \frac{\tan \delta}{\tan \epsilon}$ d'après (10.38), par conséquent :

$$(10.49) \quad t_e = t_s$$

$$(10.50) \quad t_e = t_s + 12^h$$

10.9 lignes horaires Babyloniennes, Italiques et Sidérales pour les bifilaires

On a démontré dans le chapitre VI que l'équation vectorielle du cadran bifilaire dans le trièdre (B) est (6.8) :

$$(\overrightarrow{PH})_b = \vec{i}_b M_0 \frac{A_b \sin \varphi + B_b \cos \varphi + H_b \tan \delta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \tan \delta} + \vec{j}_b N_0 \frac{M_b \sin \varphi + N_b \cos \varphi + J_b \tan \delta}{c \sin \varphi + d \cos \varphi + f \tan \delta}$$

c'est-à-dire que les coefficients A_b , B_b et H_b du "vecteur horaire" sont multipliés par le facteur M_0 et les coefficients M_b , N_b et J_b par le facteur N_0 (respectivement dans le trièdre (A) par les "c.t.p." m , $-n$, h et $-b$, a , j) et qui sera équivalent au vecteur horaire équinoxial avec un style normal au plan de base en multipliant ses composantes par les scalaires qui définissent la hauteur de chaque fil..

Appliquant les formules (10.8) des lignes babyloniennes, italiques et sidérales avec un style perpendiculaire au plan de base, c'est-à-dire avec $Q_a = -W$, et l'angle horaire φ correspondant au cas recherché, on arrive à la conclusion suivante.

Les coefficients de la variable X sont multipliés par N_0 , ceux de la variable Y par M_0 et ceux de la constante par le produit $M_0 N_0$ (voir le chapitre VI – cadran solaire bifilaire) et on arrive à l'équation de la ligne horaire sidérale :

$$(10.51) \quad N_0 U_a x_p + M_0 V_a y_p + N_0 M_0 Q_a = 0$$

exemple. Heures sidérales : $\varphi = \varphi_s$, $\alpha_K = 90^\circ - \epsilon$, $Q_a = c \sin \varphi \sin \epsilon + d \cos \varphi \sin \epsilon + f \cos \epsilon$.

La formule (10.12) pour les bifilaires se transforme en (10.52) :

$$(10.52) \quad N_0 \left(n \sin \varphi_s - m \cos \varphi_s + \frac{h}{\tan \epsilon} \right) x + M_0 \left(-b \sin \varphi_s + a \cos \varphi_s + \frac{j}{\tan \epsilon} \right) y + M_0 N_0 \left(c \sin \varphi_s + d \cos \varphi_s + \frac{f}{\tan \epsilon} \right) = 0$$

10.10 Figures

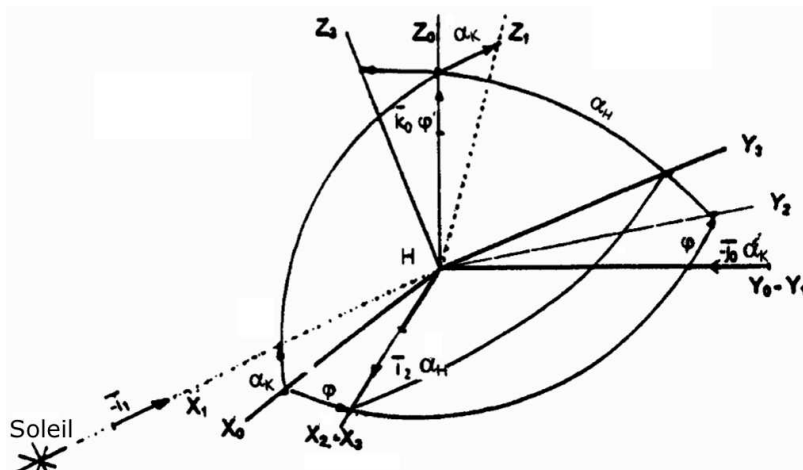


FIG. 10.1 – Trièdres (0), (1), (2) et (3)

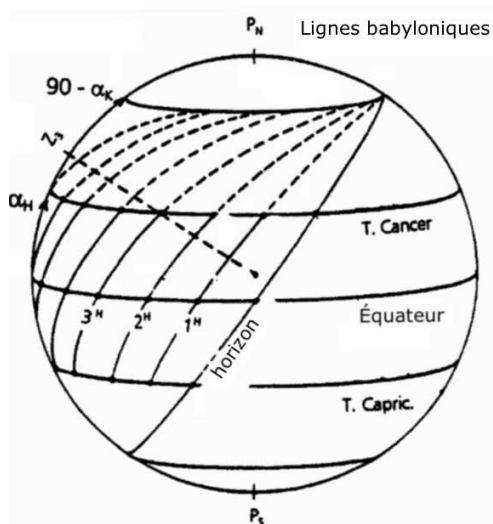


FIG. 10.2 – Lignes horaires babyloniennes

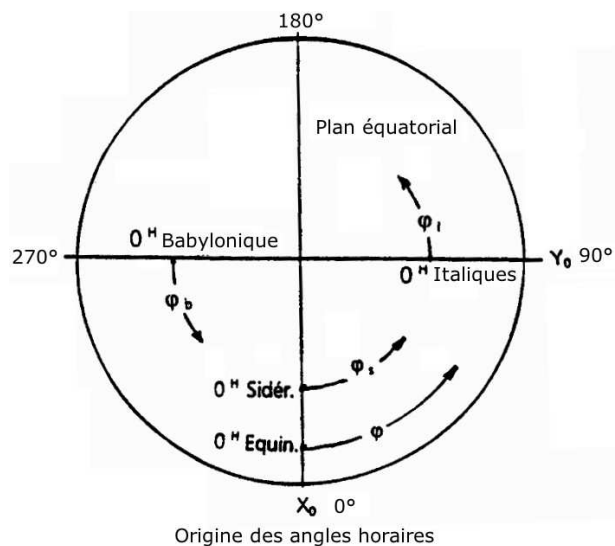


FIG. 10.3 – Les angles horaires φ

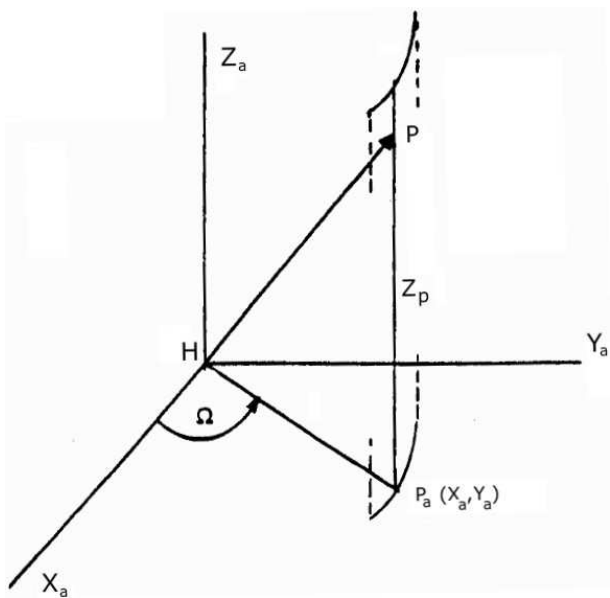


FIG. 10.4 -

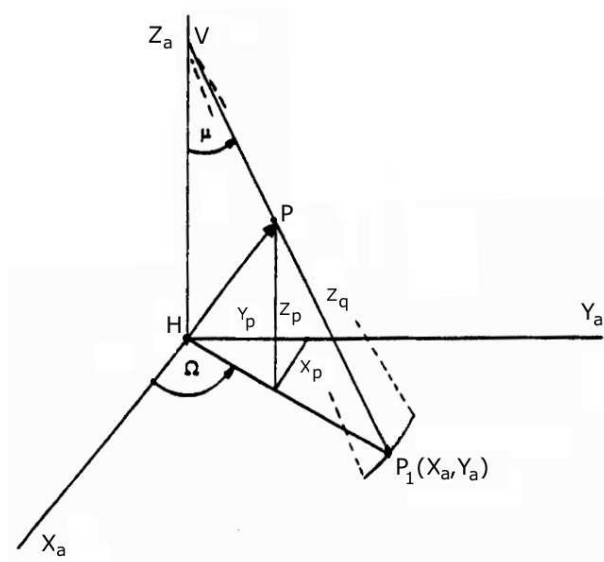


FIG. 10.5 -

Chapitre 11

Théorie des plans parallèles

Soient deux points géographiques H et K avec une différence de longitudes φ_{hk} . En chacun d'eux se trouve un plan $(A)_H$ et $(A)_K$ respectivement définis par leur vecteur : $\overrightarrow{AH}_{ah} = \vec{k}_{ah}$ et $\overrightarrow{AK}_{ak} = \vec{k}_{ak}$.

Si ces plans sont parallèles, leurs vecteurs sont confondus dans n'importe quel trièdre; dans le trièdre (2), (dont le plan $Z_2 = 0$ est l'équateur), on a comme équation, selon (2.7), fig. (11.1) :

$$(11.1) \quad \vec{k}_{ah} = \vec{k}_{ak} = \vec{i}_{2h}d_h - \vec{j}_{2h}c_h + \vec{k}_{2h}f_h = \vec{i}_{2k}d_k - \vec{j}_{2k}c_k + \vec{k}_{2k}f_k$$

Les formules de changement de repère permettant de passer du trièdre (2_h) au trièdre (2_k) sont :

$$(11.2) \quad \begin{cases} \vec{i}_{2k} = \vec{i}_{2h} \cos \varphi_{hk} - \vec{j}_{2h} \sin \varphi_{hk} \\ \vec{j}_{2k} = \vec{i}_{2h} \sin \varphi_{hk} + \vec{j}_{2h} \cos \varphi_{hk} \end{cases}$$

$$(11.3) \quad \text{on arrive à} \quad \begin{cases} c_k = -d_h \sin \varphi_{hk} + c_h \cos \varphi_{hk} \\ d_k = d_h \cos \varphi_{hk} + c_h \sin \varphi_{hk} \\ f_k = f_h \end{cases}$$

De là on en déduit :

1. La relation entre les "c.t.p." c , d et f et la différence de longitude φ_{hk} , donnée par (11.3), est une condition nécessaire et suffisante pour que les plans $(A)_H$ et $(A)_K$ soient parallèles
2. Les "c.t.p." f sont égaux dans des plans parallèles
3. Les plans parallèles dans un même méridien ont les coefficients "c.t.p." c , d et f égaux

En accomplissant les relations précédentes on calcule ensuite les deux paires de paramètres i_k , γ_k où α_k , λ_k qui déterminent le plan $(A)_k$ en fonction d'un des paramètres cités et en fonction des "c.t.p." du plan $(A)_H$.

11.1 Connaissant α_k et λ_k , trouver i_k , et γ_k

11.1.1 Calcul de i_k

Partons des valeurs (2.3) : $\begin{cases} c = -\sin \alpha \cos i \sin \gamma - \cos \alpha \sin i \\ d = \cos i \cos \gamma \\ f = -\cos \alpha \cos i \sin \gamma + \sin \alpha \sin i \end{cases}$. En multipliant f_k par $\sin \alpha_k$ et c_k par $\cos \alpha_k$, et en soustrayant on trouve (11.4) :

$$(11.4) \quad \boxed{\sin i_k = f_k \sin \alpha_k - c_k \cos \alpha_k}$$

11.1.2 Calcul de γ_k

En multipliant c_k par $\sin \alpha_k$ et f_k par $\cos \alpha_k$ et en les additionnant, on trouve :

$$(11.5) \quad \boxed{\tan \gamma_k = \frac{c_k \sin \alpha_k + f_k \cos \alpha_k}{-d_k}}$$

11.2 Connaissant i_k et γ_k , trouver α_k et λ_k

11.2.1 Calcul de α_k

En éliminant l'inconnue α_k du quotient $\frac{f_k}{c_k}$, on a :

$$(11.6) \quad \boxed{\tan \alpha_k = \frac{c_k \sin \gamma_k - f_k \tan i}{c_k \tan i + f_k \sin \gamma_k}}$$

Si le plan $(A)_K$ est horizontal : $\begin{cases} f_k = \sin \alpha_k \\ c_k = -\cos \alpha_k \\ d_k = 0 \end{cases}$ puis : $i_k = \gamma_k = 90^\circ$ et par conséquent : $\tan \alpha_k = -\frac{f_h}{c_k} = \frac{f_h}{\cos \alpha_k}$,

d'où :

$$(11.7) \quad \sin \alpha_k = f_h$$

11.2.2 Calcul de λ_k

En développant une des formules de (11.3) $d_k = d_h \cos \varphi_{hk} + c_h \sin \varphi_{hk}$ en fonction de $\tan \varphi_{hk}$:

$$(11.8) \quad \boxed{\tan \varphi_{hk} = \tan (\lambda_h - \lambda_k) = \frac{-d_h c_h + d_k V (c_h^2 + d_h^2 - d_k^2)}{c_h^2 - d_k^2}}$$

Si le plan $(A)_K$ est horizontal on arrive à :

$$(11.9) \quad \tan \varphi_{hk} = \tan (\lambda_h - \lambda_k) = -\frac{d_h}{c_h}$$

Le même résultat s'obtient avec la relation (11.3) pour la valeur $d_k = 0$.

11.3 Calcul des cadrans solaires dans des plans parallèles

À l'aide de ce qui a été vu précédemment et partant de l'équation du "vecteur horaire" avec un style parallèle à l'axe Terrestre, on étudie les deux solutions pour résoudre le cadran du plan $(A)_K$ dans le plan $(A)_H$ avec les mêmes axes et avec l'angle horaire φ_k :

1. En fonction des coefficients "c.t.p." du plan $(A)_H$ et de l'angle φ_{hk} (différence de longitude)
2. En fonction des coefficients "c.t.p." du plan $(A)_K$ et de l'angle ϕ_{hk} (différence angulaire entre la ligne de plus grande pente $Y_a H$, variable en chaque point géographique, et la sous-style, fixe dans l'espace). Fig. (11.2)

Dans les deux cas, si le "c.t.p." f est positif, le style parallèle à l'axe Terrestre a pour vecteur \vec{k}_2 et pour vecteur $-\vec{k}_2$ si $f < 0$. De plus, si le coefficient angulaire de l'équinoxiale $\tan \phi = \frac{-h}{j} < 0$, alors le plan est orienté vers l'est ($\gamma > 90^\circ$) et les "c.t.p." h et j ont le même signe, et si $\tan \phi = \frac{-h}{j} > 0$ alors l'orientation est ouest ($\gamma < 90^\circ$) et les "c.t.p." h et j ont des signes différents. Ceci est valable pour n'importe quel style.

(L'équinoxiale est (4.29) $h x + j y + 1 = 0$).

11.3.1 Avec les "c.t.p." du plan $(A)_H$ et l'angle φ_{hk}

En développant l'angle horaire en $\varphi_h = \varphi_k + \varphi_{hk}$, alors les coefficients "c.t.p." prennent la forme :

$$(11.10) \quad \begin{array}{ll} a_1 = a_h \cos \varphi_{hk} - b_h \sin \varphi_{hk} & j_1 = j_h \\ b_1 = b_h \cos \varphi_{hk} + a_h \sin \varphi_{hk} & c_1 = c_h \cos \varphi_{hk} - d_h \sin \varphi_{hk} \\ m_1 = m_h \cos \varphi_{hk} - n_h \sin \varphi_{hk} & d_1 = d_h \cos \varphi_{hk} + c_h \sin \varphi_{hk} \\ n_1 = n_h \cos \varphi_{hk} + m_h \sin \varphi_{hk} & f_1 = f_h \\ h_1 = h_h & \end{array}$$

Ces coefficients "c.t.p." correspondent au même "vecteur horaire" dans le plan $(A)_M$ situé au point géographique M_H du méridien K et parallèle au plan $(A)_H$ afin que les "c.t.p." c_1, d_1, f_1 vérifient la condition de parallélisme.

De plus, l'angle φ_{ah} entre l'axe $Y_a M$ du plan (sa ligne de plus grande pente variable en chaque point géographique), et l'axe du vecteur horaire $Y_b M$ (c'est-à-dire la sous-style, fixe dans l'espace), est dans ce cas constante et vaut selon (3.8) : $\tan \varphi_{ah} = \frac{h_1}{j_1} = \frac{h_h}{j_h} = C^{te}$. On en déduit qu'au point géographique M_H , le "vecteur horaire" a ses axes parallèles au "vecteur horaire" du point géographique H .

Si le plan $(A)_L$ est horizontal, alors son pôle, le point géographique A , lequel est défini par sa longitude (11.9) : $\tan \varphi_{hk} = -\frac{d_h}{c_h}$ et par sa latitude, (11.7) : $\sin \alpha = f_h$, vérifie les conditions de parallélisme.

11.3.2 Avec les "c.t.p." du plan $(A)_K$ et l'angle $\varphi_{hk} = \varphi_{ah} - \varphi_{ak}$

Le "vecteur horaire" du plan $(A)_K$ est ainsi égal au vecteur horaire de n'importe quel plan parallèle $(A)_H$ du point géographique H , c'est-à-dire, $(\vec{PK})_K = (\vec{PH})_H$, mais les axes des deux plans, variables en chaque point géographique K ne coïncide pas et sous-tendent l'angle φ_{hk} . Par conséquent, le développement du "vecteur horaire" du plan $(A)_K$ dans le plan $(A)_H$ s'effectue au moyen des rotations des principaux axes :

$$(11.11) \quad \tan \phi_{hk} = \tan(\varphi_{ah} - \varphi_{ak}) = -\frac{h_h j_k - h_k j_h}{h_h h_k + j_h j_k}$$

En changeant les axes du plan $(A)_K$ d'après (11.2), (permutant dans ce cas les indices "h" et "k"), les nouveaux "c.t.p." prennent les valeurs suivantes :

$$(11.12) \quad \begin{array}{ll} a_2 = a_k \cos \phi_{hk} + m_k \sin \phi_{hk} & j_2 = j_k \cos \phi_{hk} - h_k \sin \phi_{hk} \\ b_2 = b_k \cos \phi_{hk} + n_k \sin \phi_{hk} & c_2 = c_k \\ m_2 = m_k \cos \phi_{hk} - a_k \sin \phi_{hk} & d_2 = d_k \\ n_2 = n_k \cos \phi_{hk} - b_k \sin \phi_{hk} & f_2 = f_k \\ h_2 = h_k \cos \phi_{hk} + j_k \sin \phi_{hk} & \end{array}$$

Ces coefficients "c.t.p.", comme précédemment, correspondent aussi au même "vecteur horaire" dans le plan $(A)_M$ situé au point géographique M_H du méridien du point K et parallèle au plan $(A)_H$ pour que les "c.t.p." c_2, d_2, f_2 vérifient la condition de parallélisme.

Cercles "C". En projetant le vecteur \vec{i}_{ah} sur le plan parallèle au plan équatorial $(A)_E$ sous-tendant l'angle ϕ_h et projetant les plans tangents à la sphère Terrestre et parallèle au vecteur \vec{i}_{ah} du plan $(A)_H$, on se trouve placé sur un grand cercle C_h normal au vecteur. Il coupe l'équateur selon l'angle ϕ_h et par conséquent la ligne des points géographiques L comme les points M_H et A , et maintienne son cadran parallèle à lui-même et ses axes $X_L Y_L K$ son parallèles à ceux correspondant au point H , c'est-à-dire que l'angle entre la ligne de plus grande pente et la sous-style est constant (C^{te}). Fig. (11.3) et fig. (11.4). De la même manière, on calcule le cercle C_K passant par les points géographiques K et M_K . On en déduit :

1. Un cadran situé dans un plan $(A)_K$ se maintien égal à lui-même et ses axes tournent d'un angle $\varphi_{ah} = C^{te}$ en n'importe quel point L du cercle C_H
2. Les coordonnées du cercle C_H sont données par : longitude $\lambda = \varphi_{hl}$ (variable pour chaque point géographique L). La latitude sera exprimée par :

$$(11.13) \quad \tan \alpha_L = \frac{n_L}{h_L} = \frac{n_h \cos \varphi_{hk} + m_h \sin \varphi_{hk}}{h_h}$$

3. Les coefficients "c.t.p." calculés dans les parties précédentes remplissent les conditions : $a_1 = a_2, b_1 = b_2, m_1 = m_2$, etc..., et relient entre eux, les coefficients "c.t.p." des plans $(A)_H$ et $(A)_K$ et les angles φ_{hk} et ϕ_{hk}
4. Dans le cas d'un style normal au plan de base, on suivra la même méthode en tenant compte des nouveaux "c.t.p." (chapitre IV). Par exemple, $a_1 = n_h \cos \varphi_{hk} + m_h \sin \varphi_{hk}, a_2 = n_k \cos \phi_{hk} - b_k \sin \phi_{hk}, \dots$ etc.

En résumé, le "vecteur horaire" (dénommé "aiguille" du cadran solaire) d'un plan $(A)_H$ se maintien toujours parallèle à lui-même ; dans n'importe quel plan parallèle déplacé selon son méridien jusqu'au point géographique K , les éléments gnomoniques : sous-style, style, arc-diurnes, lignes horaires, etc. (soit la sphère du cadran) subissent une rotation d'un angle ϕ_{hk} à partir des axes principaux du plan $(A)_H$. En réalité, ce sont les axes du plan placé au point géographique K qui tournent et non le "vecteur horaire".

Si le point K se déplace sur un autre méridien, tous les éléments tournent du nouvel angle ϕ_{hk} et la "sphère" suit indiquant l'heure en K , (ou la change, si c'est celle du nouveau méridien, ou n'importe quel autre) ; mais si la variation de la longitude de K est de 15° , cette "sphère" se maintien égale à la précédente (ou la suivante), mais change l'heure

d'une ou plusieurs unités. Si les axes du "vecteur horaire" des lieux L_H sont parallèles à ceux du point H , son lieu géométrique est le cercle C_H qui passe, en plus du point géographique K , par les points M_K et A . Fig. (11.4)

Par conséquent, en fonction de ce qui a été dit, l'éclairement du point $(A)_K$ est fonction de ses coordonnées géographiques, tel comme cela a été étudié dans le chapitre VIII. (éclairement dans ce plan et dans le plan horizontal).

Discussion.

1. Si $\varphi_{hk} = 0^\circ$, alors les points géographiques H et M_H coïncident et le point K est dans le méridien de H . Fig. (11.5)
2. Si $\phi_{hk} = 0^\circ$, alors les points géographiques K et M_H et les cercles "C" coïncident. Fig. (11.6)
3. Si $\varphi_{hk} = \phi_{hk} = 0^\circ$, alors les points géographiques H , K et M_H coïncident ainsi que les cercles "C". Fig. (11.7)
Et si A se trouve dans le même méridien, son plan est horizontal et l'ensemble des cercles coïncident avec ce méridien.
4. Si le point géographique A se trouve dans le méridien de K , alors il coïncide avec M_H et son plan est horizontal. Fig (11.8)
5. Si le point géographique A est placé dans le méridien de H , le point M_H se trouve au pôle géographique et le cercle " C_H " est le méridien de H . Fig (11.9). Les plans des points géographiques L , perpendiculaires au méridien, ($\gamma_L = 90^\circ$, $i_L = i_L$), ont des valeurs égales pour les "c.t.p.", fonction de $i_L + \alpha_L = C^{te}$ afin de remplir les conditions de parallélisme données en (11.3)
6. Dans des plans parallèles, un plan placé en un point géographique K (du cercle " C_K "), passera en un point géographique K (du cercle " C_H ") par rotation de ses axes d'un angle ϕ_{hk} . Fig. (11.4)

Exemple. Angle ϕ_{hk} que doit subir le plan vertical non déclinant (inclinaison $I = 0^\circ$ et co-déclinaison $\gamma = 90^\circ$) placé à Stockholm (50.26° , 18.30°) pour le placer à Madrid (40.43° , -3.7°).

Les "c.t.p." à Stockholm :

$$\begin{aligned} c_h &= c_s = -0.8593 \\ d_h &= d_s = 0 \\ f_h &= f_s = -0.5113 \end{aligned}$$

Les "c.t.p." à Madrid :

$$\begin{aligned} c_k &= c_m = -0.7968 & h_k &= h_m = -0.2549 \\ d_k &= d_m = 0.3219 & j_k &= j_m = 0.8207 \\ f_k &= f_m = -0.5113 \end{aligned}$$

La différence de longitudes est donnée par : $\varphi_{hk} = \varphi_{sm} = 18.3 + 3.7 = 22^\circ$.

Le plan à Madrid, d'après (11.4) et (11.5) a pour inclinaison : $i_m = 15.96^\circ$ et pour co-déclinaison $\gamma = 70.44^\circ$, orienté à l'ouest. Ce plan étant défini, les axes du plan à Stockholm tournent d'un angle $\phi_{hk} = 17.25^\circ$, le méridien de Stockholm est le cercle C_S et le cercle C_M est celui qui passe par Madrid et le pôle A (de latitude $\alpha_A = -30.70^\circ$ et de longitude $\lambda_A = 18.30^\circ$).

11.4 Figures

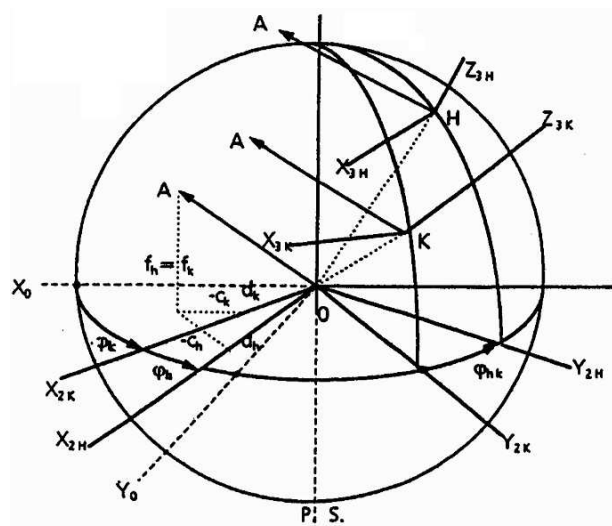


FIG. 11.1 –

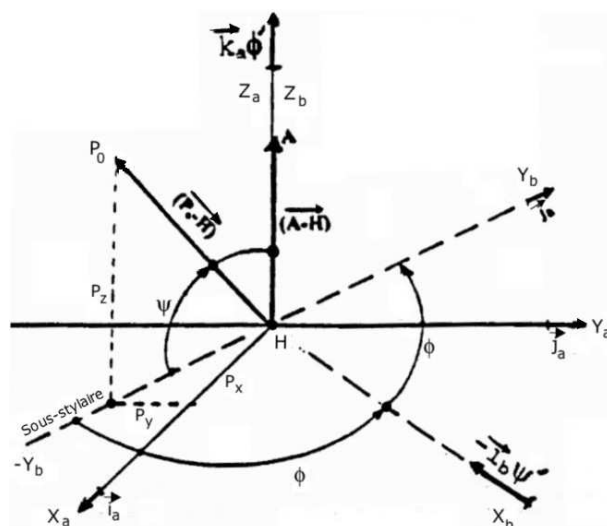


FIG. 11.2 –

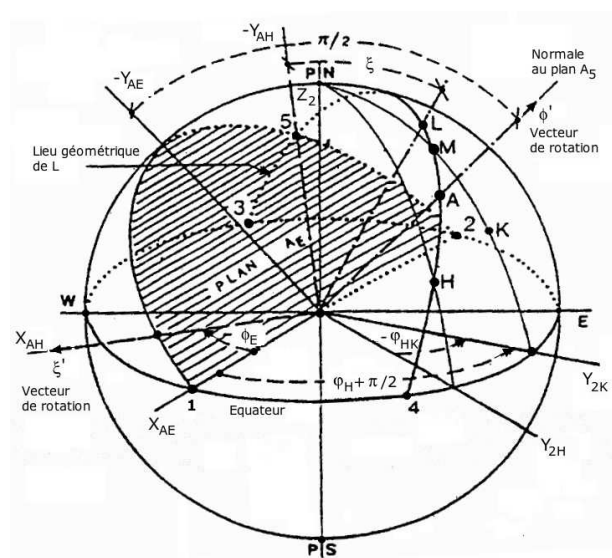


FIG. 11.3 –

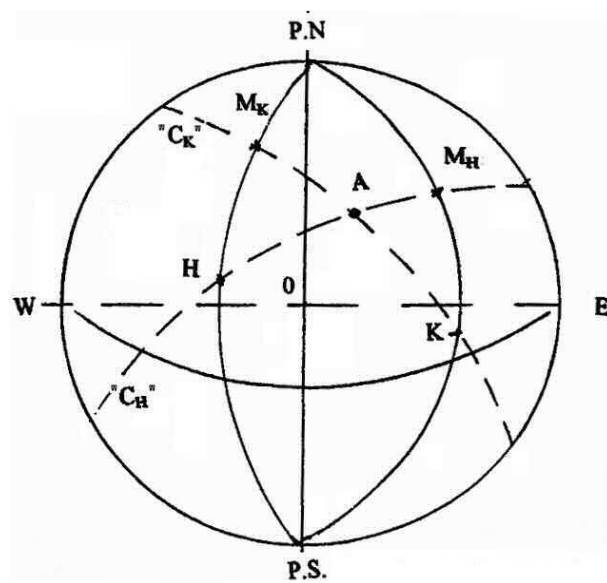


FIG. 11.4 –

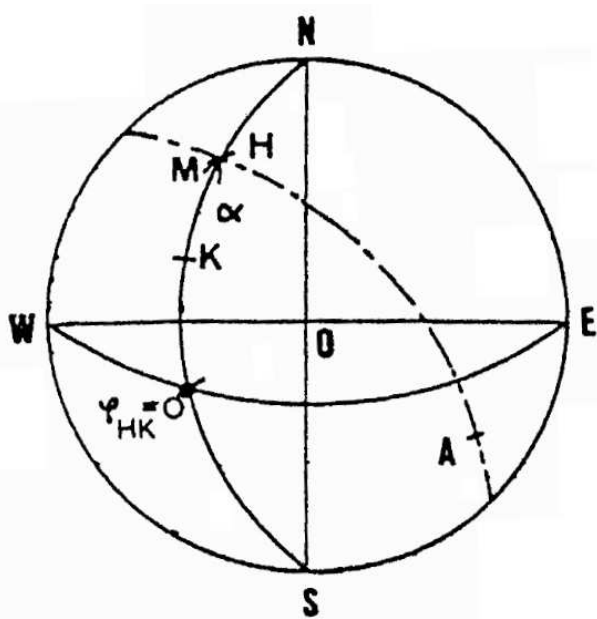


FIG. 11.5 -

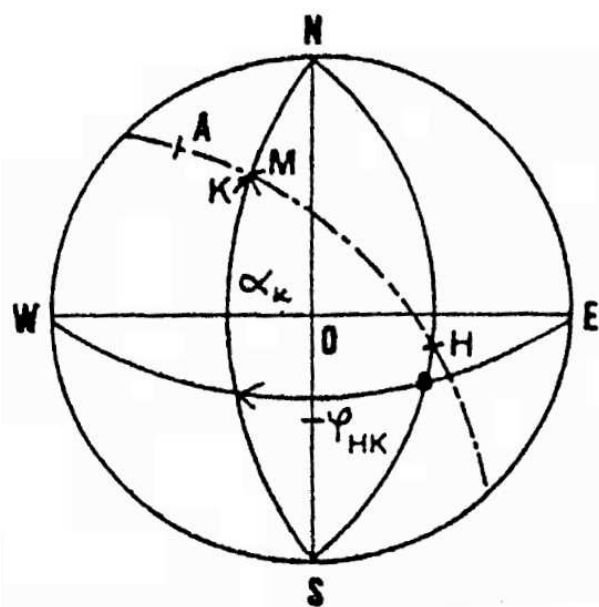


FIG. 11.6 -

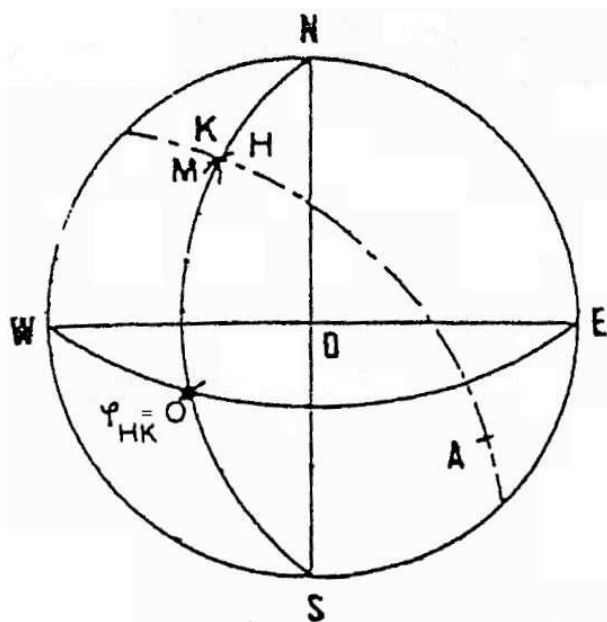


FIG. 11.7 -

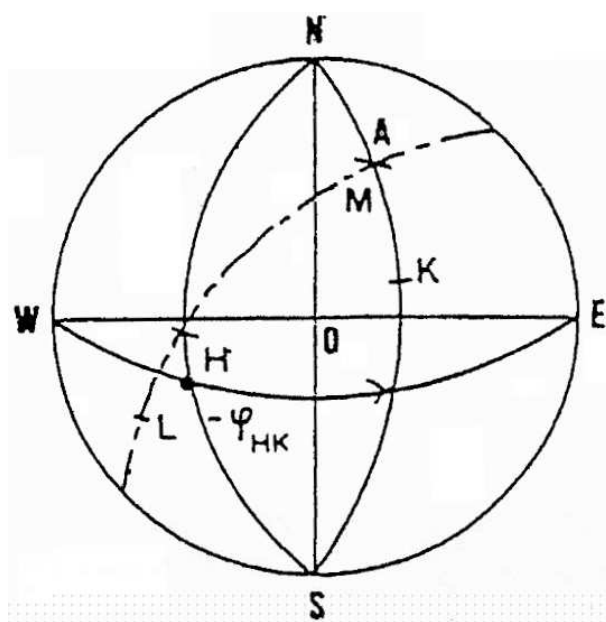


FIG. 11.8 -

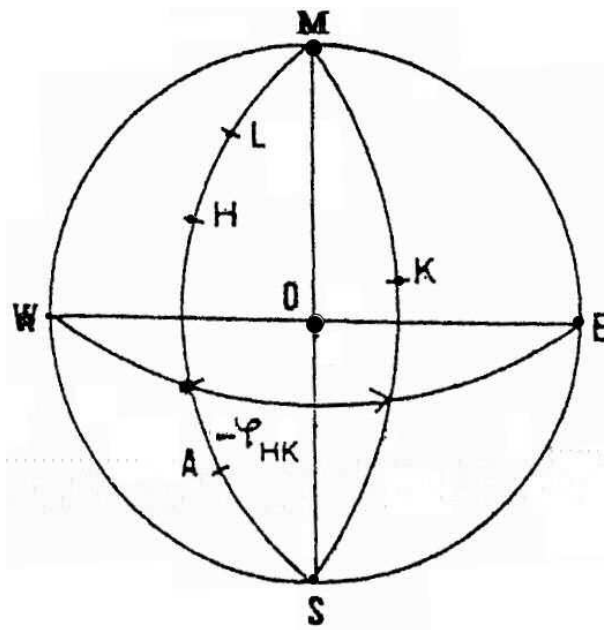


FIG. 11.9 –

Notice

Introduction au programme de tracé de cadrans sous Excel

Programme AdV pour résoudre des cadrans solaires de gnomon quelconque

Soient fournis les données fondamentales du cadran (latitude, co-déclinaison et inclinaison), le programme définit les coefficients de base, qui sont indépendants du gnomon. Il calcule aussi les coefficients du "vecteur horaire" ("V.H." équation générale du cadran solaire) en introduisant les valeurs numériques du gnomon correspondant. De l'ensemble des deux, entre autre, se déduisent les propriétés suivantes :

- Avec le vecteur style parallèle à l'axe de la Terre :
 - Si " f " > 0 le dit style sera dirigé au nord et les coefficients du "V.H." A , B , M et N coïncideront respectivement avec les coefficients de base " a ", " b ", " m " y " n "
 - Si " f " < 0 le style est dirigé vers le sud et les coefficients précédemment cités du "V.H." changent de signe. Voir référence (2.6)
- Avec le vecteur style normal au plan du cadran, les coefficients du "vecteur horaire" ne coïncident pas deux à deux avec les coefficients de base comme dans le cas précédent. Voir référence (4.14)
- Avec un style distinct des précédents, étant ou non un vecteur, les coefficients du vecteur horaire "V.H." ne sont pas confondus avec les coefficients de base
- Si " f " = 0, alors le cadran est polaire. Les lignes d'arcs diurnes sont des hyperboles. Voir références (3.2) y (4.18)
- Si " h " y " j " sont de même signe, le plan de base est orienté vers l'est, le coefficient angulaire de la droite équinoxiale est négatif et la sous-style se trouve à droite de la ligne de plus grande pente du plan de base. S'ils ont des signes distincts, on change respectivement les positions. Voir références (4.30) y (4.31)
- La relation $\cos^2 \delta \gtrless f^2$ définit le type de conique de chaque arc diurne. Voir référence (4.18)
- Si le cadran marque l'heure d'un point géographique " K " en " H " on conserve tout ce qui précède, excepté l'angle horaire, qui varie de la différence de longitude φ_{hk} entre les deux points

Table des matières

Page de Garde	1
PRÉFACE	2
INTRODUCTION	3
Registre de la propriété intellectuelle	4
1 Trièdres de base	5
1.1 Trièdres de base	5
1.1.1 Trièdre de base (0)	5
1.1.2 Trièdre (1)	5
1.1.3 Trièdre (2)	5
1.1.4 Trièdre (3)	6
1.1.5 Trièdre (A)	6
1.1.6 Trièdre (B)	6
1.2 Vecteurs de base, Angle horaire	6
1.3 Résumé des Vecteurs de base et des autres Vecteurs	7
1.4 Figures	8
2 Équation du rayon solaire et coefficients de base	9
2.1 Équation du rayon solaire et les "c.t.p."	9
2.2 Représentation graphique	11
2.3 Annexe – Passer d'un trièdre à un autre, en changeant les angles α , i , γ dans les "c.t.p."	11
2.4 Figures	12
3 Plan de base et style du cadran	13
3.1 Base du cadran solaire	13
3.2 Style	13
3.2.1 Calcul des angles ϕ et Ψ	13
3.2.2 Style parallèle à l'axe de la Terre (vecteur \vec{k}_2 ou $-\vec{k}_2$)	13
3.2.2.1 Trièdre (A)	13
3.2.2.2 Trièdre (B) – Détermination du style	14
3.2.3 Style normal au plan de base	14
3.3 Figures	15
4 Vecteur horaire	16
4.1 Vecteur horaire	16
4.2 Lignes d'arc diurnes	18
4.2.1 Coniques des arc-diurnes	18

4.2.2	Exemples d'arcs diurnes	18
4.2.3	Équinoxiale	19
4.3	Lignes horaires	19
4.3.1	Exemples dans le trièdre (A)	20
4.3.1.1	★Style normal au plan de base	20
4.3.1.2	★Style parallèle à l'axe de la Terre	20
4.3.1.3	★Style normal au plan dans le trièdre (A)	20
4.3.2	Ligne d'horizon	21
4.3.3	Équation du temps. Calcul de la lemniscate	21
4.4	Figures	22
5	Co-déclinaison et inclinaison d'un plan	24
	(À partir d'un cadran solaire, contrairement à d'autres méthodes)	
5.1	Calcul de la co-déclinaison (1ère méthode)	24
5.2	Calcul de l'inclinaison (1ère méthode)	25
5.3	Exemple numérique	25
5.3.1	Calcul de la co-déclinaison γ	25
5.3.2	Calcul de l'inclinaison i	26
5.4	Calcul de la co-déclinaison d'une droite ou d'un plan (2e méthode)	26
5.5	Calcul de la co-déclinaison d'un plan vertical	26
5.6	Calcul de l'inclinaison d'un plan	27
5.7	Figures	28
6	Cadran solaire bifilaire	30
6.1	Coniques d'arc-diurnes	31
6.2	Lignes horaires	31
6.3	Figures	33
7	Hauteur et azimut du soleil	34
7.1	Courbes de hauteur	35
7.2	Courbes d'azimut	35
7.3	Conclusion	36
7.4	Figures	37
8	Éclairement d'un cadran	38
8.1	Durée d'éclairement d'un cadran solaire	38
8.2	Temps mis par le disque solaire pour franchir un plan déterminé	39
8.3	Temps de passage de l'ombre du disque solaire en un point P du "vecteur horaire" pour un cadran solaire donné	39
8.3.1	Calcul de t_0	39
8.3.2	Discussion	40
8.4	Exemples de calcul	40
8.5	Figures	41
9	Lignes horaires	43
9.1	Relations entre les trièdres (1) et (A)	43
9.2	Lignes horaires (fig. (9.1) et(9.3))	43
9.2.1	Lignes horaires sur un plan	43
9.2.2	Lignes horaires sur un cylindre	43
9.2.3	Lignes horaires sur un cône	44

9.2.4	Lignes horaires sur une sphère (fig. (9.5))	44
9.2.5	Exemples	45
9.3	Figures	46
10	Lignes horaires Babyloniques, Italiques et Sidérales	47
10.1	Angles horaires (fig. (10.3))	47
10.2	Equation des plans D	48
10.3	Lignes horaires babyloniennes et Italiques sur un plan	48
10.3.1	Heures babyloniennes (avec l'angle horaire φ_b)	49
10.3.2	Heures italiques (avec l'angle horaire φ_i)	49
10.3.3	Enveloppes des lignes babyloniennes et italiques sur un plan	49
10.4	Lignes horaires babyloniennes et Italiques sur un cylindre (10.4)	49
10.5	Lignes horaires babyloniennes et Italiques sur un cône (10.5)	50
10.6	Lignes horaires Sidérales	50
10.6.1	Angle horaire sidéral (10.3)	50
10.6.2	Heures Sidérales	51
10.7	Relations entre les diverses heures	51
10.7.1	Relations entre les heures équinoxiales et les heures Babyloniques – Trièdre (A)	51
10.7.2	Relations entre les heures équinoxiales et les heures Italiques – Trièdre (A)	52
10.7.3	Relations entre les heures équinoxiales et les heures Sidérales – Trièdre (A)	52
10.8	Propriétés des lignes horaires Babyloniques, Italiques et Sidérales	52
10.9	lignes horaires Babyloniques, Italiques et Sidérales pour les bifilaires	53
10.10	Figures	54
11	Théorie des plans parallèles	56
11.1	Connaissant α_k et λ_k , trouver i_k , et γ_k	56
11.1.1	Calcul de i_k	56
11.1.2	Calcul de γ_k	56
11.2	Connaissant i_k et γ_k , trouver α_k et λ_k	57
11.2.1	Calcul de α_k	57
11.2.2	Calcul de λ_k	57
11.3	Calcul des cadrans solaires dans des plans parallèles	57
11.3.1	Avec les "c.t.p." du plan $(A)_H$ et l'angle φ_{hk}	57
11.3.2	Avec les "c.t.p." du plan $(A)_K$ et l'angle $\varphi_{hk} = \varphi_{ah} - \varphi_{ak}$	58
11.4	Figures	60
	Notice : Introduction au programme de tracé de cadrans sous Excel	63
	Table des matières	66
	Liste des figures	68

Table des figures

1.1	Trièdres (0), (1), (2) et (3)	8
1.2	Trièdres (2) et (3)	8
1.3	Trièdres (3), (A) et (B)	8
2.1	Quadrilatère K sur la sphère céleste	12
3.1	Le point H a été dédoublé afin de faciliter la compréhension de la figure	15
3.2	15
3.3	15
3.4	15
4.1	22
4.2	22
4.3	22
4.4	22
4.5	Ordonnée y_{Ha} – Ligne d'horizon, trièdre (A)	23
4.6	Ligne d'horizon dans le trièdre (B)	23
4.7	courbe en huit sur la ligne horaire t_i	23
4.8	Courbe de l'équation du temps	23
5.1	28
5.2	28
5.3	28
5.4	28
5.5	29
5.6	29
5.7	29
6.1	Cadran bifilaire	33
6.2	33
7.1	37
7.2	37
7.3	37
8.1	41
8.2	41
8.3	42
8.4	42
8.5	42

8.6	42
9.1	Trièdres (0), (1), (2) et (3)	46
9.2	Z_3 : Plan horizontal au point géographique H	46
9.3	46
9.4	46
9.5	46
10.1	Trièdres (0), (1), (2) et (3)	54
10.2	Lignes horaires babyloniennes	54
10.3	Les angles horaires φ	54
10.4	55
10.5	55
11.1	60
11.2	60
11.3	60
11.4	60
11.5	61
11.6	61
11.7	61
11.8	61
11.9	62